Terminsprøve
LØSNINGSFORSLAG

Delprøven uden hjælpemidler

Opgave 1

Vi skal bestemme tallene a og b, der er koefficienter i den lineære funktion f.

Jeg benytter formlerne $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$ og $b = y_1 - ax_1 = 2 - 3 \cdot 1 = 2 - 3 = -1$.

Tallene er $a = 3$ og $b = -1$.

Opgave 2

Vi skal løse en andengradsligning. Vi benytter koefficienterne:

$a = 1$
$b = -10$
$c = 21$

Så udregner vi diskriminanten:

$$d = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 21 = 100 - 84 = 16$$

Så udregner vi løsningerne:

$$\mathcal{L} = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 4}{2}$$

med løsningerne

$$x_1 = \frac{10-4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$
$$x_2 = \frac{10+4}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Andengradsligningen har løsningerne $x = 3$ og $x = 7$.

Opgave 3

Vi skal bestemme længden af to sider i en trekant.

Da de to trekanter ABC og AB_1C_1 er ensvinklede, er sidelængden $|AC_1| = k \cdot |AC| = 2 \cdot 5 = 10$.

For at finde sidelængden $|BC|$ anvendes Pythagroas' Sætning (der kan anvendes da trekanten er retvinklet). Vi indsætter i formlen $|BC|^2 + 5^2 = 6^2$ og isolerer $|BC| = \sqrt{36 - 25} = \sqrt{11}$.

Sidelængderne $|BC| = \sqrt{11}$ og $|AC_1| = 10$.

Opgave 4

Vi skal isolere h:

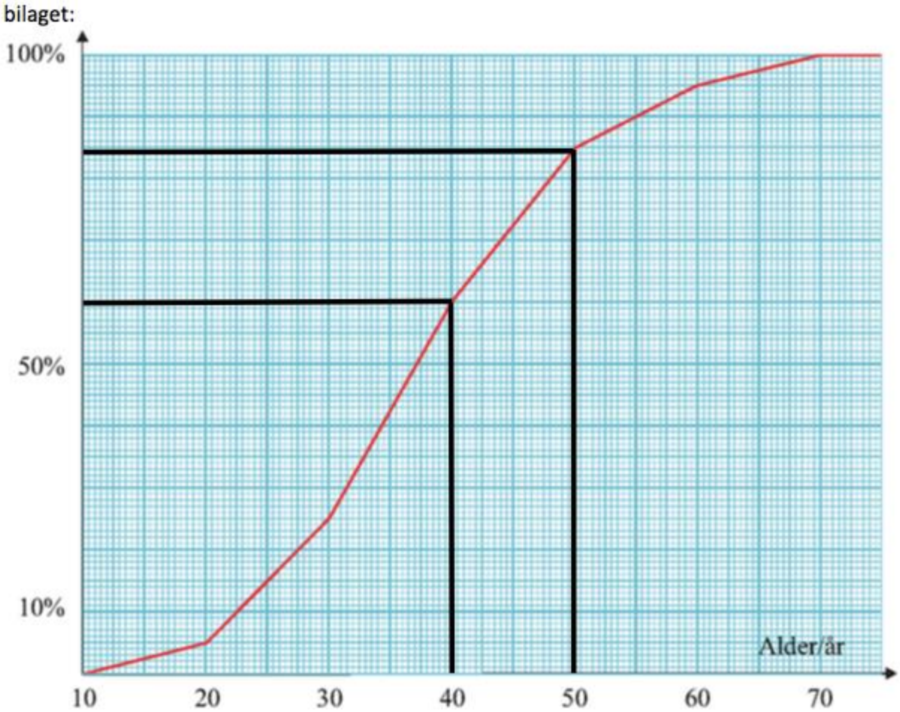
$$\frac{h}{2} - 10 = M$$
$$\Leftrightarrow \frac{h}{2} = M + 10$$
$$\Leftrightarrow h = 2(M + 10) = 2M + 20$$

h er givet ved $h = 2M + 20$.

Opgave 5

Vi skal finde antallet af mænd der er mellem 40 og 50 år gamle på en arbejdsplads med 80 mænd.

