1. Бројни изрази

1. Вредност израза $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+2\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ je:

А) 0 Б) 8 Ц) -1 Д) 9 Е) 10 Н) не знам

решење:

Први сабирак рационалишемо, а други ћемо написати у погоднијем облику:

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}+2\sqrt{11+6\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}+2\sqrt{2+2\cdot 3\sqrt{2}+9}=\frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1}+2\sqrt{\left(\sqrt{2}+3\right)^2}=3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}+6=9,$$

решење под Д)

2. Вредност израза $\sin 6^o \sin 42^o \sin 66^o \sin 78^o$ припада интервалу:

А) $\left(0,2^{-6}\right)$ Б) $\left(2^{-6},2^{-5}\right]$ Ц) $\left(2^{-5},2^{-4}\right]$ Д) $\left(2^{-4},2^{-3}\right]$ Е) $\left(2^{-3},2^{-2}\right]$
Н) не знам

решење:

Користимо идентитете $\cos\alpha=\sin\left(90^o-\alpha\right),\alpha<90^o$,

$2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$,

$\sin\left(90^o+\alpha\right)=\cos\alpha,\alpha<90^o$

Напишимо $A=\sin 6^o \sin 42^o \sin 66^o \sin 78^o=\sin 6^o \cos 48^o \cos 24^o \cos 12^o$

$$A\cdot\cos 6^o=\sin 6^o \cos 6^o \cos 12^o \cos 24^o \cos 48^o=\frac{1}{2}\left(2\sin 6^o \cos 6^o\right)\cos 12^o \cos 24^o \cos 48^o$$

$$=\frac{1}{2}\sin 12^o \cos 12^o \cos 24^o \cos 48^o=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(2\sin 12^o \cos 12^o\right)\cos 24^o \cos 48^o=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 24^o \cos 24^o \cos 48^o=\frac{1}{8}\sin 48^o \cos 48^o=\frac{1}{16}\sin 96^o=\frac{1}{16}\sin\left(90^o+6^o\right)=\frac{1}{16}\cos 6^o$$

Према томе, вредност овог израза припада интервалу $\left(2^{-5},2^{-4}\right]$, решење под Ц)

3. Нека је $a \in R^{+} \setminus \left\{1, \frac{3}{2}\right\}$, израз $\left(\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right)^2$ је идентички једнак:

А) 2 Б) 9 Ц) $9a$ Д) $2a$ Е) $\frac{1}{2a-3}$ Н) не знам

решење:

$$\left(\frac{4a-9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}}-3a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{a-4+3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}\right)^2=\left(\frac{4a-\frac{9}{a}}{2\sqrt{a}-\frac{3}{\sqrt{a}}}+\frac{a-4+\frac{3}{a}}{\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^2=\left(\frac{\frac{4a^2-9}{a}}{\frac{2a-3}{\sqrt{a}}}+\frac{\frac{a^2-4a+3}{a}}{\frac{a-1}{\sqrt{a}}}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a}\left(4a^2-9\right)}{a(2a-3)}+\frac{\sqrt{a}\left(a^2-4a+3\right)}{a(a-1)}\right)^2=$$

Користећи квадратну једначину и претварање квадрата бинома у производ, имамо:

$$=\left[\frac{(2a-3)(2a+3)}{\sqrt{a}(2a-3)}+\frac{(a-3)(a-1)}{\sqrt{a}(a-1)}\right]^2=\left(\frac{2a+3}{\sqrt{a}}+\frac{a-3}{\sqrt{a}}\right)^2=\left(\frac{2a+3+a-3}{\sqrt{a}}\right)^2=\frac{9a^2}{a}=9a$$, решење под Ц)

4. Вредност израза $(1+i)^{2001}+(1-i)^{2001}$ је:

А) 2^{1001} Б) $2^{1002}i$ Ц) $2^{1001}i$ Д) 2^{1002} Е) $-2^{1001}i$ Н) не знам

решење:

Користимо чињеницу да је $(1+i)^2=1+2i-1=2i$

$$(1-i)^2=1-2i-1=-2i$$

као и да је $i^4=1$ и $(-1)^k=1, k\in 2n, n\in N$ (k је паран број)

$$(1+i)^{2001}+(1-i)^{2001}=(1+i)\left[(1+i)^2\right]^{1000}+(1-i)\left[(1-i)^2\right]^{1000}=$$

$$=(1+i)(2i)^{1000}+(1-i)(-2i)^{1000}=(2i)^{1000}+i\cdot(2i)^{1000}+(-2i)^{1000}-i\cdot(-2i)^{1000}=$$

$$=(2i)^{1000}+i\cdot(2i)^{1000}+(2i)^{1000}-i\cdot(2i)^{1000}=2\cdot(2i)^{1000}=$$

$$=2\cdot 2^{1000}\cdot i^{1000}=2^{1001}\cdot\left(i^4\right)^{250}=2^{1001}$$, решење под А)

