Matematik A-niveau STX
11. august 2011
Eksamenstræning
www.matematikhjaelp.tk

Forord:
I opgaven benyttes . fremfor , således I ikke bliver forvirret.

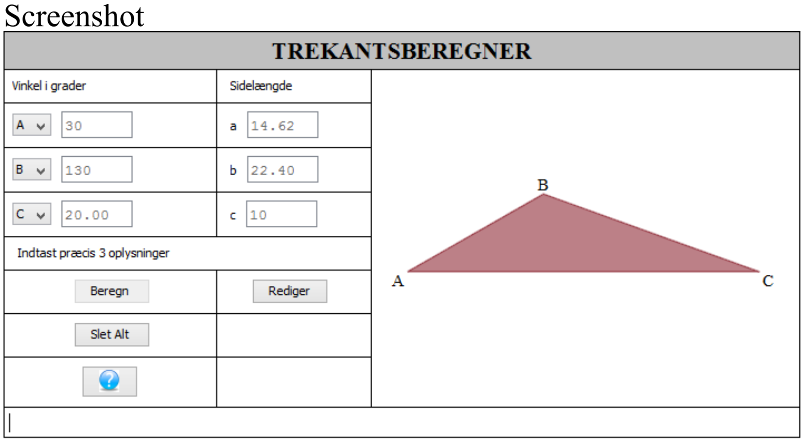
Opgave 7 - Trigonometri

restart
with(*Gym*) :

Opgaven løses v.h.a. Maple's trekantsberegner

Delopgave a

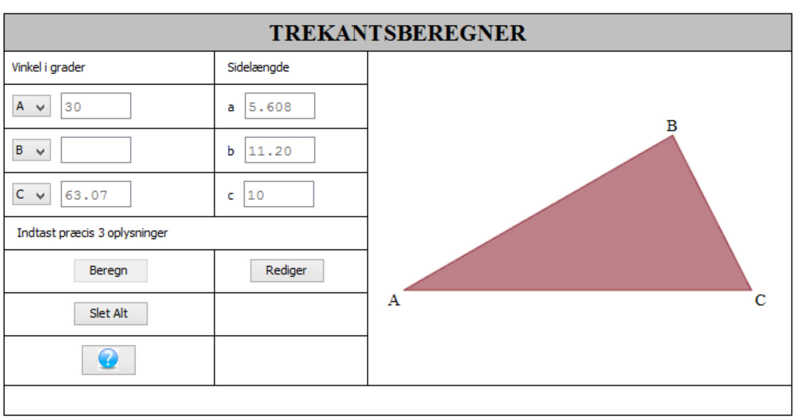
Screenshot



Således blev $|AC|$ bestemt til 22.40

Delopgave b

Det oplyses, at D placeres midt i mellem $|AC|$, altså må $|AD|$ og $|CD|$ være 11.20. Der tages udgangspunkt i trekant ABD



Dette kunne også gøres v.h.a. den anden side, trekant BCD, da der er tilstrækelige oplysninger.
Længden $|BD|$ blev bestemt til 5.608

Opgave 8 - Statistik

restart
with(Gym) :

$obs := [23, 25, 27, 27, 27, 28, 29, 29, 30, 30, 32, 32, 33, 34, 34, 35, 35, 38, 38, 39, 42, 45, 50]$

$$[23, 25, 27, 27, 27, 28, 29, 29, 30, 30, 32, 32, 33, 34, 34, 35, 35, 38, 38, 39, 42, 45, 50] \quad \textbf{(2.1)}$$

Delopgave a

Der undersøges for et kvartilsæt. Dette kan let gøres ved følgende kommando:

kvartiler(obs)

$$[28., 32., 38.] \quad \textbf{(2.1.1)}$$

Dette er kvartilsættet, der angiver for hhv. 25, 50 og 75% af elevernes håndtryk i styrke.
Maple udregner ikke den mindste og største observation, korrekt set er kvartilsættet
$Største = 50$

$$Største = 50 \quad \textbf{(2.1.2)}$$

$Øvre\ kvartil = 38$

$$Øvre\ kvartil = 38 \quad \textbf{(2.1.3)}$$

$Median = 32$

$$Median = 32 \quad \textbf{(2.1.4)}$$

$Nedre\ kvartil = 28$

$$Nedre\ kvartil = 28 \quad \textbf{(2.1.5)}$$

$Mindste = 23$

$$Mindste = 23 \quad \textbf{(2.1.6)}$$

Opgave 9 - Lineære funktioner

restart
with(Gym) :

