De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler.
Hver opgave afsluttes med symbolet ★ **så** læseren er klar over det. Dette gælder ikke underspøgsmålene fra opgaverne 7 op til 13.

Opgave 1 Løs ligningen

$$2\cdot(x+5)=6x+30.$$

a) Ligningen løses.

$$2\cdot(x+5)=6x+30 \Leftrightarrow$$
$$2x+10=6x+30 \Leftrightarrow$$
$$-4x=20 \Leftrightarrow$$
$$x=-5$$

★

Opgave 2

foto: www.colourbox.dk

I en model for produktion af kvartssand i et bestemt land er produktionen 526.000 m^3 kvartssand i 2006, hvorefter produktionen hvert år aftager med 39.000 m^3 kvartssand.

Indfør passende variable, og opstil en sammenhæng, der beskriver udviklingen i landets produktion af kvartssand.

a) Først og fremmest ses det, at det er en lineær funktion ($f(x)=ax+b$). Her er x antal år efter år 2006 og $f(x)$ er produktionen af kvartssand, målt i m^3. Det oplyses, at begyndelsesværdien er $526.000m^3$ kvartssand i år 2006. Dette aftager med $39.000m^3$ kvartssand pr. år. Dvs. modellen er:

$$f(x)=-39000x+526000$$

Som gælder fra år 2006 og frem.

★

Opgave 3 En parabel er graf for funktionen

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 7.$$

Bestem koordinatsættet til toppunktet for parablen.

a) Toppunktet bestemmes. Der vises to metoder.

Metode 1: Toppunktsformlerne

Vi benytter os af toppunktsformlerne $T_x = -b/2a$ og $T_y = -d/4a = -(b^2 - 4ac)/4a$ hvor $a \neq 0$ i begge tilfælde (dette antages under alle omstændigheder når det er af typen $y = ax^2 + bx + c$).

Dernæst benyttes formlerne:

$$T_x = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = 1$$

$$T_y = -\frac{((-4)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7)}{4 \cdot 2} = -\frac{(16 - 56)}{8} = -\frac{(16 - 56)}{8} = 5$$

Dermed er koordinatsættet givet ved

$$T = (1; 5)$$

(Skulle man have glemt formlen for T_y eller diskriminanten, så kan man blot indsætte T_x i $f(x)$).

Metode 2: Differentialregning

Funktionen differentieres.

$$f'(x) = 4x - 4$$

Ligningen $f'(x) = 0$ løses:

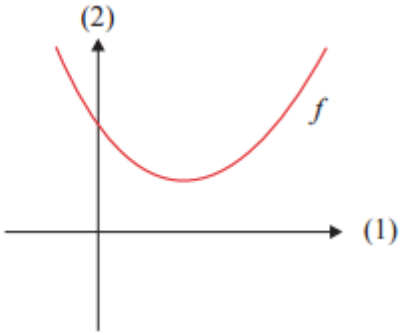
$$4x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$$

Dernæst indsættes værdien i $f(x)$.

$$f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 7 = 5$$

★

Opgave 4



På figuren ses en parabel, der er graf for en funktion f, som er givet ved

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Gør rede for fortegnet for hver af konstanterne a, b, c og diskriminanten d.

a) Vi giver os i kast med at se på grafen. Ud fra den kan man se, at fortegnene er som følger:

$$a > 0$$

Fordi parablen er positiv.

$$b < 0$$

For hvis man tegner en tangentlinje ved skæringen af y-aksen, ville man opleve, at tangentlinjen er aftagende.

$$c > 0$$

Fordi grafen for $f(x)$ skærer y-aksen i den positive side af y-aksen. (over x-aksen).

$$d < 0$$

Fordi der ikke findes reelle løsninger, dvs. $x \notin \mathbb{R}$.

★

Opgave 5 For en eksponentialfunktion $f(x) = b \cdot a^x$ er fordoblingskonstanten lig med 3.

