Ortvay 1986

1. Légpárnás asztalon két egyforma homogén korong halad egyenlő nagyságú sebességgel egymással szemben. Az ütközés előtt az egyik korong adott szögsebességgel forog az asztalra merőleges, középpontján átmenő tengely körül, a másik nem forog. Hogyan mozognak a korongok az ütközés után?
Tegyük fel, hogy a korongok tökéletesen rugalmatlanok és érdesek, azaz a korongoknak az ütközés pillanatában érintkező pontjai egymáshoz képest nulla sebességgel mozognak az ütközés utáni pillanatban!

(II. évfolyam)

2. Elemezzük a helikopter működését! Hogyan emelkedik, hogy tartja az irányt? Hogy tud előre repülni? Hogyan fordul? Adjunk számot az impulzusmomentum megmaradásáról!

(II. évfolyam)

3. Három merev rudat az ábra szerint csuklókkal összekapcsolunk és felfüggesztünk. Milyen egyensúlyi helyzetek lehetségesek?

Hiányzó kép

(II. évfolyam)

4. Egy Segner kereket víz alá helyezünk és a tengelyén megszívjuk. Milyen irányban kezd el forogni?

(II.,III. évfolyam)

5. Két ugyanabból az ideális rugalmas anyagból készült, azonos keresztmetszetű, különböző hosszú hasáb összeütközik. Az egyik hasáb állt, a másik ν sebességgel közeledett hozzá. A hasábok hossziránya megegyezik ν irányával és az ütközés pontosan a hasábok egybevágó alaplapjain történik. Mekkorák az ütközés utáni sebességek? A reális rugalmas ütközéseknél miért nem kell a hasábok rezgésével számolni?

(II.,III. évfolyam)

6. Hal Clement "Az elveszett rakéta" című fantasztikus regénye (Kozmosz fantasztikus könyvek, 1978) a Meszklin bolygón játszódik. A bolygó igen nagy, a sarkokon a felszíni gravitáció $700 \cdot g$, de 20 *perc* alatt fordul meg tengelye körül, és így nagyon lapult. A bolygó lakói csak a déli félgömbön élnek, és soha nem közelítik meg az általuk "perem"-nek nevezett egyenlítőt, ahol a lapultság és a centrifugális erő hatása $3 \cdot g$-re csökkenti a felszíni gravitációs gyorsulást. Íme az őslakók világképe (10-11. oldal):
"Az iskolában azt tanultuk, hogy a Meszklin hatalmas, mély kupa. A fenék közelében a legsűrűbb a lakosság, ott a legnagyobb a súly. A filozófusok szerint a súlyt egy nagy

sík lap vonzása okozza, amelyen a Meszklin nyugszik. Minél jobban megközelítjük a peremet, annál kisebb a súlyunk, mivel annál jobban eltávolodunk a laptól. Azt senki sem tudja, hogy maga a lap min nyugszik...

- Az óceánok ekkor mind lecsorognának a legmélyebb pontra! (véli egy földi ember)

- A tanárunk mutatott egy ábrát: sok-sok vonal jött felfelé a lapról, befelé hajolt, aztán pontosan a Kupa felett összetalálkozott. A tanár azt magyarázta, hogy a súly a vonalak mentén hat, nem függőlegesen a lap irányába. Azt mondták, az elmélet beigazolódott, mert a földmérők által mért távolságok megegyeznek az elméleti távolságokkal."

Konzekvens-e a meszkliniták világképe? Hogy fest fizikájukban a tömegvonzás törvénye? Hogyan tudnánk meggyőzni őket arról, hogy világuk nem homorú, hanem domború? (A bolygót beborító felhők miatt a csillagok nem láthatók, az egyenlítői viharok miatt a bolygólakók nem tudnak átjutni az északi féltekére.) Vigyázat, a szerző gyakorló fizikus és csillagász!

