kMatematik A STX 18. maj 2011
Vejledende løsning
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

Givet ligningen
$x^2 + x - 12 = 0$
Vi løser den via diskriminanten
$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49 \quad d > 0.$

Vi bestemmer x.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 7}{2} = \begin{cases} 3 \\ -4 \end{cases}$$

Dermed er løsningerne
$x = -4 \vee x = 3$

Opgave 2

Givet to vektorer
$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ t+1 \end{bmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{bmatrix} t-1 \\ 3 \end{bmatrix}$ vi undersøger den værdi af t, der gør at vektorerne er ortognonale, dvs vinkelrette.

$\vec{a} \perp \vec{b} = 0$, vi har:

$$2 \cdot (t-1) + (t+1) \cdot 3 = 0 \Leftrightarrow 2t - 2 + 3t + 3 = 0 \Leftrightarrow 5t + 1 = 0 \Leftrightarrow 5t = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{5}$$

Dermed er $t = -\frac{1}{5}$ den værdi der gør, at vektorerne er ortogonale.

Opgave 3

Givet modellen.
Tallet 23 fortæller, at ved første observation var der 23 bananfluer i populationen, hvorved dette steg hver dag med 38.6%

$a = 1 + r$ vi har $a = 1.386$, så $r = (1.386 - 1) \cdot 100\,\% = 38.6\,\%$

Opgave 4

Givet differentialligningen
$$\frac{dy}{dx} = y + x$$

Og funktionen
$f(x) = e^x - x - 1$

Vi undersøger om f løser differentialligningen. Her er $y = f(x)$ og $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, så

$f'(x) = e^x - 1$
Vi indsætter hele pivtøjet i differentialligningen.
$e^x - 1 = e^x - x - 1 + x \Leftrightarrow$
$e^x - 1 = e^x - 1$

Da begge udsagn er sande, så løser f differentialligningen.

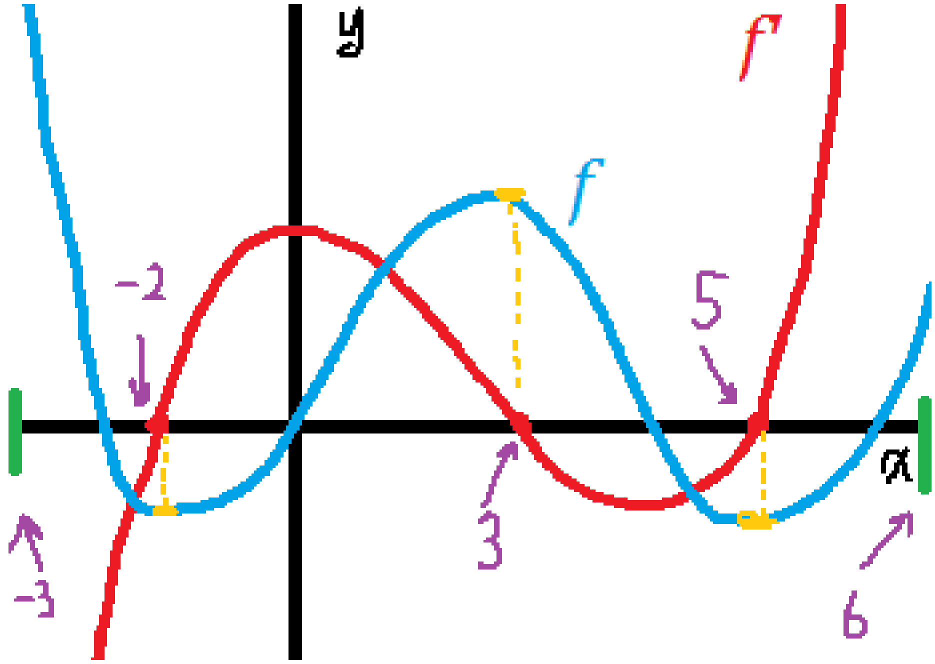
Opgave 5

Givet funktionen
$f(x) = 2x + \frac{1}{x}$, her er $x > 0$, vi har punktet $P = (1; 3)$ og vi søger en stamfunktion til $f(x)$
$F(x) = \int 2x + \frac{1}{x}\,dx = x^2 + \ln(x) + k,$

Vi bestemmer tallet k,
$3 = 1^2 + \ln(1) + k \Leftrightarrow 3 = 1 + 0 + k \Leftrightarrow k = 2$, så stamfunktionen der løber igennem punktet P er
$F(x) = x^2 + \ln(x) + 2$

Opgave 6

Vi kan se grafen for $f'(x)$, og hver gang den skærer førsteaksen, dvs. $f'(x) = 0$ har vi enten et maksimum eller minimum for $f(x)$. Vi ser den skærer tre steder, så $f(x)$ er et fjerdegradspolynomium. Funktionen $f(x)$ må være aftagende eftersom $f'(x)$ ligger under førsteaksen i intervallet $[-3;-2]$, dermed må $x = -2$ være et minimum samt $x = 5$ hvor $x = 3$ er et maksimum. Vi kan altså nu konkludere, at $f(x)$ er:
aftagende i intervallet $[-3;-2]$ og $[3; 5]$ samt voksende i intervallet $[-2; 3]$ og $[5; 6]$.Vi tegner graferne, så man får sig et bedre overblik.



De gule prikker er hhv. minimum, maksimum og minimum
Den røde graf er $f'(x)$
Den blå graf er $f(x)$
De grønne linjer angiver intervallet $[-3; 6]$ <- lukket kantet parenteser!

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) : Vi går i gang med at definerer tabellen...
$P1 := [1.7, 2, 2.9, 4.1, 5.6, 6.3, 7, 8, 10, 13.9]$:
$P2 := [42, 21, 10.3, 6.8, 5.1, 4.8, 4.4, 4.1, 3.7, 3.2]$:

Spgm. a

Vi bruger potensregression.
$f(x) := PowReg(P1, P2, x)$:
$f(x)$

$$\frac{46.0955175760221}{x^{1.15357277252544}} \tag{7.1.1}$$

Dermed blev tallene *a* og *b* bestemt samt en forskrift som man kan se ovenfor.

Spgm. b

$f(x)$ er det gennemsnitlige fald, så vi skal løse en ligning for faldhøjden.
$f(x) = 15$

$$\frac{46.0955175760221}{x^{1.15357277252544}} = 15 \tag{7.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 2.646418878]] \tag{7.2.2}$$

Så faldhøjden er 2.64 m, når det gennemsnitlige fald er 15.