Udfyld de tomme felter i den nedenstående tabel

x	0	3	
$f(x)$		10	40

a) Man har et punkt, nemlig $B = (3; 10)$ og da fordoblingskonstanten er lig 3, så for hver gang man går tre ud af x-aksen, fordobles y-aksen. Antag, at $x = 0$ har $y = 5$ fordi fordoblingkonstanten er lig 3 og dermed bevæger man sig tre ud af x-aksen fås $x = 3$ og tallet 5 fordoblet er 10. Det dobbelte af 10 er lig med 20, men eftersom 40 står angivet i skemaet, må denne x-værdi være $x = 9$. Skemaet er som følger:

x	0	3	6	9
$f(x)$	5	10	20	40

De røde tal er de fundene værdier og / eller tilføjet værdier.

★

Opgave 6 En funktion f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x.$$

Bestem $f'(x)$, og bestem monotoniforholdene for f.

a) Vi bestemmer monotoniforholdene.

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{3-1} - 4 \cdot x^{1-1} = x^2 - 4$$

Ligningen $f'(x) = 0$ løses.

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Metode 1: Monotonilinje

Vi vælger nogle tal, som ikke er rødderne for ligningen $f'(x) = 0$, disse kunne være:

$$-3; 0; 3$$

Eftersom disse tal ikke er rødderne. Vi indsætter i funktionsudtrykket for den afledede:

$$f'(-3) = (-3)^2 - 4 = 5$$
$$f'(0) = 0^2 - 4 = -4$$
$$f'(3) = 3^2 - 4 = 5$$

Dermed kan skemaet konstrueres:

x		-2		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

Dvs. funktionen $f(x)$ er:

Voksende i intervallet $(-\infty; -2]$ og $[2; \infty)$

Aftagende i intervallet $[-2; 2]$

Metode 2: Dobbelte afledede

Som skrevet findes den dobbelte afledede:

$$f''(x) = 2 \cdot x^{2-1} - 0 = 2x$$

Indsættes rødderne fra ligningen $f'(x) = 0$ i $f''(x)$ fås:

$$f''(-2) = 2 \cdot (-2) = -4, \qquad -4 < 0 \quad lokalt\ maksimum$$
$$f''(2) = 2 \cdot 2 = 4, \qquad 4 > 0 \quad lokalt\ minimum$$

Dermed er konklusionen:

Voksende i intervallet $(-\infty; -2]$ og $[2; \infty)$

Aftagende i intervallet $[-2; 2]$

★

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler.
Samme afslutning med ★ gælder også i denne delprøve.

Opgave 7

Foto: www.colourbox.dk

Tabellen viser en bestemt kommunes årlige indtægt fra parkering for hvert af årene i perioden 2004-2008.

År	2004	2005	2006	2007	2008
Årlig indtægt fra parkering i mio. kr.	310	350	424	515	582

I en model kan udviklingen i kommunens årlige indtægt fra parkering beskrives ved en funktion af typen

$$f(t) = b \cdot a^t \ ,$$

hvor $f(t)$ betegner kommunens årlige indtægt fra parkering (målt i mio. kr.) til tidspunktet t (målt i år efter 2004).

a) Benyt tabellens data til at bestemme konstanterne a og b.

b) Benyt modellen til at bestemme kommunens årlige indtægt fra parkering i 2010.

c) Benyt modellen til at bestemme den årlige procentvise vækst i kommunens indtægt fra parkering.