Først finder vi ved hjælp af sumkurven ud af hvor stor en andel af mænd der er under 40 år gamle: det aflæses på bilaget:



Til alderen 40 år aflæses 60%, og til alderen 50 år aflæses 85%. Det vil sige at 60% af de ansatte mænd er under 40 år, og 85% af de ansatte mænd er under 50 år. Der er altså 25% af de ansatte mænd, der er mellem 40 og 50 år. Med 80 ansatte mænd svarer det til 20 mænd.

20 mænd er mellem 40 og 50 år gamle.

Opgave 6

Vi skal bestemme ligningen for den tangent til grafen for f, der skærer punktet $P\big(2, f(2)\big)$.
Til det skal vi bruge tangentligningen $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
Vi differentierer funktionen: $f'(x) = 3x^2 - 16x + 3$.

Vi beregner følgende værdier:

$$x_0 = 2$$
$$f(2) = 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = 8 - 8 \cdot 4 + 6 + 2 = 16 - 32 = -16$$
$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + 3 = 3 \cdot 4 - 32 + 3 = 12 - 32 + 3 = -17$$

Herefter indsætter vi i tangentligningen:

$$\begin{aligned} y &= -17(x-2) - 16 \\ &= -17x + 34 - 16 \\ &= -17x + 18 \end{aligned}$$

Ligningen for tangenten er $y = -17x + 18$.

Løsning uden brug af tangentligningen:

Vi skal bestemme ligningen for den tangent til grafen for f, der skærer punktet $P\big(2, f(2)\big)$. Tangenten er blot en lineær funktion, og vi har fået givet to informationer:

(1) den skærer grafen netop i punktet P. Vi har altså at $x_1 = 2$ og $y_1 = f(2)$.
(2) den har har samme hældning som grafen i skæringspunktet. Hældningskoefficienten er $a = f'(2)$.

Vi laver de nødvendige beregninger:

$$x_1 = 2$$
$$y_1 = f(2) = 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = 8 - 8 \cdot 4 + 6 + 2 = 16 - 32 = -16$$
$$a = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + 3 = 3 \cdot 4 - 32 + 3 = 12 - 32 + 3 = -17$$

Vi mangler nu kun b-værdien for vores lineære funktion. Den finder vi ved ligningen

$$b = y_1 - ax_1 = -16 - (-17) \cdot 2 = -16 + 34 = 18$$

Herefter indsætter vi i ligningen for en lineær sammenhæng $y = ax + b$:

$$y = -17x + 18$$

Ligningen for tangenten er $y = -17x + 18$.

Anonym

13/03-2018
Terminsprøve

Delprøven med hjælpemidler

Opgave 7a

Grafik: www.colourbox.dk

Tabellen viser udviklingen i antallet af hunde i Danmark i perioden 2010-2015.

Årstal	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Antal hunde (målt i tusinde)	411	449	487	524	560	584

I en model kan udviklingen i antallet af hunde beskrives ved en funktion af typen

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ betegner antallet af hunde i Danmark (målt i tusinde) til tiden x (målt i år efter 2010).

a) Benyt tabellens data til at bestemme tallene a og b.

Modellen er oplyst til at være en lineær funktion, vi bestemmer derfor tallene a og b med lineær regression. Nu opstiller jeg tabel med data og foretager regression med CAS-værktøjet WordMat:

Lineær regression udført vha. CAS-værktøjet WordMat: R^2 = 0,99558742

$$y = 35{,}285714x + 414{,}28571$$

Årstal	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Antal år efter år 2010	0	1	2	3	4	5
Antal hunde (målt i tusinde)	411	449	487	524	560	584

Jeg kan nu aflæse tallene a og b fra regressionsligningen og bestemme dem til 35,29 og 414,29, hvilket jeg betyder at jeg kan konkludere følgende:

Dvs. at tallene a og b kan bestemmes på baggrund af lineær regression, her er tallet a bestemt til 35,29 og tallet b er til 414,29

Anonym 13/03-2018

Terminsprøve

Opgave 7b

b) Gør rede for, hvad tallet a fortæller om udviklingen i antallet af hunde i Danmark.