Spgm. c

Vi bruger formlen

$r_y = \left(\left(1 + r_x\right)^a - 1\right) \cdot 100\ \%$, her er

$r_x = 50\ \%$ og $a = -1.15357277252544$, så

$$r_y = \left(\left(1 + \frac{50}{100}\right)^{-1.15357277252544} - 1\right) \cdot 100$$

$$r_y = -37.35795631 \tag{7.3.1}$$

Det gennemsnitlige antal fald falder med 37.35% når faldhøjden øges med 50%.

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :

oplysningerne defineres i en matrix.

$obs := \langle\langle 0..10, 10..20, 20..30, 30..40, 40..50, 50..60 | 10, 23, 16, 21, 10, 9\rangle\rangle$:

Spgm. a

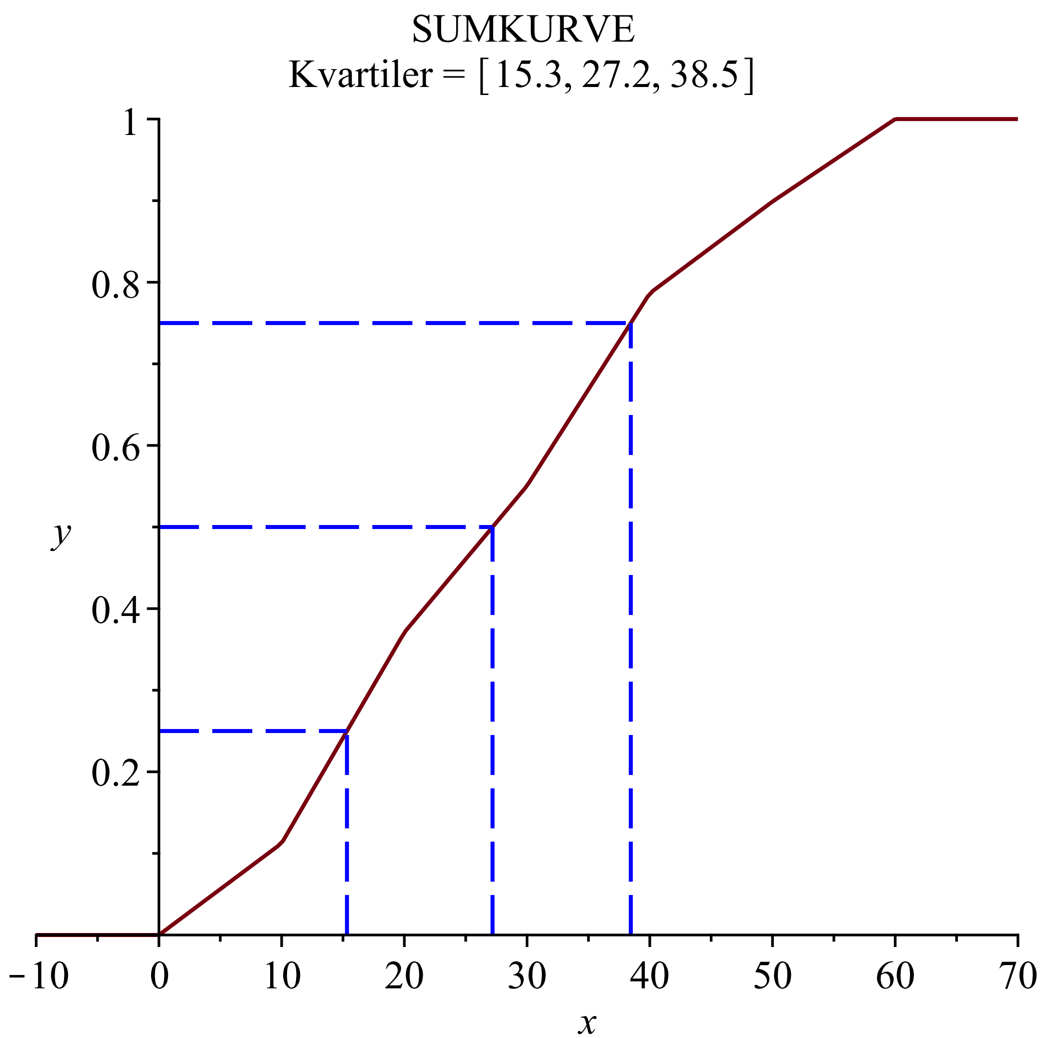
Vi laver en tabel over oplysningerne.

frekvensTabel(*obs*)

observation	hyppighed	frekvens	kumuleret
0 .. 10	10	11.24	11.2
10 .. 20	23	25.84	37.1
20 .. 30	16	17.98	55.1
30 .. 40	21	23.6	78.7
40 .. 50	10	11.24	89.9
50 .. 60	9	10.11	100

Vi bestemmer nu sumkurven (NB: Kvartilsættet bliver også automatisk bestemt).

plotSumkurve(*obs*)



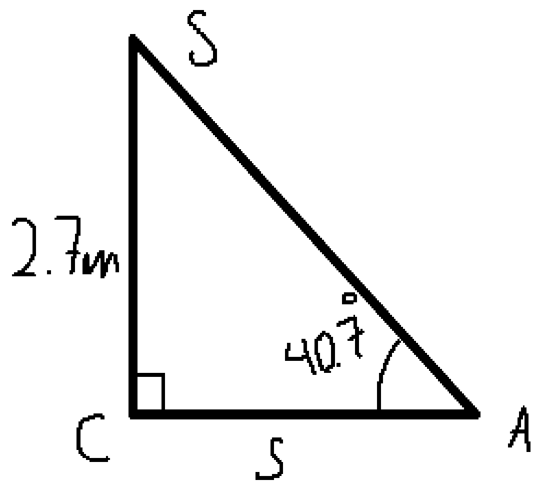
Dermed har vi fået tegnet en sumkurve over fordelingen af økobenzin på en tankstation samt kvartilsættet [15.3 *ltr*, 27.2 *ltr*, 38.5 *ltr*]

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vi bestemmer *s*. Trekanten tegnes.



Så vi bestemmer vinkel S, dvs.

$\angle S = 180^o - \angle A - \angle C = 180^o - 40.7^o - 90^o = 49.3^o$

Vi bruger formlen

$Tan(S) = \dfrac{s}{a} \Leftrightarrow s = a \cdot Tan(S)$, så vi har:

$s = 2.7 \cdot Tan(49.3)$

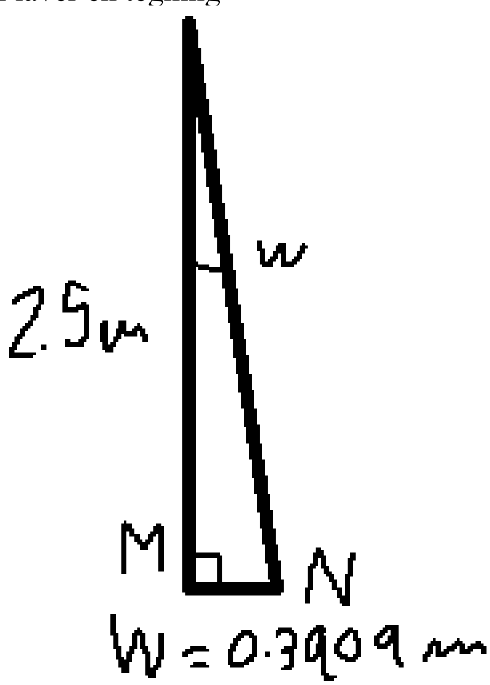
$$s = 3.139039591 \tag{9.1.1}$$

Som altså er længden s, målt i meter.

