INFORMATION!

Før du anvender løsningerne, så husk at læs betingelserne for løsningerne, som du kan finde på hjemmesiden, eller her:
http://matematikhfsvar.page.tl/%26%238226%3B-Betingelser-matematik-B.htm

Matematik B STX 27. maj 2014

Yasmin El Youssef

Løsningsforslag

www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

$A(-2; 1) \wedge B(4; 13)$

Hældningskoefficienten a bestemmes:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{13 - 1}{4 - (-2)} = \frac{12}{4 + 2} = \frac{12}{6} = 2$$

Nu kan vi finde værdien af b:

$$b = y_1 - a \cdot x_1$$

Det kendte punkt A samt hældningskoefficienten a indtastes i formlen.

$$b = 1 - 2 \cdot (-2) = 1 + 4 = 5$$

Nu kan vi opskrive forskriften for den lineære funktion:

$$y = 2\,x + 5$$

Opgave 2

$|DE|$ bestemmes vha. forholdet mellem de to trekanters sidelængder:

$$\frac{|EF|}{|BC|} = \frac{|DE|}{|AB|} \Leftrightarrow$$

$$\frac{6}{2} = \frac{|DE|}{1.5} \Leftrightarrow$$

$$3 = \frac{|DE|}{1.5} \Leftrightarrow$$

$$|DE| = 3 \cdot 1.5 \Leftrightarrow$$

$$|DE| = 4.5$$

Opgave 3

$f(x)$ differentieres:

$$f(x) = 2x^3 + 4x + 7 = 2 \cdot 3x^{3-1} + 4 \cdot 1 + 0 = 6x^2 + 4$$

Nu kan vi bestemme $f'(1)$:

$$f'(1) = 6 \cdot 1^2 + 4 = 6 \cdot 1 + 4 = 6 + 4 = 10$$

Opgave 4

Først finder vi x-koordinaten til toppunktet:

$$f(x) = 4x^2 - 8x + 2$$

$$T_x = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{(-8)}{2 \cdot 4} = \frac{8}{2 \cdot 4} = \frac{8}{8} = 1$$

Nu kan vi bestemme $f(1)$ og dermed toppunktets y-koordinat:

$$f(1) = 4 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 2 = 4 \cdot 1 - 8 + 2 = 4 - 6 = -2$$

Koordinatsættet til parablens toppunkt kan nu opskrives som:

$$T_{f(x)} = (1; -2)$$

Opgave 5

Først bestemmes proportionalitetskonstanten b :

$$4 = b \cdot 10^{-1} \Leftrightarrow b = \frac{4}{10^{-1}} = 4 \cdot 10 = 40$$

$$y = 40 \cdot x^{-1}$$

Lad $f(x) = 40 \cdot x^{-1}$, så er

$$f(20) = 40 \cdot 20^{-1} = \frac{40}{20} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\begin{bmatrix} x & 10 & 20 \\ y & 4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{tabulate}}$$

x	10	20
y	4	2

Opgave 6

Først findes alle stamfunktioner til $f(x)$:

$$f(x) = 6x^2 - 8x$$

$$F(x) = \int f(x)\, dx = \int 6x^2 - 8x\, dx = \frac{6}{2+1}x^{2+1} - \frac{8}{1+1}x^{1+1} = \frac{6}{3}x^3 - \frac{8}{2}x^2 = 2x^3 - 4x^2 + C$$

Vi indsætter nu punktet P og bestemmer C:

$$F(x) = 2x^3 - 4x^2 + C \wedge P(2; 13) \Leftrightarrow$$

$$13 = 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2^2 + C \Leftrightarrow$$

$$13 = 2 \cdot 8 - 4 \cdot 4 + C \Leftrightarrow$$

$$13 = 16 - 16 + C \Leftrightarrow$$

$$C = 13$$

Derfor må forskriften for netop denne stamfunktion være lig:

$$F(x) = 2x^3 - 4x^2 + 13$$

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Opgave 7

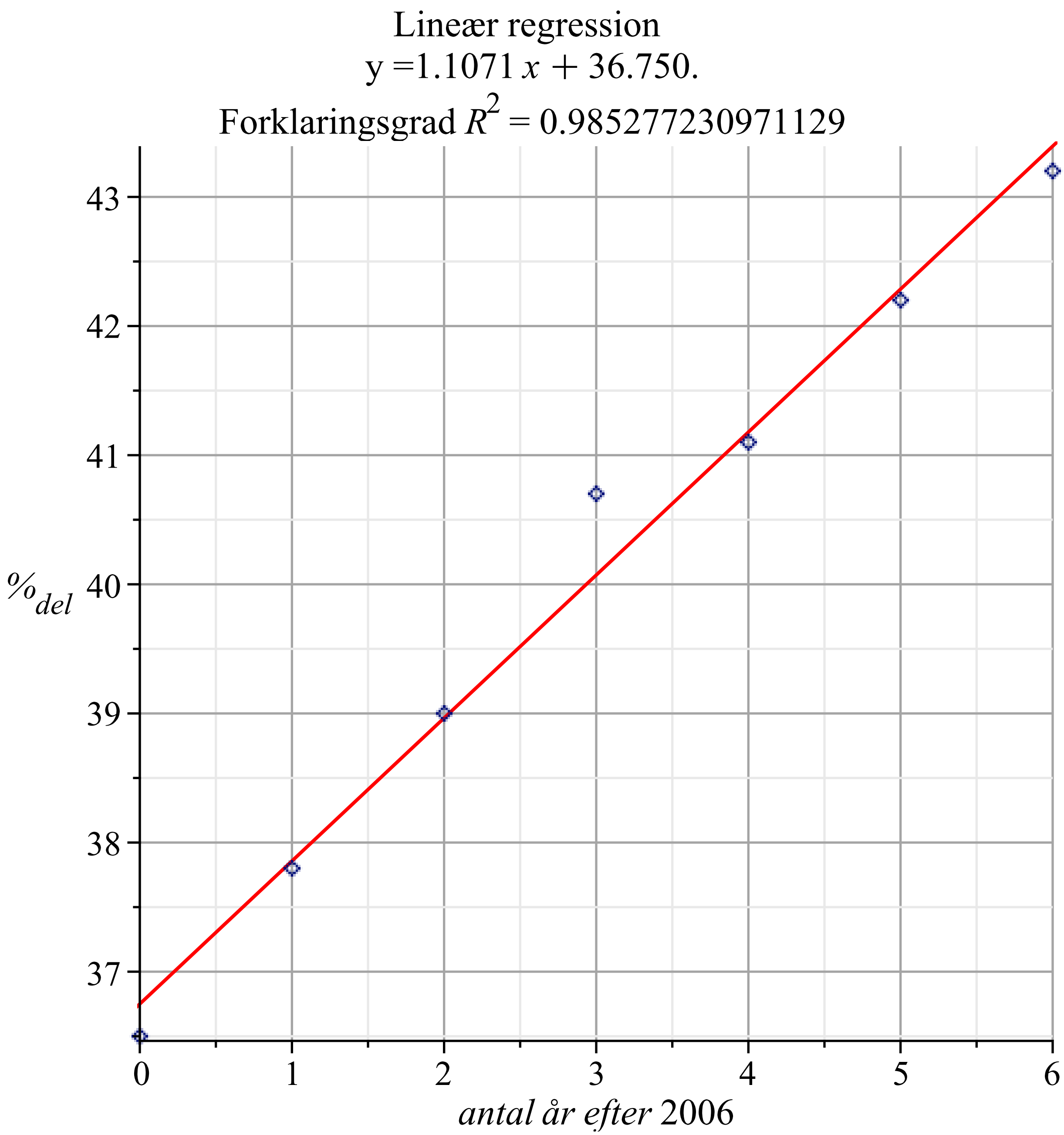
restart :; *with*(*Gym*) :