2. Комбинаторика

1. Ако се регистарске таблице на аутомобилима састоје од два слова азбуке, која има 30 слова, и иза њих четвороцифреног броја (од 0000 до 9999), онда је број различитих таблица једнак:

А) $435 \cdot 10^4$ Б) $9 \cdot 10^6$ Ц) $64 \cdot 10^5$ Д) 94000 Е) $24 \cdot 10^5$ Н) не знам

решење:

Број начина на који можемо формирати уређену двојку слова, у скупу од 30 слова, је једнак варијацијама друге класе од 30 елемената, са понављањем $\overline{V}_2^{30} = 30^2 = 900$. То треба помножити са бројем бројева (којих има 10000), те је број различитих таблица једнак $900 \cdot 1000 = 9 \cdot 10^6$, решење под Б)

2. Нека је дат скуп цифара А=$\{0,1,3,5,7,9\}$. Од овог скупа треба образовати петоцифрене бројеве, тако да се ниједна цифра не понавља, и да се цифра 0 не налази ни на првом ни на последњем месту. То се може урадити на следећи број начина:

А) 720 Б) 120 Ц) 240 Д) 540 Е) 480 Н) не знам

решење:

Од укупног броја петоцифрених бројева (укључујући и оне са почетном и крајњом цифром 0) одузећемо број бројева који почињу и завршавају нулом.
Укупан број петоцифрених бројева чије се цифре не понављају једнак је V_5^6. Од тог броја треба одузети цифре које почињу нулом. Ако бисмо нулу ставили као прву цифру, имали бисмо још 5 цифара на располагању, од којих бисмо бирали 4 за образовање броја. Исто важи и за бројеве код којих је нула на последњем месту. Дакле, треба избацити $2 \cdot V_4^5$ бројева јер V_4^5 бројева почиње нулом,а исто толико завршава нулом, па је тражени резултат једнак

$$V_5^6 - 2V_4^5 = \frac{6!}{(6-5)!} - 2\frac{5!}{(5-4)!} = 480$$, решење под Е)

3. За делегацију школе треба изабрати, од 5 ученика који говоре руски, и 10 који говоре енглески језик, 5 ученика од којих бар један говори руски. То се може урадити на следећи број начина:

А) 2751 Б) 3341 Ц) 1254 Д) 475 Е) 650 Н) не знам

решење:

Најпре напишимо случајеве који се могу јавити:

1Р 4Е - $C_1^5 \cdot C_4^{10}$
2Р 3Е - $C_2^5 \cdot C_3^{10}$

3P 2E - $C_3^5 \cdot C_2^{10}$

4P 1E - $C_4^5 \cdot C_1^{10}$

5P 0E - $C_5^5 \cdot C_0^{10}$

Број начина је збир ових случајева

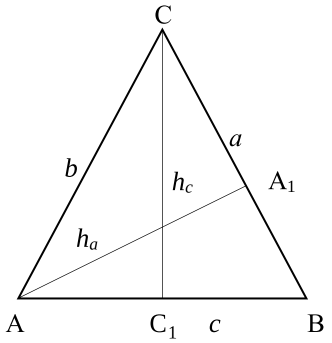
$C_1^5 \cdot C_4^{10} + C_2^5 \cdot C_3^{10} + C_3^5 \cdot C_2^{10} + C_4^5 \cdot C_1^{10} + C_5^5 \cdot C_0^{10} = 2751$, решење под А

3. Геометрија

1. У једнакокраком троуглу ABC (AC=BC) дужина основице AB=10 cm, а дужина кракова AC=BC=13 cm. Збир дужина све три висине троугла ABC је (у cm):

А) $\frac{12 \cdot 13}{33}$ Б) $\frac{13 \cdot 33}{12}$ Ц) 32 Д) 30 Е) $\frac{12 \cdot 33}{13}$ Н) не знам

решење:



c= 10 cm, b= 13 cm

Висину h_c је лако израчунати $h_c = \sqrt{b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = 12\text{cm}$

За израчунавање висине $h_a = h_b$ посматрајмо најпре троуглове ACC_1 и AA_1B. Угао A_1AB је идентичан углу C_1CB, а троуглови ACC_1 и AA_1B су правоугли и имају један угао заједнички, па су према томе слични. Из тога следи:

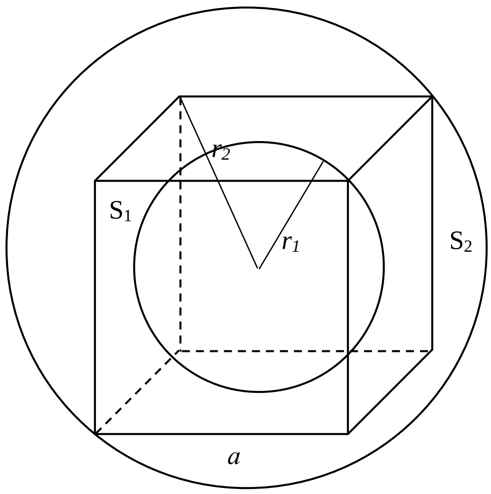
$$\frac{h_c}{a} = \frac{h_a}{c}, \quad h_a = \frac{c}{a} \cdot h_c = \frac{10}{13} \cdot 12$$

$h_a + h_b + h_c = 2 \cdot \frac{10}{13} \cdot 12 + 12 = \frac{20 \cdot 12}{13} + \frac{12 \cdot 13}{13} = \frac{33 \cdot 12}{13}$, решење под Е)

2. Сфера S_1 полупречника r_1 уписана је у коцку ивице 1, а сфера S_2 полупречника r_2 је описана око те коцке. Збир $r_1^2 + r_2^2$ једнак је:

А) 1 Б) $\sqrt{5}$ Ц) $\frac{3}{4}$ Д) $\frac{2}{3}$ Е) 2 Н) не знам

решење:



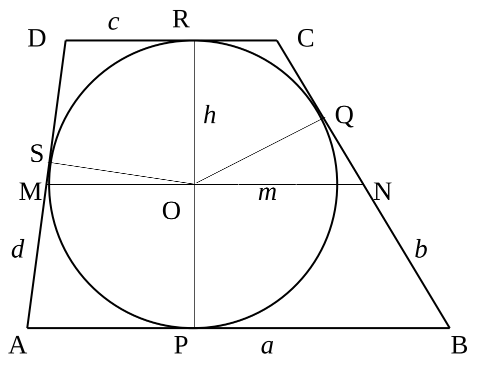
Полупречник сфере S_1 је $r_1 = \frac{a}{2} = \frac{1}{2}$, а полупречник сфере S_2 је једнак половини дужине просторне дијагонале коцке $r_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, те имамо:

$r_1^2 + r_2^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, решење под А)

3. Дужине кракова AD и BC трапеза ABCD су, редом, једнаке 6cm и 8cm. Ако се у трапез може уписати круг и ако средња линија трапеза MN дели трапез на 2 дела ABNM и MNCD чије се површине односе као 4:3 онда су дужине основица трапеза AB и CD, редом једнаке (у cm):

А) 8 и 7 Б) 12 и 6 Ц) 8 и 6 Д) 9 и 5 Е) 10 и 4 Н) не знам

решење:



$$\frac{P_{AMNB}}{P_{MNCD}} = \frac{4}{3}, \quad \frac{\cancel{\frac{1}{2}}(a+m)\cancel{\frac{h}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}(c+m)\cancel{\frac{h}{2}}} = \frac{4}{3}, \quad m = \frac{a+c}{2},$$

$$\frac{a + \frac{a+c}{2}}{c + \frac{a+c}{2}} = \frac{4}{3}, \quad \frac{3a+c}{3c+a} = \frac{4}{3},$$

$$9a + 3c = 12c + 4a, \quad 5a = 9c$$

Уочимо сада делтоиде APOS, POQB, SDRO и ROQC. Из особина делтоида добијамо $|AS| = |AP|, |BP| = |BQ|, |RC| = |CQ|, |DS| = |DR|$, па је $a+c=b+d$

(ова једнакост важи за сваки трапез око кога се може описати круг).

Дакле, имамо:

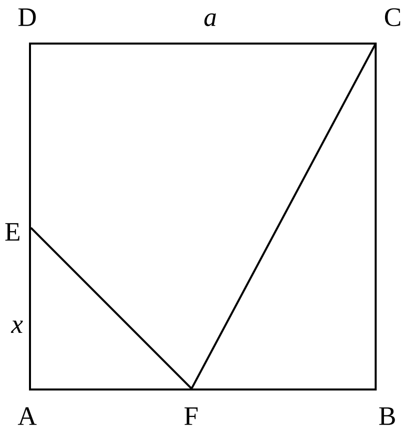
$$a+c=14$$
$$5a=9c$$

a=9, c=5, решење под Д)

4. Дужина странице квадрата ABCD је $a=1\text{cm}$. Нека су E и F тачке, редом, страница AD и AB такве да је AE=AF и да је површина четвороугла CDEF максимална. Површина четвороугла CDEF је [у cm^2]:

А) $\frac{1}{2}$ Б) $\frac{5}{8}$ Ц) $\frac{9}{16}$ Д) $\frac{19}{32}$ Е) $\frac{2}{3}$ Н) не знам

решење:



Означимо $|\text{AE}|=|\text{AF}|$ са x

Површина четвороугла CDEF ће бити једнака

$$P=a^2-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}a(a-x)$$

Очигледно је површина P функција од x. Да бисмо нашли њен максимум одредићемо први извод ове функције и изједначити га с нулом:

$$\frac{dP}{dx}=-x+\frac{a}{2}, \quad \frac{dP}{dx}=0 \Leftrightarrow x=\frac{a}{2}$$

Дакле, за $x=\frac{a}{2}$ површина четвороугла CDEF је максимална и она износи

$$P=a^2-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2-\frac{1}{2}a\left(a-\frac{a}{2}\right)=a^2-\frac{a^2}{8}-\frac{a^2}{4}=\frac{5}{8}a^2=\frac{5}{8}$$, решење под Б)

4. Аналитичка геометрија

1. Једначина праве која пролази кроз тачку $\mathrm{P}(2,3)$ и нормална је на праву $2x-y-1=0$ је:

А) $x+2y+2=0$ Б) $2x+y-7=0$ Ц) $2x+2y-10=0$

Д) $x+2y-8=0$ Е) $x-y+1=0$ Н) не знам

решење:

Услов нормалности двеју правих је:

$k_2=-\frac{1}{k_1}$, па ћемо написати праву $2x-y-1=0$ у експлицитном облику ($y=kx+n$)

$y=2x-1, k_1=2 \Rightarrow k_2=-\frac{1}{2}$. Дакле, тражена права је облика $y=-\frac{1}{2}x+n_2$

n_2 ћемо пронаћи из услова да траженој правој припада тачка P:

$$\mathrm{P}(2,3) \Rightarrow x=2, y=3$$
$$3=-\frac{1}{2}\cdot 2+n_2$$
$$n_2=3+1=4$$

$y=-\frac{1}{2}x+4$, одн. имплицитно $x+2y-8=0$, решење под Д)

2. Скуп тачака у равни чије координате x и y задовољавају једначину $x^2-4x+2y^2+4y=0$ представља:

А) кружницу Б) елипсу Ц) хиперболу

Д) параболу Е) две праве које се секу Н) не знам

решење:

Како се из задатог облика једначине не може закључити који је скуп тачака у питању, морамо извршити неколико трансформација:

$$x^2-4x+2y^2+4y-4=0$$

$$x^2-4x+4+2y^2+4y+2-10=0$$

$$(x-2)^2+2\left(y^2+2y+1\right)=10$$

$$(x-2)^2+2(y+1)^2=10 \,/ :10$$

$$\frac{(x-2)^2}{\left(\sqrt{10}\right)^2}+\frac{(y+1)^2}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=1$$

а елипсу, са центром у тачки $(2,-1)$ и полуосама $a=\sqrt{10}, b=\sqrt{5}$, решење Б)

3. Растојање центра кружнице $x^2+y^2+2x-4y+4=0$ од тачке $\mathrm{M}(-1,2)$ је:

А) 1 Б) $\sqrt{2}$ Ц) 2 Д) 0 Е) -1 Н) не знам

решење:

Најпре треба пронаћи центар дате кружнице:

$$x^2+y^2+2x-4y+4=0$$

$$x^2+2x+1+y^2-4y+4-1=0$$

$$(x+1)^2+(y-2)^2=1$$

Дакле, центар кружнице је $\mathrm{C}(-1,2)$, па је растојање једнако нули, решење под Д)

4. Растојање пресечне тачке правих $4x-3y=0$ и $y-x=1$ од координатног почетка је:

А) 7 Б) 1 Ц) -1 Д) 5 Е) -7 Н) не знам

решење:

Решавањем система једначина са две непознате наћи ћемо координате пресечне тачке:

$$\begin{aligned} 4x-3y&=0\\ y-x&=1 \end{aligned}$$

$$D=\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1 \quad D_x=\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3 \quad D_y=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=4$$

$x=\dfrac{D_x}{D}=3$, $y=\dfrac{D_y}{D}=4$

Дакле, $\mathrm{P}(3,4)$ је пресечна тачка датих правих. Растојање $\mathrm{P}(3,4)$ од $\mathrm{O}(0,0)$ је:

$d=\sqrt{3^2+4^2}=5$, решење под Д)

5. Права $kx-3y-24=0$ је тангента хиперболе $x^2-y^2=36$ ако и само ако k има вредност:

А) 5 или -5 Б) 1 или -1 Ц) 1 или -2 Д) 2 или -2 Е) 3 или -1 Н) не знам

решење:

Права тангира хиперболу ако и само ако има само једну пресечну тачку с њом. Дакле, систем једначина праве и хиперболе мора да има само једно решење

$$\begin{aligned} kx-3y-24&=0\\ x^2-y^2&=36 \end{aligned}$$

$$y=\frac{k}{3}x-8$$

Заменимо сада y у другу једначину:

$$x^2-\frac{k^2}{9}x^2+\frac{16k}{3}x-64=36$$

$$\frac{\left(9-k^2\right)}{9}x^2+\frac{16k}{3}x-100=0$$

$$\left(9-k^2\right)x^2+48kx-900=0$$

Дакле, да би права тангирала хиперболу, квадратна једначина горе мора имати само једно решење, тј. њена дискриминанта D мора бити једнака нули.

$D=b^2-4ac$, $a=9-k^2$, $b=48k$, $c=-900$

$$1296k^2=32400$$

$$k^2=25$$

$k=\pm 5$, решење под А)

$$48^2 k^2 + 3600 \cdot \left(9 - k^2\right) = 0$$

$$2304 k^2 + 32400 - 3600 k^2 = 0$$

5. Једначине

1. Производ свих решења једначине $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ је:

А) 3 Б) -3 Ц) -1 Д) -9 Е) 9 Н) не знам

решење:

Једначина се решава тако што се "разбија" на две једначине:

$$\left\{x^2 - 2x - 3 = 0 \wedge x \geq 0\right\} \vee \left\{x^2 + 2x - 3 = 0 \wedge x < 0\right\}$$

Решавањем ове две једначине добијамо:

$$\left\{x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \wedge x \geq 0\right\} \vee \left\{x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \wedge x < 0\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \wedge x \geq 0\right\} \vee \left\{x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \wedge x < 0\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\left\{x = 3 \vee x = -1\right\} \wedge x \geq 0\right\} \vee \left\{\left\{x = 1 \vee x = -3\right\} \wedge x < 0\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\left\{x = 3 \wedge x \geq 0\right\} \vee \cancel{\left\{x = -1 \wedge x \geq 0\right\}}\right\} \vee \left\{\cancel{\left\{x = 1 \wedge x < 0\right\}} \vee \left\{x = -3 \wedge x < 0\right\}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \vee x = -3$$

Производ ових решења је -9, решење под Д)

2. Колико решења у интервалу $\left(0, 2\pi\right)$ има једначина $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$?

А) ниједно Б) једно Ц) два Д) три Е) бесконачно много Н) не знам

решење:

Користимо елементарне тригонометријске идентитете:

$$\left(\cos x\right)_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2}$$

$$\left(\cos x\right)_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$

$1 - \cos^2 x + \cos x + 1 = 0 \Big/ \cdot (-1)$

$\cos^2 x - \cos x - 2 = 0$

$\cos x = 2 \vee \cos x = -1$

Прва једначина је немогућа јер је $-1 \le \cos x \le 1$, а друга има само једно решење у интервалу $\left(0, 2\pi\right)$, $x = \pi$, дакле решење под Б)

3. Једначина $|x+2| = 2(3-x)$

А) нема решења | Б) има само једно решење | Ц) има тачно два решења

Д) има тачно четири решења | Е) има бесконачно много решења | Н) не знам

решење:

Једначине које садрже апсолутне вредности израза решавају се увек тако што се "разбијају" на више једначина, при чему се изрази узимају са знаком "+" ако им је вредност позитивна и обрнуто.

$$|x+2| = 2(3-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{x+2 = 2(3-x) \wedge x+2 \ge 0\right\} \vee \left\{-(x+2) = 2(3-x) \wedge x+2 < 0\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{x+2 = 6-2x \wedge x \ge -2\right\} \vee \left\{-x-2 = 6-2x \wedge x < -2\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{3x = 4 \wedge x \ge -2\right\} \vee \left\{x = 8 \wedge x < -2\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{x = \frac{4}{3} \wedge x \ge -2\right\} \vee \left\{x = 8 \wedge x < -2\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Дакле, дата једначина има само једно решење, тачно је решење под Б)

4. Збир квадрата решења једначине $x^2 + 3\alpha x + \alpha^2 = 0$ је $\frac{7}{4}$ ако и само ако је:

А) $\alpha = 1$ Б) $|\alpha| = 1$ Ц) $\alpha = \frac{4}{3}$ Д) $|\alpha| = \frac{1}{3}$ Е) $|\alpha| = \frac{1}{2}$ Н) не знам

решење:

$x^2 + 3\alpha x + \alpha^2 = 0$

Користићемо Вијетове формуле:

Ако је $ax^2+bx+c=0$ квадратна једначина, и x_1 и x_2 њена решења, онда за x_1 и x_2 важи:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\ ,\ \ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