Kilde: Dansk hunderegister

Formålet er at give redegørelse for hvad tallet a fortæller samt betegner. Her betegner tallet a den årlige stigning i forhold til antallet af hunde i Danmark, hvor jeg har for hvert år efter år 2010, viser det så at antallet af hunde i Danmark, ifølge den opstillede model med lineær regression er steget med 35,29 tusinde hunde.

Dvs. at tallet a fortæller om den årlig stigning i forhold til antal af hunde med 35,29 tusinde.

Opgave 8a

En optælling af antal individer i en bestemt population af dyr viser, at antallet af individer i populationen som funktion af tiden vokser eksponentielt. Det oplyses endvidere, at vækstraten er 5% om måneden, og at antallet af individer i populationen ved starten af optællingen var 4500.

a) Indfør passende variable, og opstil en ligning, der beskriver udviklingen i antallet af individer i populationen som funktion af tiden.

Jeg kan se som det er oplyst at "en optælling af antal individer i en bestemt population af dyr viser, at antallet af individer i populationen som funktion af tiden vokser eksponentielt" fortæller dette om en eksponentiel udvikling, hvor jeg nu kan indføre mine passende variabler og opstiller følgende ligning:

$$f(t) = b \cdot a^t$$

Forklaring:

Her betegner $f(t)$ det antal af individer i populationen målt til selve tidspunktet t målt i måneder efter start af optælling.

Her betegner t selve tidspunktet målt efter start på optælling.

Her betegner b det antal individer i populationen ved start af optællingen, hvilket betyder at tallet er 4500.

Hvor a betegner selve fremskrivningsfaktoren. Da jeg kender vækstraten som er

$$r = 5\,\% = 0{,}05,$$

kan jeg nu bestemme fremskrivningsfaktoren a:

$$a = r + 1 \;=\; 0{,}05 \;+\; 1 \;=\; 1{,}05$$

Nu kan jeg opskrive min ligning, som beskriver den eksponentielle udvikling:

$$f(t) = 4500 \cdot 1{,}05^t$$

Dvs. at jeg har indført passende variabler og opskrevet en ligning som beskriver den eksponentielle udvikling om det antal af individer i populationen som funktion af tiden, er bestemt til $\boldsymbol{f(t) = 4500 \cdot 1,05^t}$

Opgave 8b

b) Bestem fordoblingstiden.

Jeg starter med definere min fremskrivningsfaktoren a med udregningen i WordMat:

$$a \;\coloneqq\; 1{,}05$$

Fordoblingstiden er skrevet ved:

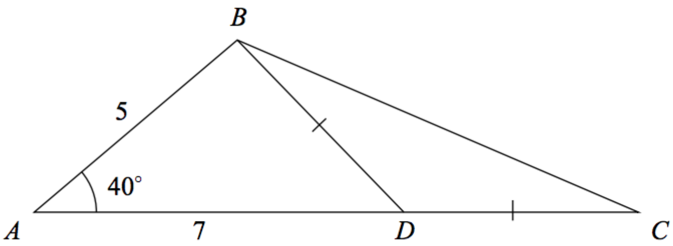
$$T_2 = \frac{\log(2)}{log(a)}$$

$$\approx\; 14{,}207$$

Dvs. at selve fordoblingstiden er bestemt til 14,207 måneder

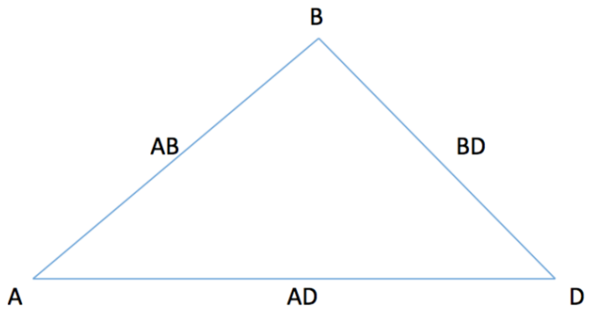
Opgave 9a

På figuren ses trekant ABC. Punktet D ligger på linjestykket AC, så $|BD| = |DC|$.
Endvidere oplyses, at $|AB| = 5$, $|AD| = 7$ og $\angle A = 40°$.



a) Bestem $|BD|$.