Løsningen ses næste side.

a) Her udføres der eksponentiel regression. I Maple sker det således:
NB: 2004 svarer til $t = 0$.

```
with(Gym) :
L1 := [0, 1, 2, 3, 4] :
L2 := [310, 350, 424, 515, 582] :
f(t) := ExpReg(L1, L2, t) :
f(t)
```

$$305.444850799138\ 1.17892499834918^{t}$$

Dermed er tallene a og b fundet, som nemt kan aflæses i ovenstående model. De er også som følger: $a = 1.1789$ og $b = 305.4448$

b) Da år 2004 var $t = 0$, så er år 2010 lig med $t = 6$ og dette tal indsættes i modellen $f(t)$.

$$f(6) = 305.4448 \cdot 1.1789^6 \approx 820$$

Dvs. i år 2010 var kommunens årlige indtægt $820\ mio\ kr$

c) Her anvendes fremskrivningsfaktor formlen $a = 1 + r$, her er formålet at finde r udtrykt i procent.

$$1.1789 = 1 + r \Leftrightarrow r = 0.1789$$

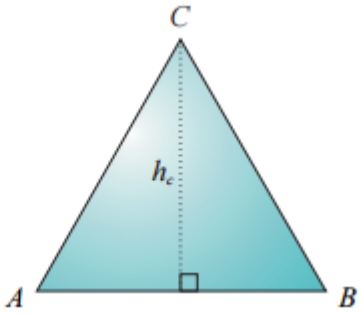
Ganget med 100% fås:

$$r = 17.89\%$$

Dermed er den årlige procentvise vækst fundet til at være 17.89%.

★

Opgave 8



Figuren viser en model af glasset i et trekantet vindue.

Modellen af glasset er en ligesidet trekant ABC, hvor $|AB| = 120$. Alle enheder er cm.

a) Benyt modellen til at bestemme glassets højde h_c.

b) Benyt modellen til at bestemme arealet af glasset.

a) Højden kan nemt bestemmes. Man har at vinklen uden navn, men lad os kalde den midtpunktet M er 90°, samt $|AM| = |BM| = \frac{120cm}{2} = 60cm$, ligeledes har man at $|AC| = |BC| = 120cm$, så højden bestemmes via Pythagoras:

$$|CM|^2 + |AM|^2 = |AC|^2$$

Så indsættes oplysningerne i ovenstående formel er:

$$|CM|^2 + 60^2 = 120^2 \Leftrightarrow |CM| = \sqrt{120^2 - 60^2} = \sqrt{10800} = 103.923$$

Dvs. man har at $h_c = |CM| = 103.923cm$

Arealet af hele glasset kan bestemmes ved at bestemme arealet af første trekant. Man kan også benytte ½-appelsinformel (pga. trekanten er ligesidet er vinklerne ens). Sidstnævnte tilfælde tages:

$$T = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot \sin(A) = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 120 \cdot \sin(60) = 6235.38$$

Dvs. arealet af glasset er $6235.38cm^2$.

Jeg viser også med at inddele trekanten:

$$A_{ACM} = \frac{1}{2} \cdot |CM| \cdot |AM| = \frac{1}{2} \cdot 103.923 \cdot 60 = 3117.69$$

Dette areal gælder for ACM, men da ACM er identisk med CMB så er arealet også det samme. Derfor lægges begge arealer sammen. Man har:

$$A_{ABC} = A_{ACM} + A_{CMB} = 3117.69 + 3117.69 = 6235.38$$

Opgave 9 I en model kan udviklingen i befolkningstallet på verdensplan beskrives ved

$$f(x) = \frac{12246}{1 + 3{,}95 \cdot e^{-0{,}0273 \cdot x}},$$

hvor $f(x)$ betegner befolkningstallet på verdensplan (målt i mio.) til tidspunktet x (målt i år efter 1950).

a) Tegn grafen for f, og benyt modellen til at bestemme befolkningstallet på verdensplan i 2016.

b) Bestem $f'(70)$, og gør rede for, hvad tallet betyder for udviklingen i befolkningstallet på verdensplan.

a) Der er givet en model over befolkningstallet på verdensplan:

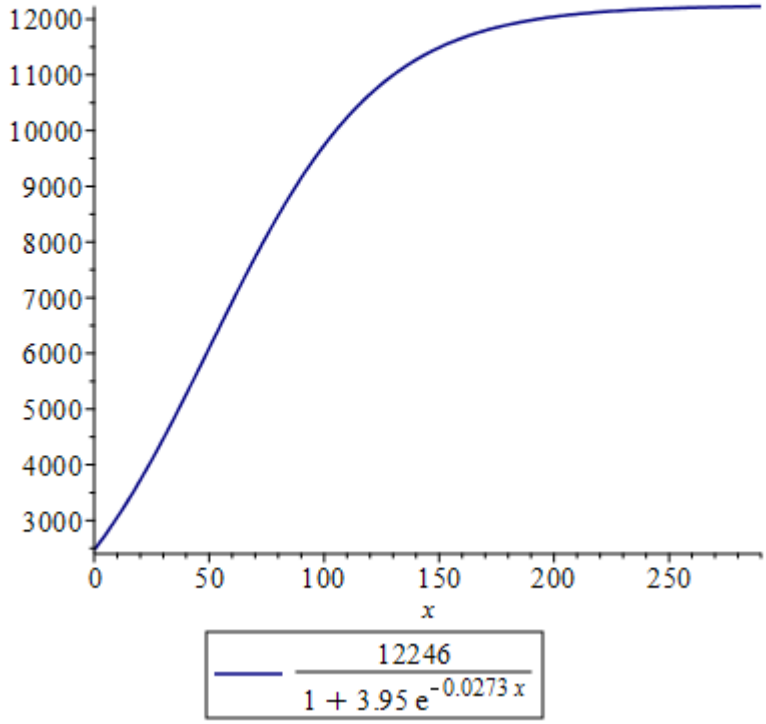
$$f(x) = \frac{12246}{1 + 3.95 \cdot e^{-0.0273 \cdot x}}$$

Grafen tegnes via Maple:

$with(Gym):$

$f(x) := \frac{12246}{1 + 3.95 \cdot \exp(-0.0273 \cdot x)}:$

$plot(f(x), x = 0..290, legend = [f(x)], color = ["Navy"])$



Bemærk, at $\exp(x) = e^x$. Dernæst indsættes $x = 66$ (fordi det er år 2016) i $f(x)$,

$$f(66) = \frac{12246}{1 + 3.95 \cdot e^{-0.0273 \cdot 66}} = 7413.926$$

Dvs. i år 2016 må befolkningen være 7414 mio. på verdensplanen.

b) Funktionen differentieres. (og dette gøres via Maple).

$$f(x) := \frac{12246}{1 + 3.95 \cdot \exp(-0.0273 \cdot x)} :$$

$f'(x)$

$$\frac{1320.547410\, e^{-0.0273\, x}}{\left(1 + 3.95\, e^{-0.0273\, x}\right)^2}$$

$f'(70)$

$$77.82593735$$

Dvs. i år 2020 stiger befolkningen hvert år med 77.82mio. på verdensplan.

Opgave 10 En funktion f er givet ved

$$f(x) = (2 - x) \cdot \ln(x), \quad x > 0.$$

a) Løs ligningen $f(x) = 0$.

I første kvadrant afgrænser grafen for f og førsteaksen en punktmængde M, der har et areal.

b) Bestem arealet af M.

a) Ligningen $f(x) = 0$ løses.

$$(2 - x) \cdot \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{matrix} \ln(x) = 0 \\ 2 - x = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} e^{\ln(x)} = e^0 \\ -x = -2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ x = 2 \end{matrix}$$