Spørgsmål a

Tabellen indtastes i en matrix, hvorefter der bliver udført lineær regression:

$$data := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 36.5 & 37.8 & 39.0 & 40.7 & 41.1 & 42.2 & 43.2 \end{bmatrix}:$$

$LinReg(data)$



Vi kan nu aflæse den tilnærmelsesvise lineære forskrift herunder hældningskoefficienten a og konstanten b:

$y = ax + b$

$y = 1.1\ x + 36.8 \Leftrightarrow$

$a = 1.1 \wedge b = 36.8$

Spørgsmål b

Procentdelen i år 2015 bestemmes:

$f(x) := 1.1\, x + 36.8$:

$2015 - 2006 = 9$

$f(9) = 46.7$

I år 2015 vil der dermed være 46.7 % af de 35-årige, der har gennemført en videregående uddannelse

Vi sætter nu $f(x) = 50$ og isolerer x:

$f(x) = 50 \Leftrightarrow$

$1.1\, x + 36.8 = 50 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 12.]]$

$2006 + 12 = 2018$

I år 2018 vil procentdelen dermed nå 50 %

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :

Spørgsmål a

Den lodrette afstand a bestemmes vha. Pythagoras' læresætning:

$a^2 + b^2 = c^2$

$a^2 + \left(\frac{30}{2}\right)^2 = 50^2 \Leftrightarrow$

$a^2 = 50^2 - 15^2 \xrightarrow{\text{solve for a}} [[a = 5\sqrt{91}], [a = -5\sqrt{91}]]$

$a = 5\sqrt{91} = 47.68\ cm$ er dog det korrekte resultat, da vi anvender den numeriske værdi for a , da en sidelængde jo ikke kan være negativ.

Spørgsmål b

Vinkel v findes ved brug af trigonometri herunder tangensfunktionen:

$\tan(v) = \frac{\textit{modstående katete}}{\textit{hosliggende katete}}$

$$\tan(v) = \frac{5\cdot\sqrt{91}}{\left(\frac{30}{2}\right)} \Leftrightarrow$$

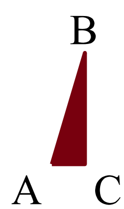
$$v := invTan\left(\frac{5\cdot\sqrt{91}}{15}\right) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 72.542$$

Vi ser nu at vinkel v svarer til cirka 72.54°

Vi kunne dog også have brugt Maples indbyggede trekantsberegner (findes under start ⇒ apps ⇒ trekantsberegning)

TREKANTSBEREGNER

Vinkel i gra...	Sidel...
A: 72.54	a: 47.70
B: 17.46	b: 30/2
C: 90	c: 50
Indtast præcis 3 oplys...	
Ber...	...
Slet...	



Alternativt kan vi også bruge genvejen *trekantsolve* :

$$trekantsolve\left(C = 90, c = 50, b = \frac{30}{2}\right) = \{A = 72.54, B = 17.46, a = 47.70\}$$

Igen kan vi aflæse vinkel v, som i dette tilfælde er lig A som værende 72.54°

Spørgsmål c

Vinklen mellem sædet og ryglænet bestemmes vha. cosinusrelationer:

$$\cos(C) = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \cdot a \cdot b}$$