(II.,III. évfolyam)

7. A Föld középpontján át egyenes alagutat fúrunk. A középpontból ν_0 sebességgel indul egy test felfelé. A felszínt elérve kirepül az alagútból, és szabadon mozog. Visszazuhanva a Föld felszínére, éppen az alagút (egyik vagy másik) szájához érkezik, és simán belecsusszanva folytatja mozgását. (súrlódás, légkör, Hold, stb. elhanyagolható) Hol lehet az alagút szája? Mekkora lehet a ν_0 kezdősebesség? Hány megoldás van? (A Földet tekintsük állandó sűrűségű gömbnek.)

(II.,III. évfolyam)

8. $R = 1m$ sugarú gömböt kalapáccsal megütünk. A gömb tömör és acélból készült. Mi a hallható hang frekvenciaspektruma?

(III. évfolyam)

9. Koncentrikus fémhengerek közé vezető folyadékot (higanyt) töltünk. U feszültséget kapcsolva a fémhengerek közé és homogén tengelyirányú mágneses teret alkalmazva a higany mozgásba jön.

a./ Írjuk le a mozgását! (A fémhengereket alul szigetelő lap zárja le.)

b./ Határozzuk meg a szabad folyadékfelszín alakját, ha a higany mozgását egy függőleges, a tengelyen átmenő, sík szigetelő lappal meggátoljuk!

(III. évfolyam)

10. A gömb alakúnak tekintett forgó Föld felszínéhez érintőlegesen végtelen, súlytalan, merev síkot erősítünk. A sík együtt forog a Földdel. (A fénysebességgel most ne törődjünk!) Egy tömegpont a forgó síkban végzi mozgását. Írjuk le a mozgást az általános relativitáselmélet eszközeivel: Határozzuk meg azt a $2+1$ dimenziós téridőt,

amelyben a geodetikusok mentén végzett szabad mozgások egybeesnek a vizsgált tömegpontnak - a klasszikus mechanika által leírt - mozgásaival a forgó síkban! Mekkora a $2+1$ dimenziós téridő és a kétdimenziós tér skalárgörbülete?
Interpretáljuk a tömegpontot a síkon tartó kényszererőt a geometriai képben! Vizsgáljuk meg a téridő esetleges szingularitásait, a mozgások esetleges fixpontjait és ezek stabilitását! Hogyan függnek az eredmények az érintési pont földrajzi szélességétől? Használjuk a $k = \sqrt[3]{\frac{MG}{R^3\Omega^2}}$ dimenziótlan paramétert! (R a Föld sugara, M a tömege, Ω forgásának szögsebessége, G a gravitációs állandó.)

(III.,IV. évfolyam)

11. Ha egy kvázi-elasztikusan rezgő elektronra x^2-tel arányos erő hat, valamint

$$E(\omega) = \sum_{i=1}^{n} E_i \, \delta(\omega - \omega_i)$$

Fourier komponensű elektromos erőt kapcsolunk, és cm^3-enként adott számú fenti oszcillátorunk van, akkor milyen frekvenciájú hullámok gerjednek (mint nemlineáris polarizáció eredménye)?

(IV. évfolyam)

12. Milyen az elhajlási kép azon a vonalrácson, melynek periodikusan ismétlődő szakaszán a fényáteresztő tartomány Cantor-halmazt alkot?
Megjegyzés: A Cantor-halmazt a $[0, a]$ intervallumon egy olyan algoritmus határértékeként kapjuk, melynek során az egyes szakaszokból a középső harmadot elhagyjuk. Mivel a Cantor-halmaz nullmértékű, ezért az algoritmus során a fényáteresztő képességet célszerű úgy módosítani, hogy a direkt sugár intenzitása változatlan maradjon.