Jeg kan se at det oplyses at $|BD|$ skal bestemmes, herefter anvendes WordMat's trekantsløser med input: A = 40° , AD = 5 , AB = 7



A = 40°
B = 45,39635°
D = 94,60365°

BD = 4,514077
AD = 5
AB = 7

Heraf findes selve længden af siden BD vha. cosinusrelation

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot cos(A)}$$

$$= \sqrt{72 + 52 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot cos(40°)}$$

$$= 4{,}5140768$$

Dvs. at længden af siden BD er bestemt til $4,5140768$

Opgave 9b

b) Bestem arealet af trekant BDC.

Heraf findes selve vinkel B vha. en cosinusrelation:

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{BD^2 + AB^2 - AD^2}{2 \cdot BD \cdot AB}\right)$$

$$B = \cos^{-1}\left(\frac{4{,}514077^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 4{,}514077 \cdot 5}\right)$$

$$\underline{= 94{,}603655°}$$

Nu findes vinkel D vha. vinkelsum som = 180° der skal være i en trekant for at der er symmetri:

$$D = 180° - A - B = 180° - 40° - 94{,}603655°$$

$$\underline{= 45{,}396345°}$$

<u>Dvs. at vinkel D er bestemt til $45{,}396345°$</u>

Da vinklen $\angle D$ i trekant $|ABD|$ blev bestemt til $\angle D = 45{,}396345°$ kan jeg nu bestemmer vinkel $\angle D$ i trekant BDC via udregningen:

$$\angle D_{BDC} = 180° - 45{,}396345° \approx 134{,}60366°$$

Dvs. at vinkel $\angle D$ i trekant BDC er bestemt til $134{,}60366°$

Nu bestemmer arealet af trekant BCD vha. en sinusrelation. Da vi har, at $|BD| = |DC|$ dvs.:

$$\mathrm{T_{BCD}} = \frac{1}{2} \cdot |\mathrm{BD}| \cdot |\mathrm{DC}| \cdot \sin(D)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4{,}5140768 \cdot 4{,}5140768 \cdot \sin(134{,}60366)$$

$$\approx 7{,}253981$$

<u>Dvs. at arealet af trekant $|BCD|$ er bestemt til 7,25</u>

Anonym

13/03-2018
Terminsprøve

Opgave 10a

I en model kan udviklingen i antallet af artikler på den engelsksprogede del af Wikipedia beskrives ved

$$f(x) = 4\,378\,449 \cdot e^{-15{,}43 \cdot e^{-0{,}384 \cdot x}}, \quad x \geq 0,$$

hvor $f(x)$ betegner antallet af artikler til tiden x (målt i år efter 2000).

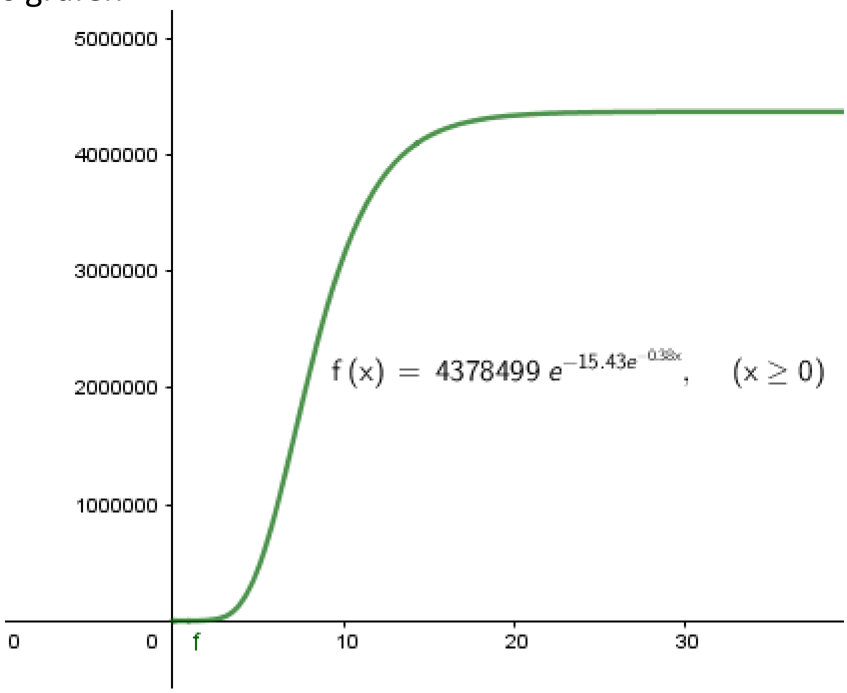
a) Tegn grafen for f.