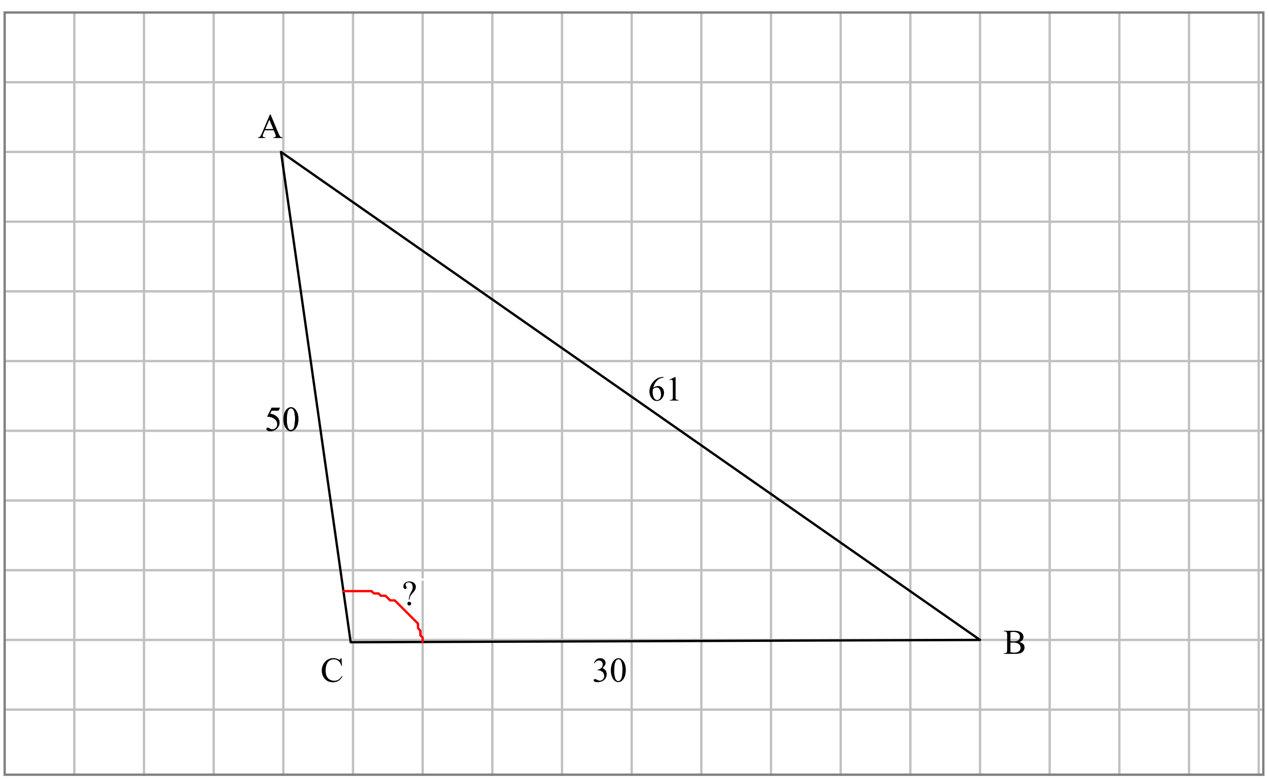
$$\cos(A) = \frac{30^2 + 50^2 - 61^2}{2 \cdot 30 \cdot 50} \Leftrightarrow$$

$$C = invCos\left(\frac{30^2 + 50^2 - 61^2}{2 \cdot 30 \cdot 50}\right) \Leftrightarrow C = 96.14$$

Vinklen mellem sædet og ryglænet må dermed svare til 96.14°

Alternativt kan vi finde vinklen vha. *trekantsolve* :

$$trekantsolve(a = 30, b = 50, c = 61) = \{A = 29.27, B = 54.58, C = 96.14\}$$



Vi kan nu igen aflæse den søgte vinkel C som værende 96.14°, og dermed er resultatet bekræftet som værende sand

Opgave 9

$restart :; with(Gym) :$

Spørgsmål a

Befolkningstallet i år 2015 bestemmes vha. modellen:

$f(x) := 2586 \cdot 1.017^{x} :$

$2015 - 1950 = 65$

$f(65) = 7735.537$

Det forudsete befolkningstal i 2015 er cirka lig 7735.537 mio. eller $7.736 \cdot 10^{9}$

Spørgsmål b

$f(x) = 2586 \cdot 1.017^{x}$

Her beskriver konstanten b befolkningstallet i år 1950 som værende 2586 mio.

Hvorimod fremskrivningsfaktoren a er et udtryk for en positiv stigning i befolkningstallet på 1.7 % for hvert år sammenlignet med det forrige år.