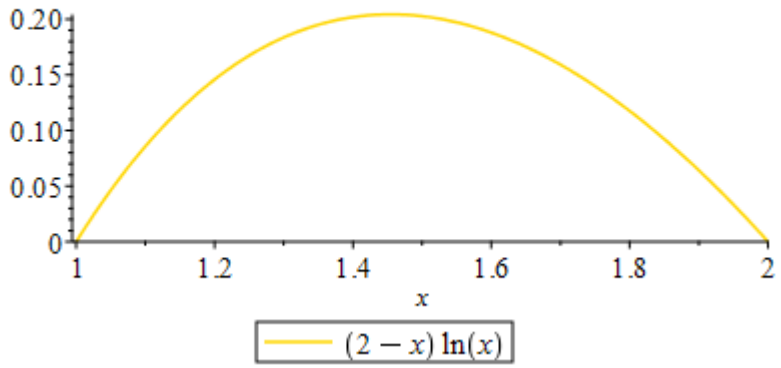
Bemærk, at ligningen er splittet op. Begge løsninger passer. (overbevis dig selv om det passer).

b) Rødderne fra spgm. a. benyttes også her. Integralet tages af funktionen $f(x)$ så arealet kan bestemmes.

$$M = \int_1^2 f(x)\, dx = \int_1^2 (2 - x) \cdot \ln(x)\, dx = 0.1362$$

Udregnet i CAS. På B-niveau er partiel integration ikke pensum. Dvs. arealet af M blev bestemt til at være $M = 0.1362$ (tallet lyder ikke så meget, så man kan overbevise sig selv om at det passer ved at tegne det i et CAS program).

$f(x) := (2 - x) \cdot \ln(x) :$
$plot(f(x), x = 1..2, legend = [f(x)], color = ["Gold"])$



Opgave 11

En deltager i et rollespil vil undersøge en af de ottesidede terninger, som bruges i rollespillet.

Deltageren formulerer en nulhypotese:

Hver af de otte sider forekommer lige ofte.

Deltageren kaster den ottesidede terning 250 gange. Tabellen viser hyppigheden for hver af de otte sider.

Side	1	2	3	4	5	6	7	8
Observeret antal	23	34	27	41	19	36	26	44

a) Bestem med udgangspunkt i nulhypotesen de forventede hyppigheder, og afgør på et 5% signifikansniveau, om nulhypotesen kan forkastes.

a) Eftersom antagelsen er, at terningens otte sider kommer lige ofte, må de forventede værdier kunne være:

$$Forv = \frac{250}{8} = 31.25$$

$Side$	1	2	3	4	5	6	7	8
$Obs\ (O)$	23	34	27	41	19	36	26	44
$Forv\ (F)$	31.25	31.25	31.25	31.25	31.25	31.25	31.25	31.25

Dernæst bestemmes teststørrelsen. Formlen er:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i - F_i)^2}{F_i} = \frac{(O_1 - F_1)^2}{F_1} + \cdots + \frac{(O_n - F_n)^2}{F_n}$$

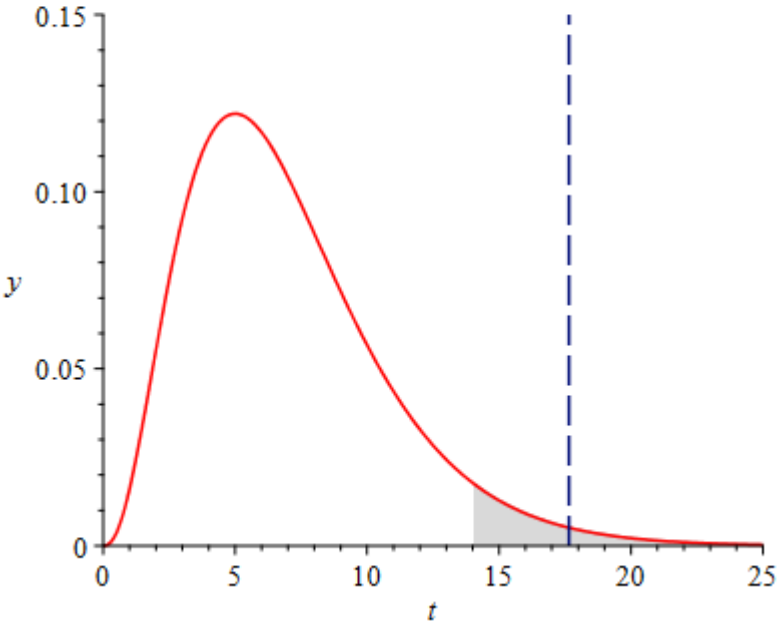
Teststørrelsen udregnes:

$$\chi^2 = \frac{(23-31.25)^2}{31.25} + \frac{(34-31.25)^2}{31.25} + \frac{(27-31.25)^2}{31.25} + \frac{(41-31.25)^2}{31.25} + \frac{(19-31.25)^2}{31.25} + \frac{(36-31.25)^2}{31.25} + \frac{(26-31.25)^2}{31.25} + \frac{(44-31.25)^2}{31.25} = 17.648$$

Vi lader den lige stå, for i Maple kan man også lave sådan en test. Denne test kaldes en Goodness-of-fit-test

```
with(Gym) :
obs := [23, 34, 27, 41, 19, 36, 26, 44] :
forv := [31.25, 31.25, 31.25, 31.25, 31.25, 31.25, 31.25, 31.25] :
ChiKvadratGOFtest(obs, forv, level = 0.05)
```

χ^2-teststørrelse = 17.648
Frihedsgrader = 7
Kritisk værdi = 14.067
p-værdi = 0.013663



Heldigvis fik vi samme teststørrelse som vores udregning. Da teststørrelsen er større end den kritiske værdi, må nulhypotesen forkastes. (ses også via p-værdi. Da den er 1.3663% hvilket er mindre end 5% må nulhypotesen forkastes.) med andre ord, den 8-kantede terning viser altså ikke dens side ligeligt.

Opgave 12 En funktion f er givet ved

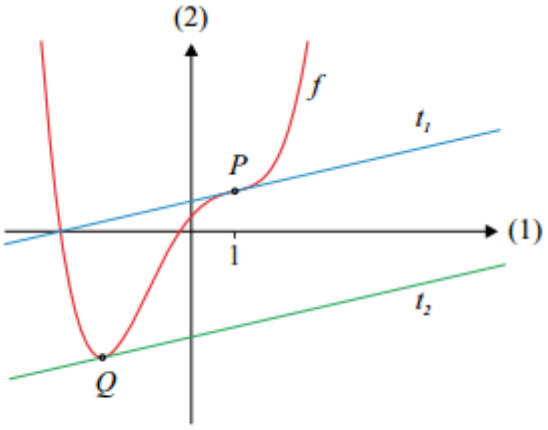
$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 10x + 3.$$

Grafen for f har en tangent t_1 med røringspunkt $P(1, f(1))$.

a) Bestem en ligning for tangenten t_1.

Grafen for f har en anden tangent t_2 med samme hældningskoefficient som t_1 og et andet røringspunkt Q.

b) Bestem førstekoordinaten til røringspunktet Q.



a) Tangenten t_1 bestemmes. Tangentligningen er pr. definition:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Funktionen differentieres.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x + 10$$

Punktet P indsættes i f og f':

$$f(1) = 1^4 - 6 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 + 3 = 8$$
$$f'(1) = 4 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1 + 10 = 2$$

Dermed er tangenten i punktet P følgende:

$$t_1 = 2 \cdot (x - 1) + 8$$

Eller:

$$t_1 = 2x + 6$$

b) Da hældningskoefficienten er den samme, så er tallet $a = 2$ (hældningkoefficienten). Denne talværdi sættes lig med den afledede, dvs.

$$f'(x) = 2$$

Man har en ligning. Løses den ligning fås koordinaterne til røringspunkterne P og Q.

$$4x^3 - 12x + 10 = 2$$

I CAS løses ligningen:

$f'(x) = 2$

$$4x^3 - 12x + 10 = 2$$

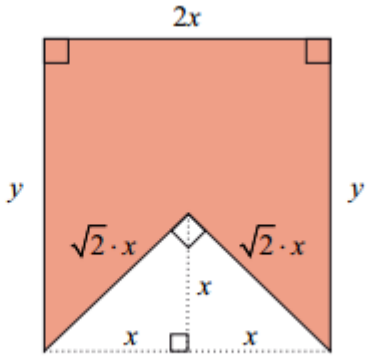
solve for x →

$$[[x = -2], [x = 1], [x = 1]]$$

Dvs. da $x = 1$ allerede eksisterer i punktet P, er førstekoordinaten til punktet Q nemlig $x = -2$.