Linjestykket der er modstående til vinklen w betegnes W, så vi har

$W = 3.53 - s = 3.53 - 3.139039591 = 0.390960409$

Vi laver en tegning



Vi bestemmer vinkel w, så $Tan(w) = \dfrac{W}{n}$ bruges.

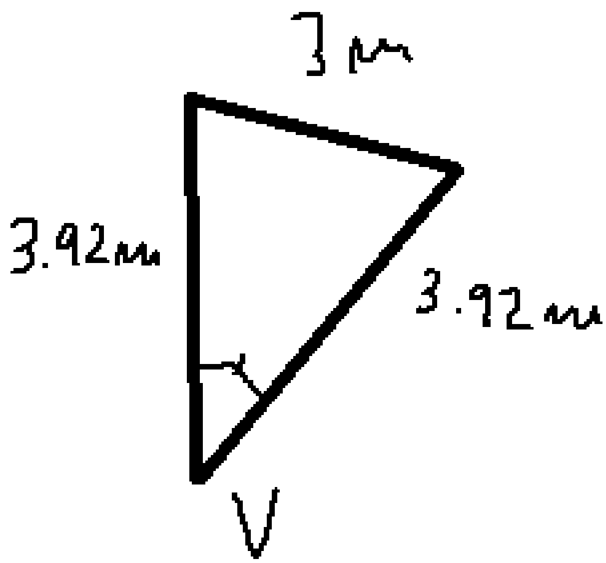
$w = invTan\left(\dfrac{0.390960409}{2.5}\right)$

$$w = 8.888162803 \quad \textbf{(9.1.2)}$$

Så vinkel w er $w = 8.888162803^o$

Spgm. b

Vi laver en tegning af en trekant.



Vi bruger cosinusrelationerne

$v = invCos\left(\frac{2 \cdot 3.92^2 - 3^2}{2 \cdot 3.92^2}\right)$

$$v = 44.99623300 \quad \textbf{(9.2.1)}$$

Vi bruger nu ½appelsinformel.

$T_{trekant} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot x \cdot Sin(v)$

Her er $x = 3.92$, så

$T_{trekant} = \frac{1}{2} \cdot 3.92^2 \cdot Sin(44.99623300)$

$$T_{trekant} = 5.432485621 \quad \textbf{(9.2.2)}$$

Eftersom der er 8 trekanter, så ganges resultatet med 8.

$T = 8 \cdot 5.432485621$

$$T = 43.45988497 \quad \textbf{(9.2.3)}$$

Så arealet af grundfladen er 43.45988497 m^2

Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :
local D :

Spgm. a

Afstanden fra T til α bestemmes ved distformlen.

$dist(T, \alpha) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ vi indsætter vores oplysninger:

$$dist(T, \alpha) = \frac{|1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 20 + 20|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2}}$$

$$dist(T, \alpha) = 8\sqrt{10} \quad \textbf{(10.1.1)}$$

$evalf[5]((\textbf{10.1.1}))$

$$dist(T, \alpha) = 25.298 \quad \textbf{(10.1.2)}$$

Afstanden fra T til planen er 25.298m

Spgm. b

Vi bestemmer vinken mellem planen α og TDC.

$\overrightarrow{n_\alpha} := \langle 1, 0, 3 \rangle :$

$T := [0, 0, 20] ::$ D $:= [-20, -20, 0] ::$ $C := [-20, 20, 0] :$

$\overrightarrow{TD} := \langle D - T \rangle :: \overrightarrow{TC} := \langle C - T \rangle :$

Så vi laver et krydsprodukt for at få en normalvektor til sidefladen TDC, dvs.

$\overrightarrow{n_{TDC}} := \langle linalg[crossprod](\overrightarrow{TD}, \overrightarrow{TC}) \rangle$

$$\begin{bmatrix} 800 \\ 0 \\ -800 \end{bmatrix} \quad \textbf{(10.2.1)}$$

Dermed kan vi bruge normalvektoren for $\overrightarrow{n_\alpha}$. vi har

$v = 180 - vinkel(\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_{TDC}})$

$$v = 63.4349488 \quad \textbf{(10.2.2)}$$

Sådan fik vi den ønskede vinkel mellem planen α og sidefladen TDC

Spgm. c

Vi opstiller en parameterfremstilling og vælger T som et fast punkt. Vi opstiller vektoren $\overrightarrow{TF}$ som en retningsvektor til parameterfremstillingen.

$F := [20, 20, 0] :$

$\overrightarrow{TF} := \langle F - T \rangle$

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ -20 \end{bmatrix} \quad \textbf{(10.3.1)}$$

Vi får parameterfremstillingen:

$$l : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ -20 \end{bmatrix}$$

Vi bestemmer koordinatsættet til B ved at indsætte parameterfremstillingen i planen α

$20\,t + 3 \cdot (20 - 20\,t) + 20 = 0 \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 2]]$

Denne værdi indsættes i parameterfremstillingen og vi vil få det ønskede koordinatsæt:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ -20 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 40 \\ -20 \end{bmatrix} \quad \textbf{(10.3.2)}$$

Som er koordinatsættet til punktet B på planen α.