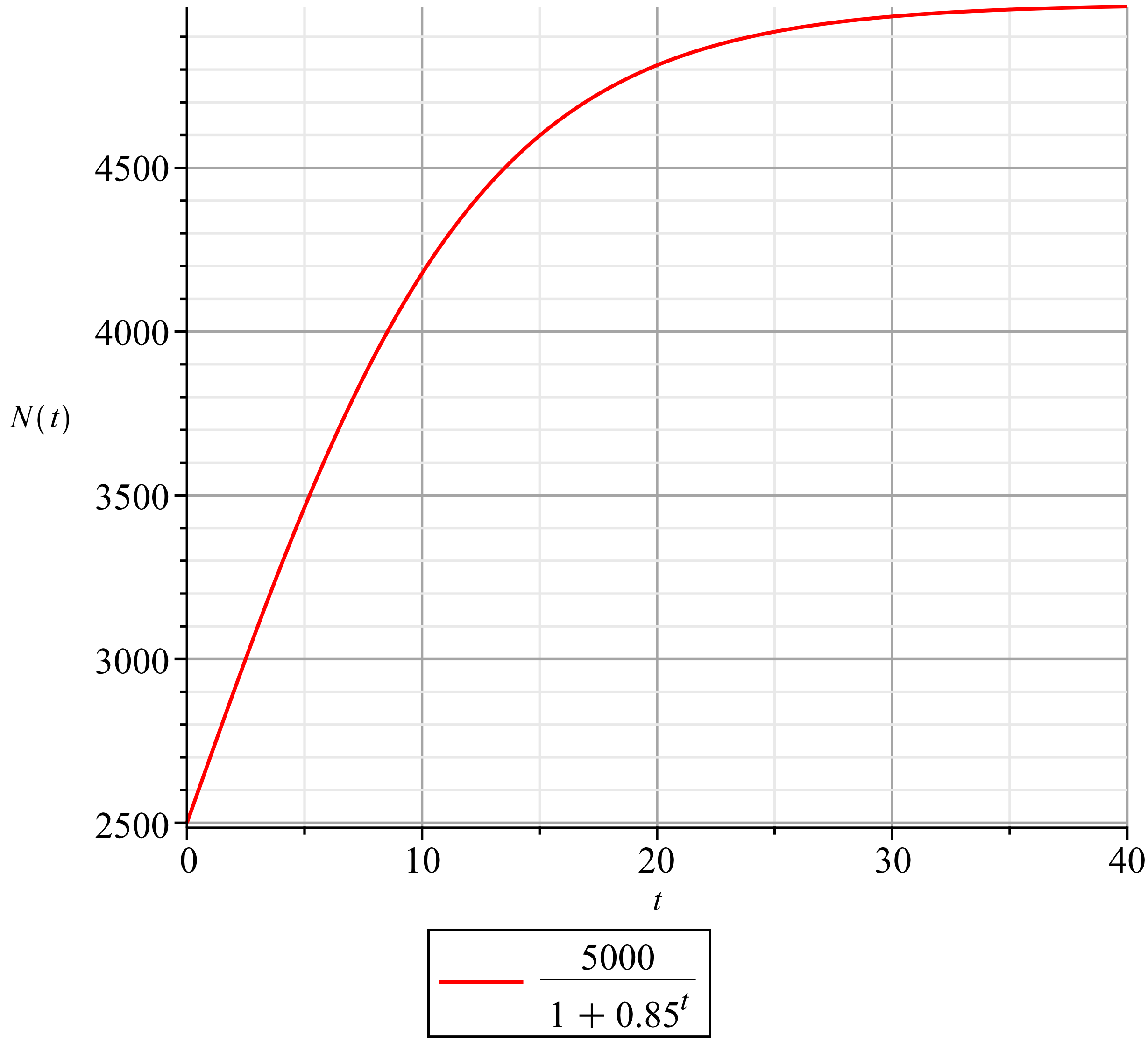
Opgave 10

$restart :; with(Gym) :$

Spørgsmål a

$$N(t) := \frac{5000}{1 + 0.85^{t}} :$$

$plot(N(t), t = 0 ..40, legend = N(t), color = red, gridlines)$



For at bestemme tidspunktet med 4000 individer sættes $N(t) = 4000$, og t isoleres:

$$4000 = \frac{5000}{1+0.85^t} \xrightarrow{\text{solve for t}} [[t = 8.53]]$$

Når der er gået cirka 8.53 uger, vil der være 4000 individer i populationen

Spørgsmål b

$$N(t) := \frac{5000}{1+0.85^t}:$$

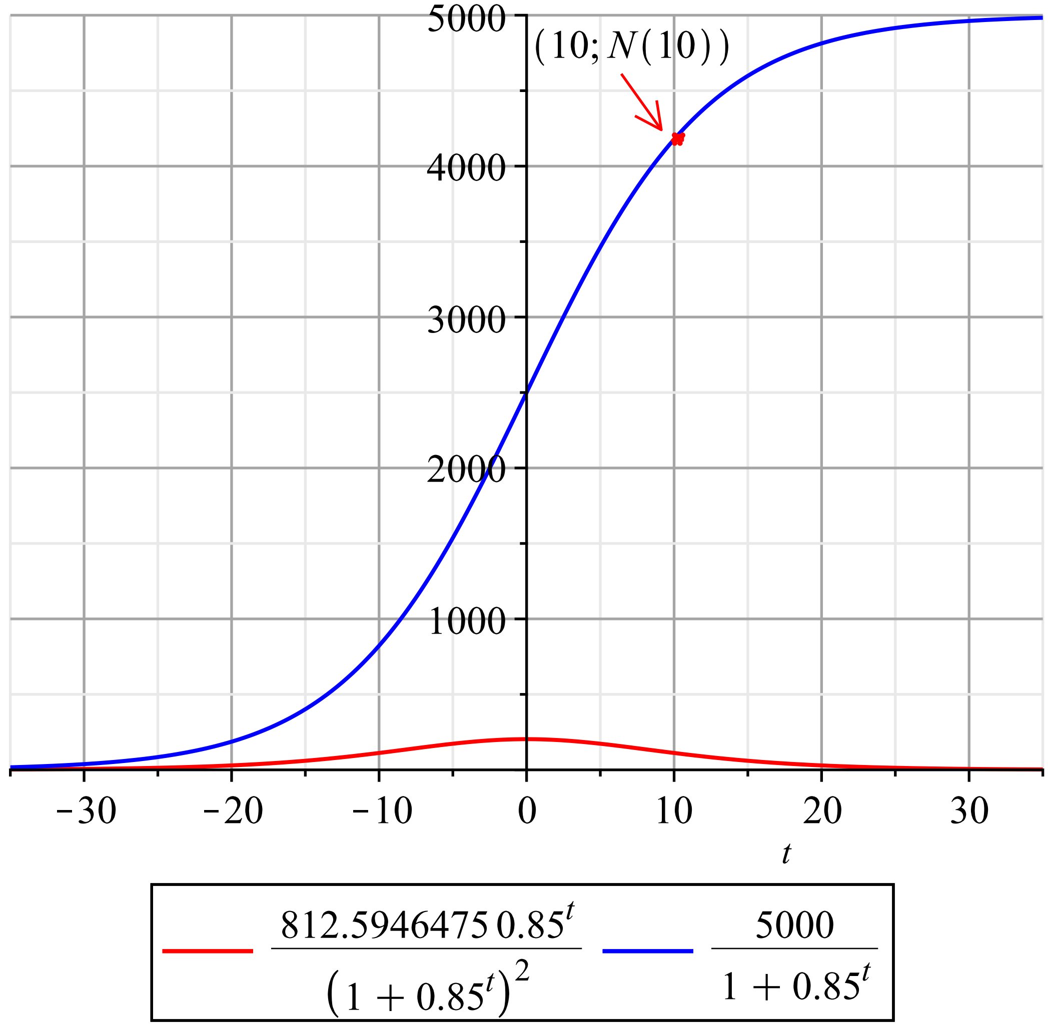
$$N'(t) = \frac{812.5946475\ 0.85^t}{\left(1+0.85^t\right)^2}$$

$$N'(10) = 111.68$$

Hvilket må betyde, at tangenten for grafen $N(t)$ i punktet $(10; f(10))$ har en hældning svarende til 111.68 dvs. for hvert år der går, øges populationen med 111.68 individer ifølge modellen efter 10 uger.