(overbevis dig om at det passer).

Opgave 13



Enden af et stykke træ har form som et rektangel med sidelængderne y og $2x$.
En kile, hvor enden har form som en retvinklet og ligebenet trekant, skæres ud af træstykket som vist på figuren.

Det oplyses, at det tilbageværende tværsnit har omkredsen 50.

a) Bestem y udtrykt ved x, og gør rede for, at arealet af det tilbageværende tværsnit som funktion af x kan beskrives ved

$$A(x) = 50x - \left(3 + 2\sqrt{2}\right) \cdot x^2.$$

b) Bestem x, så det tilbageværende tværsnitsareal bliver størst muligt, når $0 < x < 8$.

a) Da der er skåret en kile ud af figuren, har man omkredsen som er:

$$O_{rektangel} = 2x + y + 2x + y$$

Men eftersom man har fået skåret en kile ud, må formlen være:

$$O = 2x + 2y + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x$$

Det vides endvidere, at den resterende omkreds er 50. Denne indsættes i ovenstående formel og derfra isoleres y.

$$50 = 2x + 2y + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x \Leftrightarrow 2y = 50 - 2x - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x \Leftrightarrow y = \frac{50 - 2x - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot x}{2}$$
$$= 25 - x - \sqrt{2} \cdot x$$

Arealet af rektanglet er pr. definition $A = l \cdot b$, dvs. i dette tilfælde er det

$$A = 2x \cdot y$$

Arealet af den ligebenet trekant er:

$$A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x$$

Men disse eksisterer der to af, så arealet er $A = x^2$, dette fratrækkes arealet af rektanglet, dvs.

$$A = 2x \cdot y - x^2$$

Indsættes $y = 25 - x - \sqrt{2} \cdot x$ i formlen er:

$$A = 2x \cdot \left(25 - x - \sqrt{2} \cdot x\right) - x^2$$

Fortsættes næste side

Eftersom man skal argumentere for, at formlen i opgaven, så skal man omskrive lidt i sit udtryk. Man har:

$$\begin{aligned} A(x) &= 2x \cdot \left(25 - x - \sqrt{2} \cdot x\right) - x^2 \\ &= 50x - 2x^2 - 2x \cdot \sqrt{2} \cdot x - x^2 \\ &= 50x - 3x^2 - 2x^2 \cdot \sqrt{2} \\ &= 50x - x^2 \cdot \left(3 + 2 \cdot \sqrt{2}\right) \\ &= 50x - \left(3 + 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot x^2 \end{aligned}$$

Dermed er $A(x)$ altså udtryk på den ønskede form.

b) Nu skal $A(x)$ differentieres.

$$A'(x) = 50 - \left(3 + 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot 2x$$

Dernæst sættes $A'(x) = 0$, så man har ligningen:

$$50 - \left(3 + 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot 2x = 0 \Leftrightarrow \left(3 + 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot 2x = 50 \Leftrightarrow x = \frac{50}{\left(3 + 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot 2} = 4.289$$

Dermed har man den ønskede x-værdi i intervallet $0 < x < 8$

Dernæst skal man bekræfte, at dette er et maksimum, så den dobbelte afledede tages.

$$A''(x) = -\left(3 + 2 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot 2 = -6 - 4 \cdot \sqrt{2} \approx -11.657$$

Eftersom $-11.657 < 0$ er der tale om et lokalt maksimum og dermed må man have, at $x = 4.289$ giver det største tværsnitareal.