Opgave 11

restart :; *with*(*Gym*) :
Vi definerer funktionerne
$f(x) := 17 - x^2$:; $g(x) := 8$:

Spgm. a

Vi bestemmer skæringspunkterne for $f(x)$ og $g(x)$.
$f(x) = g(x)$

$$-x^2 + 17 = 8 \quad \textbf{(11.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = -3], [x = 3]] \quad \textbf{(11.1.2)}$$

Eftersom $f(x)$ skærer y-aksen i $y = 17$, og tallet $a < 0$, så ligger $f(x)$ over $g(x)$. Vi bestemmer arealet:

$M = \int_{-3}^{3} f(x) - g(x) \, dx$

$$M = 36 \quad \textbf{(11.1.3)}$$

Spgm. b

Vi betegner rumfanget med V og har at:

$V = \text{Pi} \cdot \int_{-3}^{3} f(x)^2 \, dx - \text{Pi} \cdot \int_{-3}^{3} g(x)^2 \, dx$

$$V = \frac{4176}{5} \pi \quad \textbf{(11.2.1)}$$

evalf[5]((**11.2.1**))

$$V = 2623.9 \quad \textbf{(11.2.2)}$$

Så volumen er $V = 2623.9$

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :
Den enorme lange model defineres.
$f(t) := 6.61 \cdot \sin(0.0167 \cdot t - 1.303) + 12.2$:
Intervallet er $0 \leq t \leq 365$

Spgm. a

Vi indsætter $t = 100$ i modellen

$f(100)$

$$14.57177923 \tag{12.1.1}$$

Længden af dagen i Anchorage Alaska er 14.571 timer, 100 dage efter 1. januar, dvs. 10 april 2011.

Spgm. b

Vi differentierer modellen og løser ligningen $f'(t) = 0$, dvs.

$intervalsolve(f'(t) = 0, t = 0..365)$

$$[172.0836124, 360.2029330] \tag{12.2.1}$$

Vi bruger den dobbelte afledede

$f''(172.0836124)$

$$-0.0018434629 \tag{12.2.2}$$

$f''(360.2029330)$

$$0.0018434629 \tag{12.2.3}$$

Så tidspunktet hvor døgnets længde er størst er 172 dage efter januar, dvs. 21 juni (som faktisk var sommersolhverv).

Spgm. c

Vi indsætter $t = 100$ i $f'(t)$.

$f'(100)$

$$0.1030361083 \tag{12.3.1}$$

Dvs. for hver dag der går efter d. 10 april, stiger dagslængden med 0.1030361083 timer, eller $0.1030361083 \cdot 60 = 6.1821665$ minutter.

Opgave 13

restart :; *with*(*Gym*) :

local I:

(Mange vil bøvle med I eftersom Maple bruger den i forbindelse med det imaginære tal i komplekse tal).

Spgm. a

Vi bestemmer væksthastigheden, når strømstyrken er 0.3 A

$0.4 \cdot I'(t) + 10 \cdot 0.3 = 9$

$$0.4\, \mathrm{D}(I)(t) + 3.0 = 9 \tag{13.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{isolate for D(I)(t)}}$

$$\mathrm{D}(I)(t) = 15.00000000 \tag{13.1.2}$$

Strømstyrkens væksthastighed er 15 A pr. sekund

Spgm. b

Vi bruger *dsolve*

$dsolve(\{0.4 \cdot I'(t) + 10 \cdot I(t) = 9, I(0) = 0\}, I(t))$

$$I(t) = \frac{9}{10} - \frac{9}{10}\, \mathrm{e}^{-25\, t} \tag{13.2.1}$$

Dermed har vi fået den ønskede forskrift.

Opgave 14

$restart :; with(Gym) :$
Vi definerer funktionen
$f(x) := (x-3)^2 :$

Spgm. a

Vi bestemmer ligningen for tangenten i punktet $P = (1, f(1))$,dvs.:
$y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$

$$y = -4x + 8 \tag{14.1.1}$$

Som er den ønskede tangentligning.

Spgm. b

Vi bruger tangentformlen.
$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ vi har, at
$y = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$

$$y = (2a-6)(x-a) + (a-3)^2 \tag{14.2.1}$$

For punktet Q har vi, at $x = 0$, dvs.
$y = (2a-6)(0-a) + (a-3)^2 \overset{\text{simplify}}{=} y = -a^2 + 9$
For punktet R har vi, at $y = 0$, dvs.
$0 = (2a-6)(x-a) + (a-3)^2 \xrightarrow{\text{isolate for x}} x = \frac{(a-3)^2}{-2a+6} + a \overset{\text{simplify}}{=} x = \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}$
Så koordinatsættene til Q og R, under antagelse af, at $0 \leq a < 3$, så
$Q = (0, -a^2 + 9)$ og $R = \left(\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}, 0\right)$.

Spgm. c

Vi definerer arealfunktionen. Spillereglerne er de samme; $0 \leq a < 3$
$T(a) := \frac{1}{4} \cdot (9 - a^2) \cdot (a+3)$

$$a \rightarrow \left(-\frac{1}{4}a^2 + \frac{9}{4}\right)(a+3) \tag{14.3.1}$$

Vi bestemmer den værdi af a der gør, at arealet bliver størst muligt i trekanten OQR.
$T'(a) = 0$

$$-\frac{1}{2}a(a+3) - \frac{1}{4}a^2 + \frac{9}{4} = 0 \tag{14.3.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for a}}$

$$[[a = -3], [a = 1]] \tag{14.3.3}$$

Vi husker på spillereglerne. Vi tjekker vha. den dobbelte afledede, at $a = 1$ er den værdi, der giver det største areal.
$T''(1)$

$$-3 \tag{14.3.4}$$

Da outputtet er negativt, er $a = 1$ den søgte værdi.

Matematik A STX 9. december 2011
Vejledende løsning
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

Givet udtrykket

$(a-b)^2+2\cdot a\cdot(a+b)-b^2$

Vi benytter 2. kvadratsætning på første led:

$=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b+2\cdot a^2+2\cdot a\cdot b-b^2$

$=3\cdot a^2$

Vi har hermed reduceret udtrykket.

Opgave 2

Givet to vektorer

$\vec{a}=\begin{bmatrix}2\\t\end{bmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}$ vi undersøger den værdi af t, der gør at vektorerne er ortognonale, dvs vinkelrette.

$\vec{a}\perp\vec{b}=0$, vi har: $2\cdot(-3)+t\cdot 4=0 \Leftrightarrow -6+4t=0 \Leftrightarrow 4t=6 \Leftrightarrow t=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$

Dermed er $t=\frac{3}{2}$ den værdi der gør, at vektorerne er ortogonale.

Opgave 3

Givet ligningen for kuglen

$x^2-2x+y^2+6y+z^2+2z+2=0$

Vi bestemmer centrum og radius.

$(x-1)^2-1+(y+3)^2-9+(z+1)^2-1+2=0$

$(x-1)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=0+1+9+1-2$

$(x-1)^2+(y+3)^2+(z+1)^2=9$

Koordinatsættet til centrum er:

$C=(1,-3,-1)$ og radius er $r=3$.

Opgave 4

Den eksponentielle funktion er givet samt punkterne

$f(3)=1$ og $f(6)=8$, så vi har to ligninger:

$$\begin{matrix} 8 = b \cdot a^6 \\ 1 = b \cdot a^3 \end{matrix} \Leftrightarrow \frac{8}{1} = \frac{b}{b} \cdot \frac{a^6}{a^3} \Leftrightarrow 8 = a^{6-3} \Leftrightarrow 8 = a^3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} = 2$$

Vi indsætter $a = 2$ i en af ligningerne for b.