Тако имамо:

$$x_1+x_2=-3\alpha \Big/^{2}$$

$$x_1\cdot x_2=\alpha^2$$

$$x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=9\alpha^2$$

$$x_1^2+x_2^2=9\alpha^2-2x_1x_2$$

$$x_1^2+x_2^2=9\alpha^2-2\alpha^2$$

$$x_1^2+x_2^2=7\alpha^2$$

Према услову задатка је $x_1^2+x_2^2=\frac{7}{4}$, па је

$$7\alpha^2=\frac{7}{4}$$

$\alpha^2=\frac{1}{4}$ $\quad|\alpha|=\frac{1}{2}$, решење под Е)

5. Једначина $\sqrt{2x+14}-\sqrt{x-7}=\sqrt{x+5}$

А) има два реална позитивна решења

Б) има два реална решења од којих је само једно позитивно

Ц) има само једно реално решење

Д) има четири реална позитивна решења

Е) нема реалних решења

Н) не знам

решење:

Једначине овог типа се решавају квадрирањем, али се претходно мора "осигурати" да свака поткорена величина буде ненегативна.

$$\sqrt{2x+14}-\sqrt{x-7}=\sqrt{x+5}$$

$$2x+14\ge 0\land x-7\ge 0\land x+5\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\ge -7\land x\ge 7\land x\ge -5\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\ge 7$ - сва решења једначине која не задовољавају овај услов одбацујемо

$$\sqrt{2x+14}-\sqrt{x-7}=\sqrt{x+5}\Big/^{2}$$

$$2x+14-2\sqrt{(2x+14)(x-7)}+x-7=x+5$$

$$2\sqrt{(2x+14)(x-7)}=2x+2$$

$$\sqrt{(2x+14)(x-7)}=x+1\Big/^{2}$$

$$2x^2+14x-14x-98=x^2+2x+1$$

$$x^2-2x-99=0$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+4\cdot 99}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm 20}{2}$$

$$x_1=-9,x_2=11$$

Задржавамо само решење $x=11$, јер мора бити $x\ge 7$, дакле једначина има само једно реално решење, тачно је Ц)

6. Решење једначине $\log_3\left(3-2\cdot 3^{x+1}\right)=2+2x$ припада интервалу:

А) $[-8,-4]$ Б) $[-4,0]$ Ц) $[0,4]$ Д) $[4,8]$ Е) $[8,12]$ Н) не знам

решење:

Користећи дефиницију логаритма, претварамо дату једначину у степену једначину:

$\log_3\left(3-2\cdot 3^{x+1}\right)=2+2x$

$3^{2+2x}=3-2\cdot 3^{x+1}$

$3^{2(1+x)}=3-2\cdot 3^{x+1}$

$3^{x+1}=t$

$t^2=3-2t$

$t^2+2t-3=0$

$t_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 3}}{2}$

$t_1=-3, t_2=1$

$3^{x+1}=-3$ - немогућа једначина

$3^{x+1}=1$

$x+1=0$

$x=-1$, решење под Б)

6. Неједначине

1. За које су вредности реалног параметра m обе неједнакости $-3<\dfrac{x^2+mx-2}{x^2-x+1}<2$ задовољене за свако реално x?

А) $-6<m<-1$ Б) $-6<m<7$ Ц) $-6\le m\le 7$ Д) $-1<m<2$ Е) ни на једном Н) не знам

решење:

$$-3<\frac{x^2+mx-2}{x^2-x+1}<2$$

$$\frac{x^2+mx-2}{x^2-x+1}>-3\wedge\frac{x^2+mx-2}{x^2-x+1}<2$$

Уочимо да су корени квадратне једначине $x^2 - x + 1 = 0,\ x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$ конјуговано комплексни, а како је коефицијент уз x^2 позитиван, значи да је $x^2 - x + 1 > 0$ за све реалне *x*. Зато можемо да помножимо леву и десну страну са $x^2 - x + 1$ у обе неједначине:

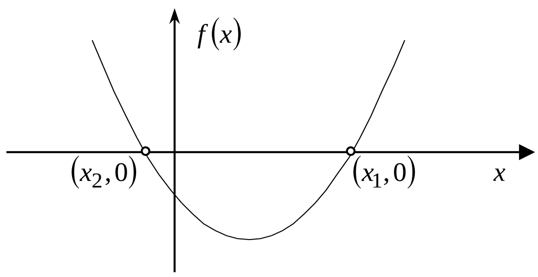
$$x^2 + mx - 2 > -3\left(x^2 - x + 1\right) \wedge x^2 + mx - 2 < 2\left(x^2 - x + 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + mx - 2 > -3x^2 + 3x - 3 \wedge x^2 + mx - 2 < 2x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + (m-3)x + 1 > 0 \wedge -x^2 + (m+2)x - 4 < 0 \Big/ \cdot (-1)$$