Jeg indskriver følgende i WordMat og definere funktionen med udregning:

$$f(x) \coloneqq 4378499 \cdot e^{-15{,}43 \cdot e^{-0{,}384 \cdot x}}$$

$$Definer: x \geq 0$$

Geogebra laves grafen



Anonym

13/03-2018
Terminsprøve

Opgave 10b

b) Benyt modellen til at bestemme antallet af artikler i 2003 og til at bestemme, hvornår antallet af artikler oversteg 500 000.

Da jeg skal benytte modellen til, at bestemme antal af artikler i år 2003, bestemmer jeg først at:

$$f\,(2003-2000)=f(3)$$

$$f(3)\approx 33398{,}719$$

Dette betyder, at ifølge modellen er antallet af artikler i år 2003 bestemt til 33399 artikler. Jeg bestemmer tidspunktet, hvor antallet af artikler oversteg 500000 ved at løse uligheden $f(x)>500000\ for\ x$.

$$f(x)=500000$$

$$\Updownarrow\ Ligningen\ løses\ for\ x\ vha.CAS-værktøjet\ WordMat.$$

$$x=5{,}1084744$$

<u>Dvs. at ifølge modellen vil antallet af artikler på den engelsksprogede del af Wikipedia overstige 500000 ca. 5,1 år efter år 2000 (afrundet til 1 decimal) dvs. i år 2005.</u>

Opgave 10c

c) Bestem $f'(10)$, og giv en fortolkning af dette tal.

Jeg bestemmer $f'(10)$ med udregningen:

$$f'(10)\approx 400220{,}61$$

$$Ligningen\ løses\ for\ x\ vha.CAS-værktøjet\ WordMat.$$

Dvs. at tallet $f'(10)$ er bestemt til 400221 artikler og jeg kan nu give en fortolkning af tallet $f'(10)$.

Her betegner tallet $f'(10)$ udviklingen i det årlige antal af artikler 10 år efter år 2000, dvs. i år 2010. Jeg har således, at antallet af artikler på den engelsksprogede del af Wikipedia i år 2010 steg med 400221 artikler pr. år efter år 2010.

Opgave 11a

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 - 8 \cdot \ln(x), \quad x > 0.$$

a) Løs ligningen $f'(x) = 0$, og bestem monotoniforholdene for f.

Først betragter jeg funktionen og definerer den med CAS i TI-Nspire samt løser ligningen $f(x)' = 0$

Betragtning af funktion og definition

$f(x) := (x^2 - 8) \cdot \ln(x)$ ▸ *Udført*

$fm(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Udført*

udført i TI-Nspire

Jeg bestemmer monotoniforholdene for $f(x)$, så vi løser ligningen $f'(x) = 0$ og får $f'(x) = 2$