$1 = b \cdot 2^3 \Leftrightarrow \frac{1}{2^3} = b \Leftrightarrow b = \frac{1}{8}$ så forskriften er;

$$f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^2 = \frac{x^2}{8}$$

Opgave 5

Parablen er givet ved

$y = x^2 - 2x - 8$ og vi bestemmer skæringspunkterne med førsteaksen. Vi kan undersøge, for hvilke to tals lagt sammen giver -2 og ganget sammen giver -8, det gør tallene 2 og -4, ($2 - 4 = -2$ som er b værdiens konstant; $2 \cdot (-4) = -8$ som er c værdiens konstant), altså er rødderne

$x = -2 \lor x = 4$ og dermed kan vi kalde punkterne P og Q som skæring med førsteaksen, vi har koordiantsættene:

$P = (-2; 0)$ og $Q = (4; 0)$.

Diskriminantmetoden:

$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36,\ d > 0$ så vi har

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

Opgave 6

Volumeformlen bruges:

$V = x \cdot x \cdot h$ hvor $V = 9$, så vi har:

$$9 = x^2 \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{9}{x^2}$$

Vi bestemmer arealet. Arealet af de to sider er

$A_{sider} = h \cdot x$ og arealet af toppen er $A_{top} = x \cdot x$, så vi har:

$A_{bur} = 2 \cdot h \cdot x + x \cdot x = 2 \cdot x \cdot h + x^2 = 2 \cdot x \cdot \left(\frac{9}{x^2}\right) + x^2 = \frac{2 \cdot x \cdot 9}{x^2} + x^2 = \frac{18}{x} + x^2$ som er det ønskede.

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :

local D :

Spgm. a

Vi bestemmer længden $|BC|$ via cosinusrelationerne.

$AB := 7$:; $AC := 10$: $\angle A := 30$:

$BC := \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot Cos(\angle A)}$

$$5.268438421 \tag{21.1.1}$$

Dermed er længden $|BC|$ bestemt.

Spgm. b

Vi bruger sinusrelationerne for at bestemme vinkel C.

$BD := BC$:

$\frac{Sin(\angle A)}{BD} = \frac{Sin(\mathrm{D})}{AB}$

$$0.09490478203 = \frac{1}{7} \sin(0.01745329252\ \mathrm{D}) \tag{21.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for D}}$

$$[[\mathrm{D} = 41.63121165]] \tag{21.2.2}$$

Så vinkel D er 41.631^o, men det passer ikke med figuren, så tallet trækkes fra 180. Vi får:

$\angle \mathrm{D} := 180 - 41.63121165$

$$138.3687884 \tag{21.2.3}$$

Vi bestemmer vinkel B for endelig at kunne bestemme arealet.

$\angle B := 180 - \angle A - \angle \mathrm{D}$

$$11.6312116 \tag{21.2.4}$$

Vi bruger nu ½appelsinformel:

$T = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot Sin(\angle B)$

$$T = 3.717622393 \tag{21.2.5}$$

Arealet er 3.72 i trekanten ABD.

Opgave 8

$restart$:; $with(Gym)$:

Tabellens tal defineres.

$P1 := [20, 40, 60, 80]$:

$P2 := [0.035, 0.063, 0.085, 0.1]$:

Spgm. a

Vi laver potensregression.

$f(x) := PowReg(P1, P2, x)$:

$f(x)$

$$0.00359564887502772\ x^{0.766929585892175} \tag{22.1.1}$$

Hvor $x \in [0; 90]$.

Dermed blev tallene a og b bestemt, som kan ses i forskriften.

$a = 0.766929585892175$

$b = 0.00359564887502772$

Spgm. b

Vi indsætter $x = 45^o$ i funktionsudtrykket:

$f(45)$

$$0.0666307748428678 \quad (22.2.1)$$

Så kraftpåvirkningen i korsbåndet er 0.0666307748428678 N

Spgm. c

Vi har $r_x = 30\ \%$, så vi bestemmer r_y.

$$r_y = \left(\left(1+\frac{30}{100}\right)^{0.766929585892175} - 1\right)\cdot 100$$

$$r_y = 22.28875630 \quad (22.3.1)$$

Så når vinkelen øges med 30 %, så øges krafpåvirkningen i korsbåndet med 22.289 %.

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Alle punkter defineres.

$A := [400, 0, 200]$:; $B := [280, 280, 200]$:; $C := [0, 400, 200]$:; $T := [0, 0, 520]$:

Spgm. a

Vi bestemmer ligningen for planen α med tagfladen ABT. Vi opstiller to vektorer:

$\overrightarrow{AB} := \langle B - A\rangle$:; $\overrightarrow{AT} := \langle T - A\rangle$:

Vi laver krydsprodukt:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AT}$

$$\begin{bmatrix} 89600 \\ 38400 \\ 112000 \end{bmatrix} \quad (23.1.1)$$

Vi benytter os af største fælles divisor eftersom tallene er enorme at arbejde med, vi har:

$gcd(89600, 38400)$; $gcd(38400, 112000)$

$$12800$$

$$3200 \quad (23.1.2)$$

Største fælles divisor er derfor 3200. Vi vælger A som fast punkt, og vi har:

$$\frac{89600}{3200}\cdot(x-400) + \frac{38400}{3200}\cdot(y-0) + \frac{112000}{3200}\cdot(z-200) = 0$$

$$28\,x - 18200 + 12\,y + 35\,z = 0 \quad (23.1.3)$$

Som er vores ønskede plan.

Spgm. b

Vi bestemmer afstanden fra *Origo* til planen β ved distformlen. .

$dist(\text{O}, \beta) = \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ vi indsætter vores oplysninger:

$$dist(\text{O}, \beta) = \frac{|12\cdot 0 + 28\cdot 0 + 35\cdot 0 - 18200|}{\sqrt{12^2 + 28^2 + 35^2}}$$

$$dist(\text{O}, \beta) = \frac{18200}{2153}\sqrt{2153} \quad (23.2.1)$$

evalf[5]((**23.2.1**))

$$dist(O, \beta) = 392.23 \tag{23.2.2}$$

Afstanden fra T til planen er 392.23
Der er ikke angivet enheder.

Spgm. c

Vi bestemmer vinklen mellem planerne udelukkende via deres normalvektorer.