Her ses de to grafer for $N(t)$ og $N'(t)$ plottet i samme koordinatsystem:

$plot([N'(t), N(t)], t=-35..35, y=0..5000, color=[red, blue], legend=[N'(t), N(t)], gridlines)$



Opgave 11

$restart :; with(Gym) :$

Spørgsmål a

Vi finder det afgrænsede areal M ved at benytte et bestemt integral med grænserne 0 til 2:

$f(x) := 0.25\, x^3 - 0.75\, x^2 + 2 :$

$M := \int_0^2 f(x)\,dx = 3.$

Arealet af M er dermed lig med $3\ cm^2$

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :

Spørgsmål a

Vi opstiller en nulhypotese samt en tabel med de forventede værdier:

H_0 : Resultatet af den oplevede virkning er uafhængig af mængden af dosis.

$$Obs := \begin{bmatrix} 55 & 70 & 75 \\ 62 & 76 & 62 \\ 78 & 78 & 44 \end{bmatrix} :$$

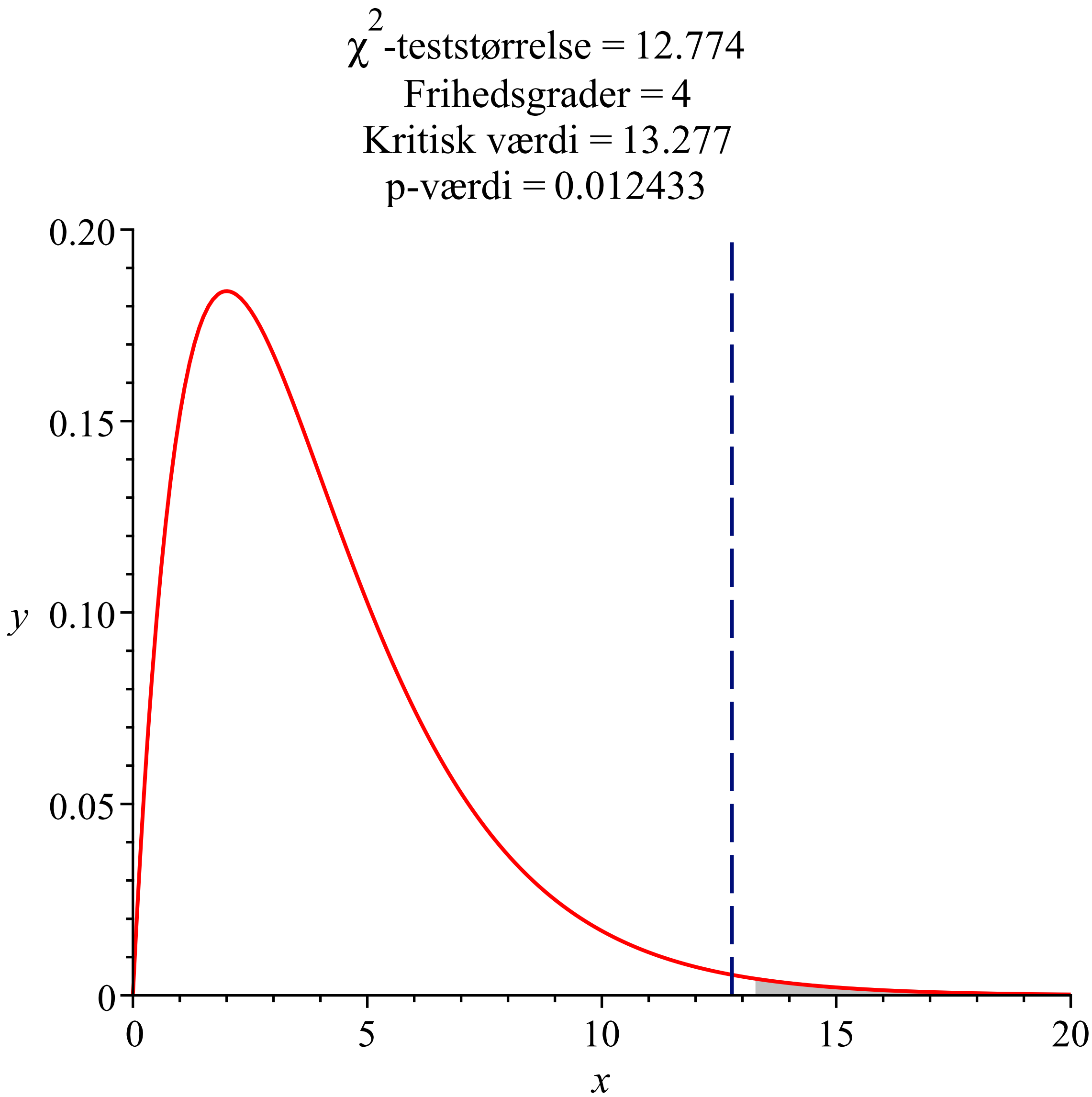
$$forventet(Obs) = \begin{bmatrix} 65. & 74.667 & 60.333 \\ 65. & 74.667 & 60.333 \\ 65. & 74.667 & 60.333 \end{bmatrix}$$