Nu ønsker jeg at finde de $x - værdier$, hvor $f'(x)$ er 0

Bestemmelse af nulpunkter

$\text{solve}(fm(x) = 0, x)$ ▸ 2

udført i TI-Nspire

<u>Så jeg har fundet at $x = 2$ er løsning til $f'(x) = 0$.</u>

Bestemmelse af rødder

$fm(1)$ ▸ -6

$fm(3)$ ▸ 3.33

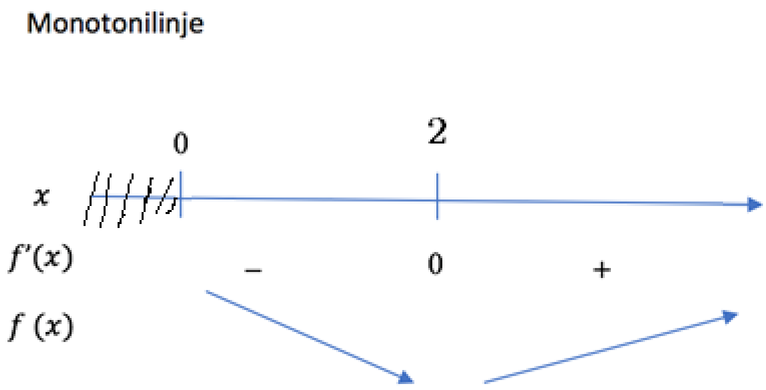
udført i TI-Nspire

Anonym

13/03-2018

Terminsprøve

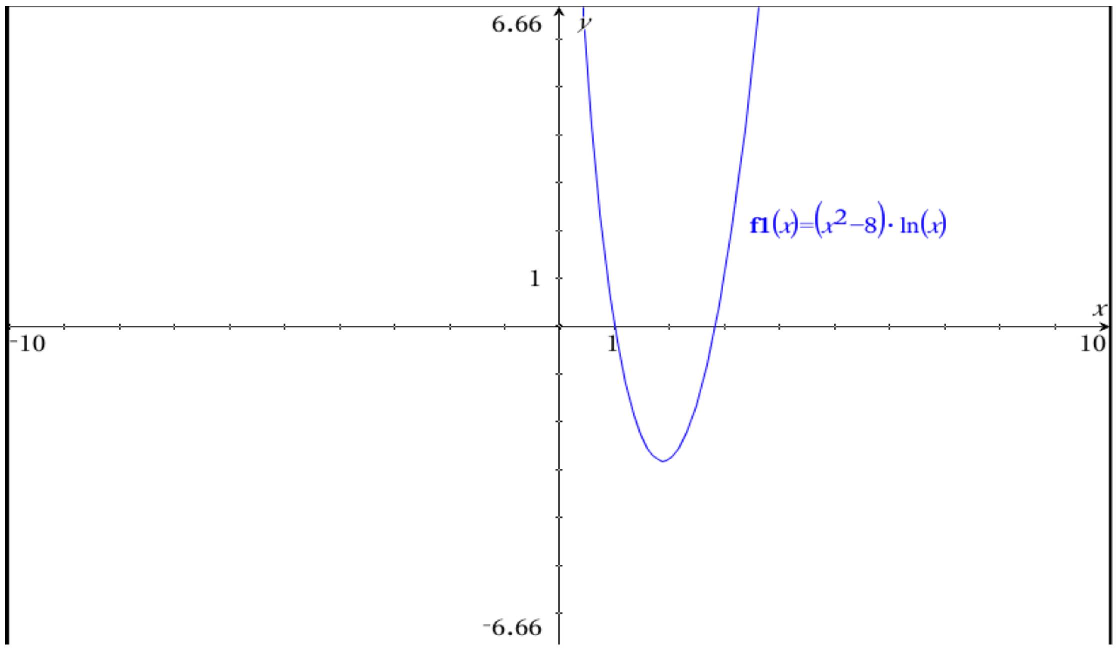
Jeg vil nu lave monotonilinjen. Når man bestemmer en funktions monotoniforhold betyder dette, at man matematisk bestemmer i hvilke intervaller, funktionen er voksende, og i hvilke, den er aftagende. Jeg undersøger fortegnet for differentialkvotienten på begge sider af nulpunktet for den afledede funktion $f'(x)$



Jeg har tegnet resultaterne ind i en monotonilinje og kan opskrive monotoniforhold til grafen for f:

f er aftagende i intervallet $]0;\ 2]$
f er voksende i intervallet $[2;\ \infty[$

Herunder er f tegnet så jeg se, at jeg er kommet frem til det rigtige resultat:



udført i TI-Nspire

Anonym 13/03-2018
Terminsprøve

Opgave 12a

Grafik: www.colourbox.dk

En fabrik producerer et stort parti balloner i farverne blå, rød, grøn, gul og lilla. For at undersøge, om der produceres lige mange balloner af hver farve, udtages en stikprøve på 100 balloner, der vælges tilfældigt blandt de producerede balloner.