Vi har for planen α
$\overrightarrow{n_\alpha} := \langle 28, 12, 35 \rangle$:
Vi har for planen β
$\overrightarrow{n_\beta} := \langle 12, 28, 35 \rangle$:
Vi bestemmer vinklen (NB: Den skal være stump).

$$v = 180 - invCos\left(\frac{\overrightarrow{n_\alpha}.\overrightarrow{n_\beta}}{len(\overrightarrow{n_\alpha}) \cdot len(\overrightarrow{n_\beta})}\right)$$

$$v = 151.7748747 \tag{23.3.1}$$

Så vinklen mellem planerne α og β er $v = 151.7748747^o$.

Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :
Funktionen defineres.
$f(x) := x^2 - 50 \cdot \ln(x)$:
Her er $x > 0$ (overvej hvorfor).

Spgm. a

Ligningen for tangenten til grafen i punktet P bestemmes.
$f'(x)$

$$2x - \frac{50}{x} \tag{24.1.1}$$

Vi indsætter $x = 3$ fra punktet P.
$f(3)$

$$9 - 50 \ln(3) \tag{24.1.2}$$

$f'(3)$

$$-\frac{32}{3} \tag{24.1.3}$$

Vi har tangentligningen $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ dvs.

$y = -\frac{32}{3} \cdot (x - 3) + 9 - 50 \ln(3)$

$$y = -\frac{32}{3}x + 41 - 50 \ln(3) \tag{24.1.4}$$

Man kunne også skrive

$y = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$

$$y = -\frac{32}{3}x + 41 - 50 \ln(3) \tag{24.1.5}$$

Approksimeret er den
evalf[10]((**24.1.5**))

$$y = -10.66666667\,x - 13.93061445 \tag{24.1.6}$$

Som er den ønskede tangentligning.

Spgm. b

Vi bestemmer monotoniforholdene for $f(x)$. Vi har ligningen nedenfor, som løses for x.
$f'(x) = 0$

$$2x - \frac{50}{x} = 0 \tag{24.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 5], [x = -5]] \tag{24.2.2}$$

Vi husker, at $x > 0$.

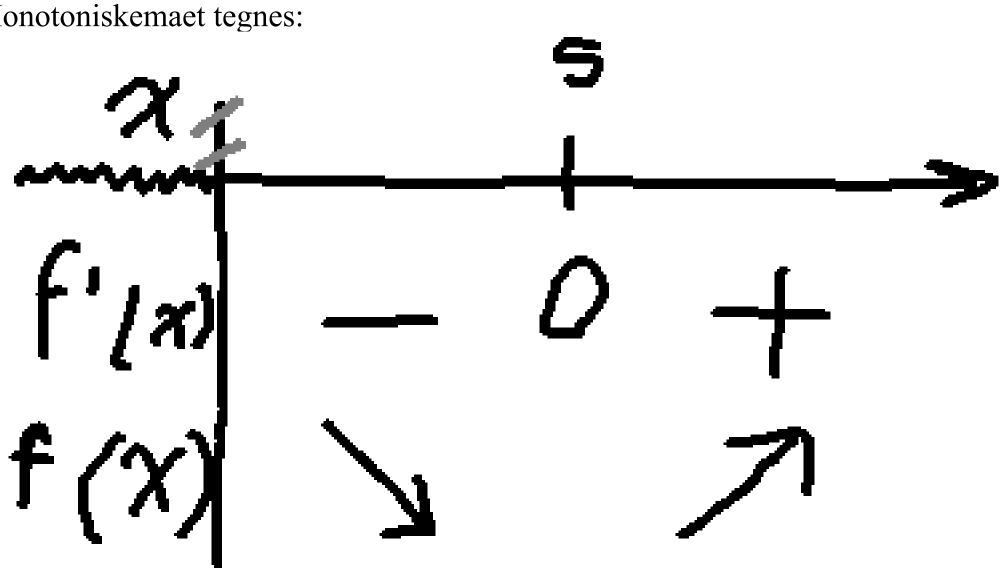
Dernæst har vi to metoder for bestemmelse af monotoniforholdene.
Metode 1:
Vi finder tal der er større og mindre end $x = 5$, så eksempelvis 4 og 6 kan bruges.
$f'(4)$

$$-\frac{9}{2} \tag{24.2.3}$$

$f'(6)$

$$\frac{11}{3} \tag{24.2.4}$$

Monotoniskemaet tegnes:



Dermed er konklusionen, at
$f(x)$ er aftagende i intervallet $]0; 5]$ og voksende i intervallet $[5; \infty[$.

Metode 2:
Vi bruger $x = 5$ til at undersøge ekstrenum. Vi benytter den dobbelte afledede.
$f''(5)$

$$4 \tag{24.2.5}$$

Da outputtet er positivt vil vi have et minimum. Dermed er konklusionen, at
$f(x)$ er aftagende i intervallet $]0; 5]$ og voksende i intervallet $[5; \infty[$.

Spgm. c

Vi skal bestemme en tangent til grafen for $f(x)$. Vi bruger tangentligningen fra spørgsmål a.

$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$

Vi sætter nu linjen $y = f'(x_0)\cdot x$ lig med tangenten og får:

$f'(x_0)\cdot x = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$

$$\left(2x_0 - \frac{50}{x_0}\right)x = \left(2x_0 - \frac{50}{x_0}\right)(x - x_0) + x_0^2 - 50\ln(x_0) \qquad \textbf{(24.3.1)}$$

Vi har en ligning.

$\left(2x_0 - \frac{50}{x_0}\right)x = \left(2x_0 - \frac{50}{x_0}\right)(x - x_0) + x_0^2 - 50\ln(x_0) \Leftrightarrow \left(2x_0 - \frac{50}{x_0}\right)\cdot x = \left(2x_0 - \frac{50}{x_0}\right)\cdot x - \left(2x_0 - \frac{50}{x_0}\right)\cdot x_0 + x_0^2 - 50\ln(x_0) \Leftrightarrow 2x\,x_0 - \frac{50\,x}{x_0} = 2x\,x_0 - \frac{50\,x}{x_0} - 2x_0^2 + 50 + x_0^2 - 50\ln(x_0) \Leftrightarrow 0 = -x_0^2 + 50 - 50\ln(x_0)$

Vi løser nu ligningen for x_0, dvs.$0 = -x_0^2 + 50 - 50\ln(x_0) \xrightarrow{\text{solve for x[0]}}$

$\left[\left[x_0 = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\operatorname{LambertW}\left(\frac{1}{25}\mathrm{e}^2\right) + 1}\right]\right]$

$evalf[5](\%)$

$$[[x_0 = 2.4182]] \qquad \textbf{(24.3.2)}$$

Så $x_0 = 2.4182$ er den søgte værdi. Opgave slut.

Vi indsætter denne værdi i $y = f'(x_0)\cdot x$, dvs.