	Forbedring	Ingen virkning	Forværring	Total
Gruppe 1	$\frac{200 \cdot 195}{600} = 65$	$\frac{200 \cdot 224}{600} = 74.667$	$\frac{200 \cdot 181}{600} = 60.333$	$55 + 70 + 75 = 200$
Gruppe 2	$\frac{200 \cdot 195}{600} = 65$	$\frac{200 \cdot 224}{600} = 74.667$	$\frac{200 \cdot 181}{600} = 60.333$	$62 + 76 + 62 = 200$
Gruppe 3	$\frac{200 \cdot 195}{600} = 65$	$\frac{200 \cdot 224}{600} = 74.667$	$\frac{200 \cdot 181}{600} = 60.333$	$78 + 78 + 44 = 200$
Total	$55 + 62 + 78 = 195$	$70 + 76 + 78 = 224$	$75 + 62 + 44 = 181$	$200 + 200 + 200 = 600$

Spørgsmål b

Der udføres en χ^2-test for at undersøge, om nulhypotesen kan forkastes på et 1% signifikansniveau:

$$ChiKvadratUtest\left(\begin{bmatrix} 55 & 70 & 75 \\ 62 & 76 & 62 \\ 78 & 78 & 44 \end{bmatrix}, level = 0.01\right)$$



Med en p-værdi > 0.01 accepteres nulhypotesen på et 1% signifikansniveau

Opgave 13

$restart :; with(Gym) :$

Spørgsmål a

Vi sætter $f(x) = 0$ og isolerer x :

$f(x) := x^3 - 2x^2 - 11x + 12 :$

$f(x) = 0$

$x^3 - 2x^2 - 11x + 12 = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 1], [x = -3], [x = 4]]$

Vi er nu kommet frem til, at grafen $f(x)$ har de tre løsninger $x_1 = 1 \vee x_2 = -3 \vee x_3 = 4$

Spørgsmål b

Først bestemmes $f'(x)$:

$f(x) := x^3 - 2x^2 - 11x + 12 :$

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 11$

$f'(x)$ sættes nu lig 9, hvorefter x isoleres:

$f'(x) = 9 \Leftrightarrow$

$3x^2 - 4x - 11 = 9 \xrightarrow{\text{solve for x}} \left[\left[x = \frac{10}{3}\right], [x = -2]\right]$

Ifølge grafen er punktet A placeret i koordinatsystemets 2. kvadrant, og dermed må dens tilfhørende x-værdi være lig -2.

Punktet B er derimod placeret i 4. kvadrant og må derfor have en positiv x-værdi svarende til $\frac{10}{3}$.