I stikprøven er der 20 blå, 28 røde, 21 grønne, 13 gule og 18 lilla balloner.

a) Forklar, hvad der er stikprøve, og hvad der er population i ovenstående.
Opstil en nulhypotese, der kan benyttes til at undersøge, om fabrikken producerer lige mange balloner af hver farve.

Formålet er at give en forklaring på hvad de matematiske begreber som stikprøve og population betyder. Først: Stikprøven betegner her de størrelser, som er med i undersøgelsen, hvor stikprøven her er de 100 balloner der udvælges til selve undersøgelsen.

Derefter er population her så den gruppe som betegnes for at være den man gerne vil undersøge, hvor populationen så er de farvede balloner, som fabrikken producerer.

Nu kan jeg opstiller min nulhypotese H_0, den kan benyttes til at undersøge, om selve fabrikken producerer lige mange balloner i hver sin farve:

H_0: Antallet af balloner, der produceres i én af de givne farver, er uafhængig af ballonens farve.

Opgave 12b

b) Undersøg, om nulhypotesen kan forkastes på et 5% signifikansniveau.

For at kunne bestemme om nulhypotesen H_0 kan forkastes på et 5% signifikansniveau bestemmer jeg først de forventede værdier for det antal, bestemmer vi de forventede værdier for antallet af producerede balloner i hver af de frem farver.

Da jeg har, at produktionen af ballonerne i 5 forskellige farver, samt at der produceres 100 balloner i alt, hvilket betyder at der skal produceres et antal af hver farve hvilket svarer til at denne ligning opskrives:

Anonym

13/03-2018
Terminsprøve

$$farve = \frac{100}{5} = 20$$

Under antagelse af, at nulhypotesen er sand, skal der produceres 20 balloner af hver farve. Vi undersøger om nulhypotesen H_0 kan forkastes på et 5% - signifikansniveau med en X^2-Goodness of fit - test. Jeg benytter WordMats egen skabelon for X^2-Goodness of fit, hvor jeg indsætter mit resultat:

Goodness of fit test

	Farve	Obs. Fordeling	Forventet fordeling
	Blå	20	20
	Rød	28	20
	Grøn	21	20
	Gul	13	20
	Lilla	18	20

Nul-hypotese: Den observerede stikprøve stammer fra den forventede fordeling

Signifikans niveau: 5%

P-værdi: 21%

Konklusion: Nul-hypotese bekræftet

Da det aflæses, at p-værdien er målt til at være 21%, hvilket betyder at dette tal er langt større end et signifikansniveau på 5%, her kan jeg bekræfte at min nulhypotese H_0 og på samme tid konkludere, at der ifølge testen på et 5% - signifikansniveau produceres lige mange balloner af hver farve.

Anonym

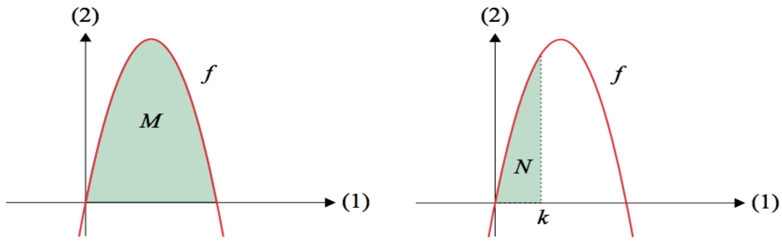
13/03-2018
Terminsprøve

Opgave 13a

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = -x^2 + 6x.$$

Koordinatsystemets førsteakse og grafen for f afgrænser i første kvadrant en punktmængde M, der har et areal.