$f'(2.4182)\cdot x$

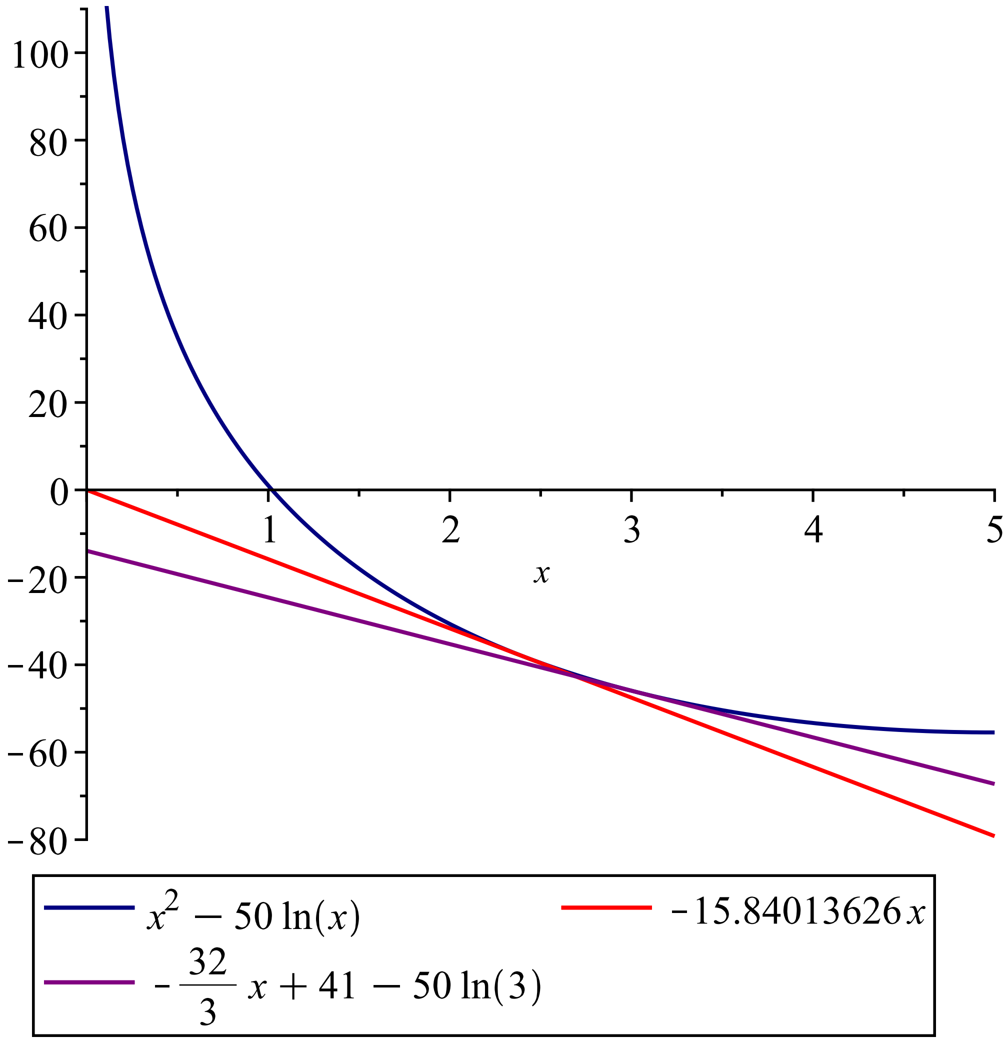
$$-15.84013626\,x \qquad \textbf{(24.3.3)}$$

Vi definerer ovenstående som en funktion $g(x)$ samt tangenten $h(x)$, dvs.

$g(x) := f'(2.4182)\cdot x :; h(x) := -\frac{32}{3}\,x + 41 - 50\ln(3) :$

Vi plotter funktionen $f(x)$ og $g(x)$.

plot([*f*(*x*), *g*(*x*), *h*(*x*)], *x* = 0 ..5, *legend* = [*f*(*x*), *g*(*x*), *h*(*x*)], *color* = ["Navy", "Red", "Purple"])



Dette var ikke en del af opgaven, men mere en hjælp til at se det grafisk for sig, som læser.

Opgave 11

restart :; *with*(*Gym*) :
Givet differentialligningen
$C'(t) = 0.4 - 0.02 \cdot C(t)$

Spgm. a

Vi bruger den fuldstændige løsning:

$y(t) = \dfrac{b}{a} + c \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot t}$

Her er $b = 0.4 = \dfrac{2}{5}$ og $a = 0.02 = \dfrac{1}{50}$, så

$y(t) = \dfrac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{50}} + c \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{5} \cdot t}$

$$y(t) = 20 + c\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}\, t} \tag{25.1.1}$$

Vi bruger punktet $C(0)=0$ og har:

$0=20+c\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}\cdot 0} \xrightarrow{\text{solve for c}} [[c=-20]]$

Så forskriften er

$C(t)=20-20\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}\cdot t}$

Alternativ: Vi bruger *dsolve*

$dsolve(\{C'(t)=0.4-0.02\cdot C(t), C(0)=0\}, C(t))$

$$C(t)=20-20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t} \tag{25.1.2}$$

Hvilket er det samme.