Неједначине овог типа је најлакше решити ако се подсетимо изгледа графика квадратне функције $f(x) = ax^2 + bx + c.$

У случају када су корени квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$ реални и различити и $a > 0$, график функције $f(x) = ax^2 + bx + c$ изгледа као на слици:

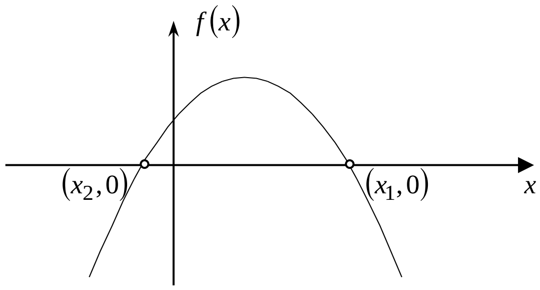


те је за $x \in (x_2, x_1) \Rightarrow f(x) < 0$, а за $x \in (-\infty, x_2) \cup (x_1, +\infty) \Rightarrow f(x) > 0$

У случају када је $x_1 = x_2, a > 0$ биће $f(x) = 0$ за $x = x_1 = x_2$, а за остале вредности *x* ће бити $f(x) > 0$.

У случају када су корени квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0, a > 0$ конјуговано комплексни, биће $f(x) > 0$ за $\forall x \in R$, тј. график функције $f(x) = ax^2 + bx + c$ ће се налазити изнад *x* осе.

У случају када је $a < 0$, за x_1, x_2 реалне и различите график функције $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ изгледа као на слици:



те је за $x \in (x_2, x_1) \Rightarrow f(x) > 0$, а за $x \in (-\infty, x_2) \cup (x_1, +\infty) \Rightarrow f(x) < 0$

За $x_1 = x_2$ и $a < 0$ биће $f(x) = 0$ за $x = x_1 = x_2$, а за остале вредности *x* ће бити $f(x) < 0$.

И на крају, за x_1 и x_2 конјуговано комплексне и $a < 0$ имаћемо да је $f(x) < 0$ за $\forall x \in R$, график функције ће се налазити испод *x* осе.

Решавамо неједначине:

$$4x^2+(m-3)x+1>0 \wedge x^2-(m+2)x+4>0$$

Да би неједначине биле задовољене за свако реално x, цео график функције $f(x)=ax^2+bx+c$ мора да се налази изнад x- осе, тј. корени једначине $ax^2+bx+c=0$ морају бити конјуговано комплексни, одн. дискриминанте $D=b^2-4ac$ морају бити мање од нуле. Тако имамо:

$$(m-3)^2-16<0 \wedge (m+2)^2-16<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m^2-6m-7<0 \wedge m^2+4m-12<0$$

Добијене неједначине решавамо по m на исти начин:

I

$$m_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+28}}{2}$$

$$m_{1,2}=\frac{6\pm 8}{2}$$

$$m_1=7,\ m_2=-1$$

Како је коефицијент уз m^2 већи од нуле, неједначина ће бити задовољена за

$$-1<m<7$$

II

$$m_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{2}$$

$$m_{1,2}=\frac{-4\pm 8}{2}$$

$$m_1=2,\ m_2=-6$$

Неједначина ће бити задовољена за $-6<m<2$

Дакле, добили смо конјункцију:

$-1<m<7 \wedge -6<m<2 \Leftrightarrow -1<m<2$, решење под Д)

2. Скуп свих решења неједначине $\log_{\frac{1}{9}}\left(x^2-4\right)\geq\log_{\frac{1}{9}}\left(2|x|-1\right)$ једнак је:

А) $[-1,3]$ Б) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ Ц) $[3,+\infty)$

Д) $(-4,-3]\cup[3,4)$ Е) $[-3,-2)\cup(2,3]$ Н) не знам

решење:

$$\log_{\frac{1}{9}}\left(x^2-4\right)\geq\log_{\frac{1}{9}}\left(2|x|-1\right)$$

Код неједначина ове врсте морамо да обратимо пажњу на то да ли је основа логаритма већа или мања од 1, јер је $f(x)=\log_a x$ опадајућа функција ако је $0<a<1$, а растућа ако је $a>1$. Пошто је у нашем случају $0<a<1$, при ослобађању од логаритма обрћемо знак, или пак можемо искористити особину логаритма

$\log_{a^s} x = \frac{1}{s}\log_a x$, што ће се у сваком случају свести на исто.