(IV.,V. évfolyam)

13. Egy atomreaktor aktív zónája térfogategységenként α teljesítményt ad le. A láncreakció leállítása után a hasadványok radioaktivitásából $\alpha\eta$ fajlagos teljesítmény marad vissza. Legfeljebb mekkorára szabad építeni egy (gömb alakúnak feltételezett) reaktort, hogy még a hűtőrendszer meghibásodása esetén se érje el azt a T_0 hőmérsékletet, amit a vasbeton kibír? Végezzünk becslést numerikusan is reális nagyságrendű adatokkal!

(IV.,V. évfolyam)

14. Határozzuk meg egy végtelen síkkal határolt, a tér egyik felét kitöltő, ideális vezető fémtömb fölötti vákuumban mozgó töltött kvantumrészecske energiaspektrumát! (Tegyük fel, hogy a részecske nem hatolhat be a fémbe!)

(IV.,V. évfolyam)

15. Memória-modellként használható a következő Hamilton-függvénnyel leírt Ising-modell:

$$H = -\sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j \quad , \qquad S_i = \pm 1, \qquad (N \text{ spin van})$$

Itt minden spint összekapcsolunk minden másikkal. Az információt az így nyert memória a spinkonfigurációkban tárolja. A működése a következőképpen történik: Egy spin megváltoztatja az előjelét, ha a lokális térrel (többi spin által keltett térrel) vett szorzata negatív. Az így nyert végállapot az, amire a rendszer "emlékszik". Az alapállapotok például olyanok, hogy ott nem változnak a spinek, de vannak az alapállapoton kívül is ilyenek. Egy memória annál jobb, minél több információt tud tárolni. A fenti rendszer esetén ez úgy is történhet, hogy sok alapállapota lesz. A kötések megfelelő választásával ezt elérhetjük. Legyen

$$J_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{a=1}^{p} \mu_i^a \mu_j^a$$

Itt $\mu_i^a = \pm 1$ és a $\{\mu_i^a\}_{i=1}^p$ konfigurációk (p darab) azok, amelyeket szeretnénk megtanítani a rendszernek. Ezeket független információknak gondolva a μ_i^a-kat független valószínűségi változóként kezelhetjük. Ha $p > N$ akkor a rendszer már szinte semmire nem emlékszik. Mekkora legyen a p értéke legfeljebb, hogy a megtanított konfigurációk alapállapotok legyenek? Próbáljunk minél jobb szükséges feltételt adni!

(IV.,V. évfolyam)

16. Az emberi szervezet a behatoló idegen anyagok (ún. antigének) megsemmisítésére törekszik. Bizonyos antigének esetén a folyamat nem rendelkezik memóriával és viszonylag korlátozott számú sejtpopuláció vesz részt benne. Ennek egy egyszerű modellje a következő: Az antigént ellenanyagok semlegesítik, ezeket kétféle sejttipus választja ki:

i. A "nagy" nyiroksejtek (L) k sebességgel termelnek ellenanyagokat. Egy aktivált sejt előtt két lehetőség van: vagy végigjárja saját sejtciklusát (ennek ideje τ_p), aminek végén két azonos minőségű leánysejt képződik, vagy plazmasejtté (P) érik (differenciálódik) τ_d átlagos idő alatt. Az első folyamat valószínűsége $p(t)$ - ez az idő olyan függvénye, hogy a válaszreakció a leghatásosabb legyen. Egy nyiroksejt $1/M_L$ átlagos idő alatt el is pusztulhat.

ii. A plazmasejtek (P) L sejtből differenciálódnak, és nagyobb sebességgel ($k\gamma$, ahol $\gamma > 1$) termelik az ellenanyagokat. Élettartamuk azonban sokkal rövidebb: $1/M_P \ll 1/M_L$, és nem osztódnak.