Spgm. b

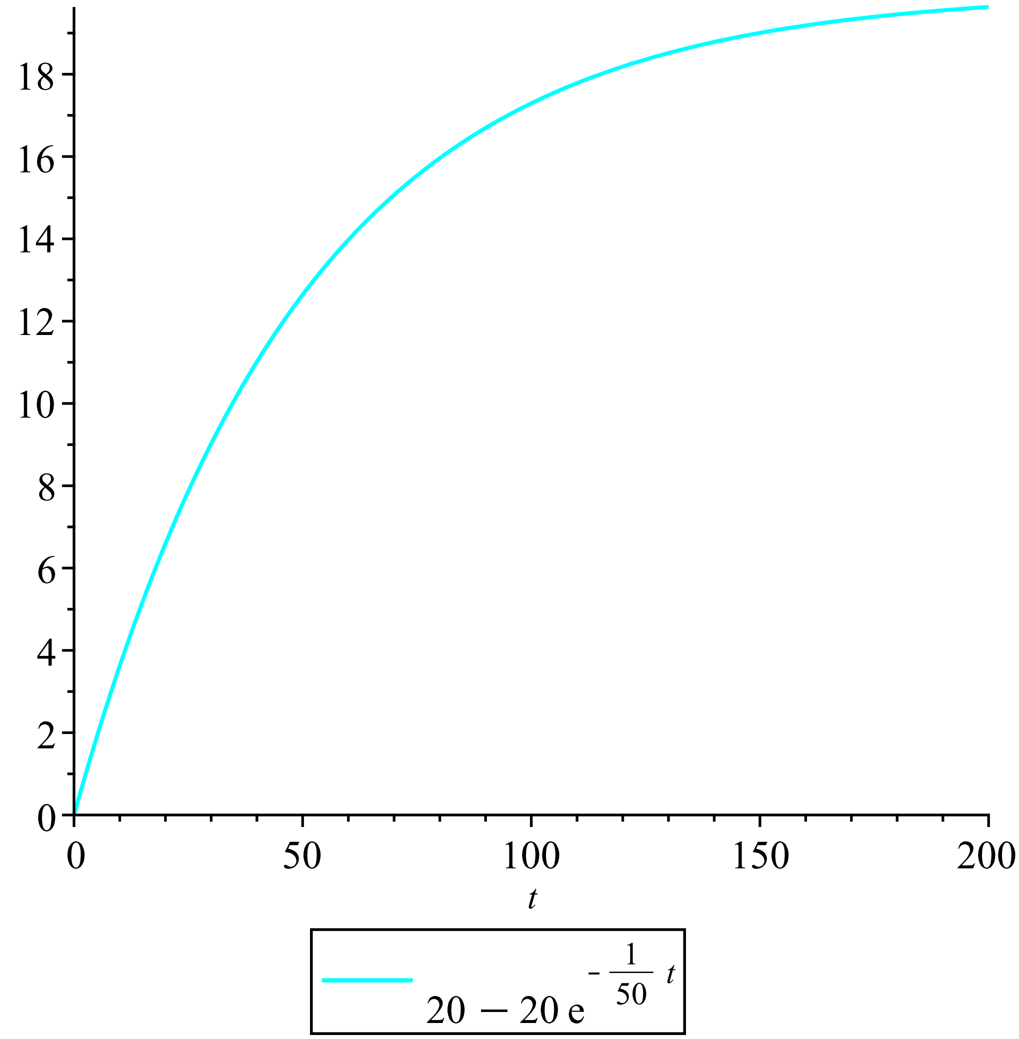
Vi definerer forskriften

$C(t) := 20-20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t}$

$$t\to 20-20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t} \tag{25.2.1}$$

Grafen tegnes.

$plot(C(t), t=0..200, legend=[C(t)], color=[\text{"Cyan"}])$



Vi bestemmer nu det tidspunkt, hvor der er 10 *ppm* ved at løse ligningen $C(t) = 10$, dvs.

$C(t) = 10$

$$20 - 20\,e^{-\frac{1}{50}t} = 10 \quad \textbf{(25.2.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 50\ln(2)]] \quad \textbf{(25.2.3)}$$

$evalf[5](\textbf{(25.2.3)})$

$$[[t = 34.658]] \quad \textbf{(25.2.4)}$$

Dvs. efter 34.658 minutter er forureningen 10 *ppm*.

Spgm. c

Vi indsætter 15 i den afledede funktion af C, dvs.:

$C'(15)$

$$\frac{2}{5}\,e^{-\frac{3}{10}} \quad \textbf{(25.3.1)}$$

$evalf[5]((\mathbf{25.3.1}))$

$$0.29633 \tag{25.3.2}$$

Så efter 15 minutter stiger forureningen med 0.29633ppm pr. minut.

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :

Vi definerer funktionen $f(x)$

$f(x) := 3x + \frac{1}{x}$:

Her er $x > 0$

Spgm. a

Vi løser ligningen

$f(x) = 4$

$$3x + \frac{1}{x} = 4 \tag{26.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[[x = 1], \left[x = \frac{1}{3}\right]\right] \tag{26.1.2}$$

Vi bestemmer dernæst arealet af M, afgrænset af førstekoordinaterne ovenfor.

$M = \int_{\frac{1}{3}}^{1} f(x)\, dx$

$$M = \frac{4}{3} + \ln(3) \tag{26.1.3}$$

$evalf[5]((\mathbf{26.1.3}))$

$$M = 2.4319 \tag{26.1.4}$$

Arealet af M er 2.4319

Spgm. b

Vi betegner rumfanget med V. Vi roterer først $y = 4$, så

$V_y = \mathrm{Pi} \cdot \int_{\frac{1}{3}}^{1} 4^2\, dx$

$$V_y = \frac{32}{3}\pi \tag{26.2.1}$$

Vi roterer dernæst $f(x)$.

$V_f = \mathrm{Pi} \cdot \int_{\frac{1}{3}}^{1} f(x)^2\, dx$

$$V_f = \frac{80}{9}\pi \tag{26.2.2}$$

Så:

$V = \frac{32}{3}\pi - \frac{80}{9}\pi$

$$V = \frac{16}{9}\pi \quad \textbf{(26.2.3)}$$

evalf[5](**(26.2.3)**)

$$V = 5.5851 \quad \textbf{(26.2.4)}$$

Som er det ønskede rumfang.

Opgave 13

restart :; *with*(*Gym*) :

Givet den lange funktion

$f(x) := 211.4885 - 10.4801 \cdot (\exp(0.0329 \cdot x) + \exp(-0.0329 \cdot x))$:

Spgm. a

Vi bestemmer bredden af buen ved jordoverfladen.

$f(x) = 0$

$$211.4885 - 10.4801\, e^{0.0329\, x} - 10.4801\, e^{-0.0329\, x} = 0 \quad \textbf{(27.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 91.25312187], [x = -91.25312187]] \quad \textbf{(27.1.2)}$$

Rødderne lægges numerisk sammen:

$Afstand = 91.25312187 + |-91.25312187|$

$$Afstand = 182.5062437 \quad \textbf{(27.1.3)}$$

Afstanden er 182.5 m fra den ene side til den anden side.

Spgm. b

Vi bestemmer buelængden. Vi har:

$l = \int_{-91.25312187}^{91.25312187} \sqrt{f'(x)^2 + 1}\, \mathrm{d}x$

$$l = 451.2554737 \quad \textbf{(27.2.1)}$$

Buelængden er $l = 451.255$ m lang.

Opgave 14

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vi har punktet $P = (0; 3)$ og vi har proportionalitetskonstanten på 0.17

$f(x)$ har en hældningskoefficient der er proportional med $f(x)$, så må differentialligningen være $f'(x) = k \cdot f(x)$ hvor $k = 0.17$, så vi har $f'(x) = 0.17 \cdot f(x)$ som er den ønskede differentialligning. Vi bestemmer hældningskoefficienten og da $f(x) = y$, så bruger vi y-koordinaten fra punktet P:

$f'(x) = 0.17 \cdot 3$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = 0.51 \quad \textbf{(28.1.1)}$$

Vi har, at hældningskoefficienten er $a = 0.51$