$$\log_{\frac{1}{9}}\left(x^2-4\right) \geq \log_{\frac{1}{9}}\left(2|x|-1\right)$$

$$\log_{9^{-1}}\left(x^2-4\right) \geq \log_{9^{-1}}\left(2|x|-1\right)$$

$$-\log_9\left(x^2-4\right) \geq -\log_9\left(2|x|-1\right) \Big/ \cdot(-1)$$

$$\log_9\left(x^2-4\right) \leq \log_9\left(2|x|-1\right)$$

Сада, пошто је основа већа од 1, лако се ослобађамо логаритма, с тим што водимо рачуна да величине под логаритмом морају бити позитивне :

$$x^2-4 \leq 2|x|-1$$

$$\left\{x^2-4 \leq 2x-1 \wedge x \geq 0\right\} \vee \left\{x^2-4 \leq -2x-1 \wedge x < 0\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{x^2-2x-3 \leq 0 \wedge x \geq 0\right\} \vee \left\{x^2+2x-3 \leq 0 \wedge x < 0\right\}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \qquad\qquad x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \qquad\qquad x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 3,\ x_2 = -1 \qquad\qquad x_1 = 1,\ x_2 = -3$$

Из овога добијамо:

$$\left\{x \in [-1,3] \wedge x \geq 0\right\} \vee \left\{x \in [-3,1] \wedge x < 0\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [0,3] \vee x \in [-3,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in [-3,3]$$

Како имамо ограничење да логаритмоване величине морају бити позитивне, пишемо:

$x^2-4>0 \wedge 2|x|-1>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x<-2 \vee x>2) \wedge |x|>\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty) \wedge \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},+\infty\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

Решење наше неједначине добијамо у пресеку ова два услова:

$x \in [-3,3] \wedge x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in [-3,-2) \cup (2,3]$, решење под Е)

3. Неједнакост $x+1>\sqrt{5-x}$ је тачна ако и само ако је:

А) $1<x\le 5$ Б) $x<-2$ или $x>1$ Ц) $-2<x<1$

Д) $-1<x\le 5$ Е) $x<-2$ Н) не знам

решење:

$x+1>\sqrt{5-x}$

Неједначине типа $a>\sqrt{b}$ решавају се квадрирањем, с тим што мора бити $a>0$, јер је десна страна неједначине ненегативна, и наравно, води се рачуна о услову да је $b\ge 0$.

$(x+1)^2>5-x \wedge x+1>0 \wedge 5-x\ge 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1>5-x \wedge x>-1 \wedge x\le 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+3x-4>0 \wedge -1<x\le 5$

$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}$

$x_{1,2}=\frac{-3\pm 5}{2}$

$x_1=1,\ x_2=-4$

$x \in (-\infty,-4) \cup (1,+\infty) \wedge x \in (-1,5] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (1,5]$, решење под А)

4. Неједнакост $\frac{5-2x}{x^2-6x+8}\ge 1$ је тачна ако и само ако x припада скупу:

А) $[1,2)\cup[3,4)$ Б) $(0,2)\cup(3,4]$ Ц) $[1,2)\cup[3,5)$

Д) $\left[1,3\right]$ Е) $\left(-\infty,2\right)\cup\left[\frac{5}{2},4\right)$ Н) не знам

решење:

$$\frac{5-2x}{x^2-6x+8}\geq 1 \qquad \frac{5-2x-x^2+6x-8}{x^2-6x+8}\geq 0$$

$$\frac{5-2x}{x^2-6x+8}-1\geq 0 \qquad \frac{-x^2+4x-3}{x^2-6x+8}\geq 0 \Big/\cdot(-1)$$

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-6x+8}\leq 0$$

Решавамо као дисјункцију две конјункције, тј. ако је $\frac{A}{B}\leq 0$ мора бити $\left\{A\geq 0\wedge B<0\right\}\vee\left\{A\leq 0\wedge B>0\right\}$

$$\left\{x^2-4x+3\geq 0\wedge x^2-6x+8<0\right\}\vee\left\{x^2-4x+3\leq 0\wedge x^2-6x+8>0\right\}$$

$$x^2-4x+3=0 \qquad x^2-6x+8=0$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \qquad x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm 2}{2} \qquad x_{1,2}=\frac{6\pm 2}{2}$$

$$x_1=3,\ x_2=1 \qquad x_1=4,\ x_2=2$$

$$\left\{x\in\left(-\infty,1\right]\cup\left[3,+\infty\right)\wedge x\in\left(2,4\right)\right\}\vee\left\{x\in\left[1,3\right]\wedge x\in\left(-\infty,2\right)\cup\left(4,+\infty\right)\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[3,4\right)\vee\left[1,2\right)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x\in\left[1,2\right)\cup\left[3,4\right)$, решење под А)