A modell blokksémája a következő:

hiányzó kép

Adott mennyiségű antigén semlegesítésére A ellenanyag szükséges. Kezdetben csak L sejtek vannak (L_0), amelyek az antigén hatására aktivizálódnak.

a./ Keressünk matematikai leírást, amelyik segítségével a sejtpopulációk időfejlődését és a keletkezett ellenanyag mennyiségét ($A(t)$) vizsgálni tudjuk.

b./ Feltételezhetően a szervezet igyekszik a legoptimálisabb választ végrehajtani. Találjuk meg azt a $p(t)$ függvényt, amely esetben az A ellenanyag a legrövidebb idő alatt keletkezik. Vegyük a következő biológiailag elfogadható értékeket: $\tau_p = \tau_d = 0,1$ óra , $1/M_P = 50$ óra, $1/M_L = 10^5$ óra, $\gamma = 10$, $A = 5 \cdot 10^{-8}$ mól, $k = 6 \cdot 10^{-18}$ mól/óra, $L_0 = 4 \cdot 10^4$. Milyen lesz az optimális esetben $L(t), P(t), A(t)$?

c./ Milyen legyen $p(t)$, hogy adott idő alatt (mondjuk 100 óra alatt) maximális ellenanyag keletkezzen.

(IV.,V. évfolyam)

17. Legyen a körön szabadon mozgó részecske Lagrange-függvénye a következő:

$$L = \frac{1}{2} m \Theta^2 \qquad , \qquad \Theta \in \left[0, 2\right) \tag{1}$$

Bizonyítsuk be, hogy bár klasszikusan $\dot{P} = 0$, a kvantumelméletben azonban az Ehrenfest-tétel sérül:

$$\frac{d}{dt} \left\langle \Psi(t) | \mathbf{P} | \Psi(t) \right\rangle = i \left\langle \Psi(t) | [\mathbf{H}, \mathbf{P}] | \Psi(t) \right\rangle + A$$

Adjuk meg az "anomália" kifejezését!
Ezek alapján általános esetben adjuk meg, hogy mi annak a szükséges feltétele, hogy egy klasszikusan megmaradó mennyiség várható értéke a kvantumelméletben időfüggő legyen!

Nem világos jelölések

(V. évfolyam)

18. Egy olyan négyzetrács, amelynek kötései p valószínűséggel betöltöttek és $(1-p)$-vel üresek, ún. perkolációs hálózatot alkot. Ismert, hogy $p_c = 1/2$ kritikus pontja a rendszernek, abban az értelemben, hogy $p > p_c$ esetén létezik végtelen betöltött fürt (egymással összekötött rácspontok halmaza). Egy részecske bolyongjon a fenti hálózaton úgy, hogy csak betöltött kötéseken mozoghat (hangya a labirintusban). Írjuk le kvalitatíve a hangya mozgását, feltéve, hogy véletlenszerűen indul valamelyik rácspontról. (A mozgás jellemzése a négyzetes eltávolodás segítségével történhet.) Hogyan változik a fenti kép, ha a hangya erős *ÉK*-i szélben mozog? (Vagyis csak növekvő x és y irányokban léphet, az x és y tengelyek a rácsirányokba mutatnak.) Határozzuk meg a négyzetes eltávolodás időfüggését! Hogyan függ az eredmény a rácstól, a rács dimenziójától?

(V. évfolyam)

19. A Nap körül körpályán kering egy 1g tömegű szénszemcse, a pálya sugara 1 csillagászati egység.

a./ Milyen meleg a szénszemcse?

b./ Hogyan változik az energiája és az impulzusmomentuma a periódusidőhöz képest nagyon hosszú idő alatt? Írjuk le a jelenséget inerciarendszerben és a szénszemcsével együtt forgó koordináta-rendszerben!

(II.,III.,IV.,V. évfolyam)

20. Egy fantasztikus űrkutatási terv szerint a Föld körüli körpályára olyan sok űrállomást lőnének fel, hogy azok végül összeérnének, s egy szoros gyűrűvé csavarhatók össze. Stabil-e ez a rendszer?

(II.,III.,IV.,V. évfolyam)