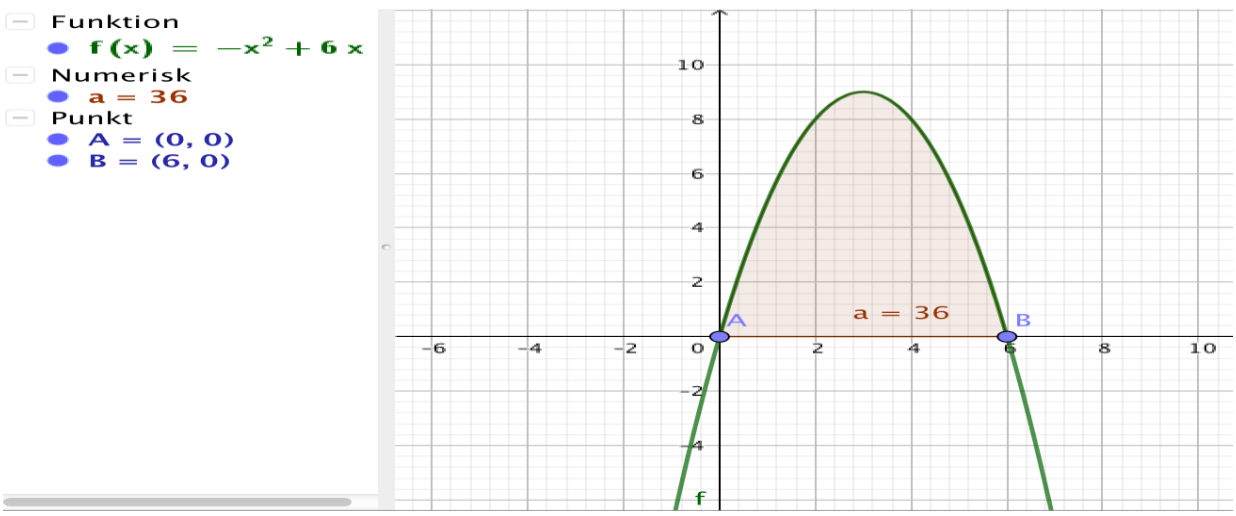


a) Bestem arealet af M.

Først definerer jeg min funktion

$$f(x) := -x^2 + 6x$$
$$f(x) = 0$$
⇕ *Ligningen løses numerisk for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*
$$x \approx 0 \quad \vee \quad x \approx 6$$

Her anvendes integration. Arealet er en funktion af x, hvilket betyder at arealet vokser i x. Jeg foretager en arealberegning i GeoGebra



Jeg bestemmer arealet af punktmængden M som arealet under grafen for f i intervallet [0; 6] vha. af GeoGebra Integral[<Funktion>, <Tal>, <Tal>].

Dvs. at arealet af *M* er bestemt til 36

Anonym 13/03-2018
Terminsprøve

Opgave 13b

b) Bestem tallet k, så arealet af N er en tredjedel af arealet af M .

For at kunne bestemme tallet k, så arealet af N kan være $\frac{1}{3}$ definerer jeg først definitionsmængden

Udregning:

$$A_M = \int f(x)dx\, 0 = 36$$

$$Definer: 0 < k < 6$$

Ligningen løses vha. CAS – værktøjet WordMat.

Da jeg har at arealet af punktmængden N er afgrænset i intervallet [0; k], hvor det er oplyst, at arealet af N er $\frac{1}{3}$ af arealet af M, dvs. at arealet af N er givet ved:

$$\frac{1}{3} \cdot A_M = \int_0^k f(x)dx$$

⇕

Nu indsætter jeg mine kendte værdier for at bestemme tallet k:

$$\frac{1}{3} \cdot 36 = \int_0^k f(x)dx$$

Ligningen løses for k vha. CAS – værktøjet WordMat

⇕

k = 2,3217789

Dvs. at tallet k svarer til at arealet af punktmængden N er lig $\frac{1}{3}$ af arealet af punktmængden M som nu er bestemt til k = 2,

Opgave indsendt til www.matematikhfsvar.page.tl med accept fra indsenderen om upload på hjemmesiden. Kursisten fik 12 i dette sæt.