$L1 := [688, 795, 878, 999]$

$$[688, 795, 878, 999] \quad \textbf{(3.1)}$$

$L2 := [50, 100, 150, 200]$

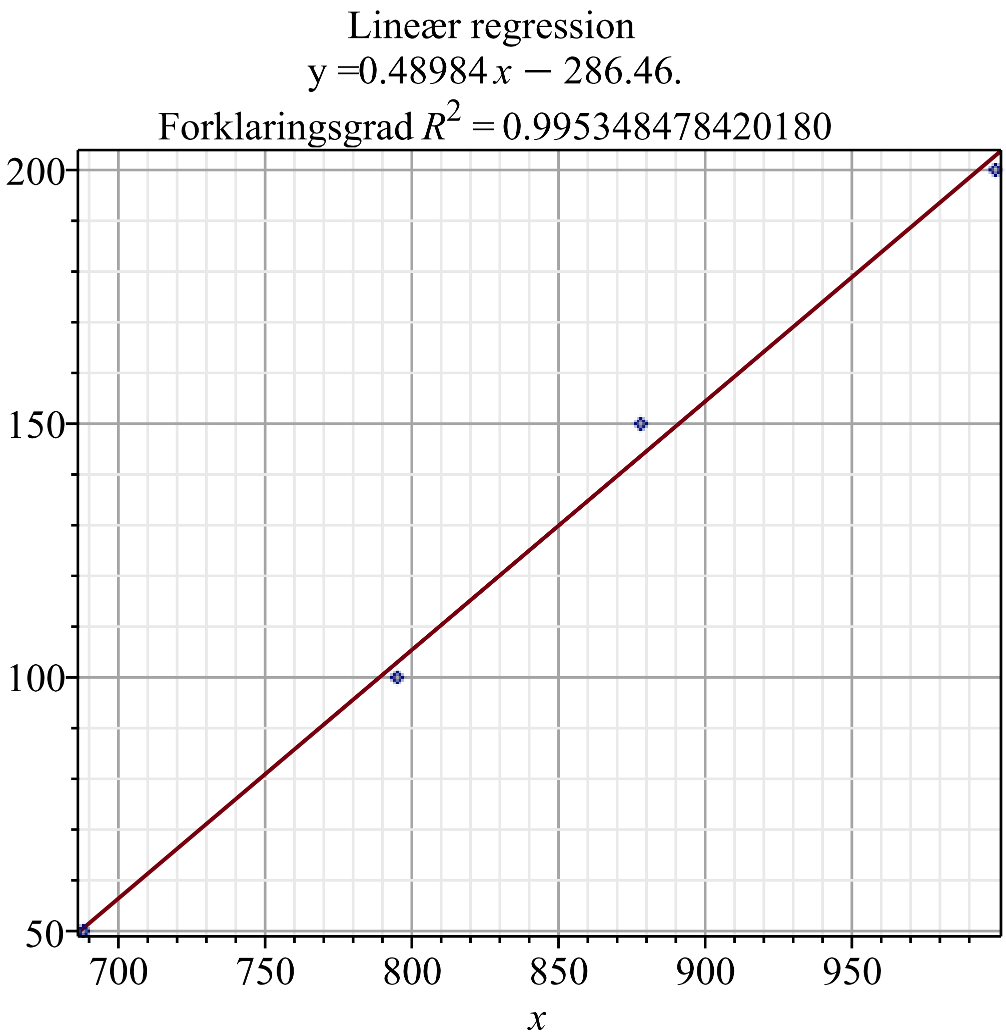
$$[50, 100, 150, 200] \quad \textbf{(3.2)}$$

Der udføres regression (lineær)

Delopgave a

Konstanterne a og b kan bestemmes ud fra de definerede oplysninger v.h.a. lineær regression.

LinReg(*L1*, *L2*)



Modellen med konstanterne *a* og *b* blev bestemt til

$f(x) := 0.48984\,x - 286.46$

$$x \rightarrow 0.48984\,x - 286.46 \quad \textbf{(3.1.1)}$$

Delopgave b

Der løses en ligning for *f*.

$f(950)$

$$178.88800 \quad \textbf{(3.2.1)}$$

Så den gennemsnitlige vægt af moderkagen er 178.888 gram.

Opgave 10 - Eksponentielle funktioner

restart
with(*Gym*) :

Funktionen

$f(x) := 3600 \cdot 0.8544^x$

$$x \rightarrow 3600\ 0.8544^x \quad \textbf{(4.1)}$$

Delopgave a

Ved indsættelse af 0 fås

$f(0)$

$$3600.0 \quad \textbf{(4.1.1)}$$

Så i år 2002 er bestanden 3600 tigere.

$a := 0.8544$

$$0.8544 \quad \textbf{(4.1.2)}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{\log_{10}(a)}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{14.63298420 \ln(2)}{\ln(10)} \quad \textbf{(4.1.3)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$T_{\frac{1}{2}} = 4.4050 \quad \textbf{(4.1.4)}$$

Efter 4.40 eller i år 2006 april måned ca. vil bestanden være halveret.

Delopgave b

Den årlige vækstrate kan bestemmes ved

$a = 1 + r$, hvor a anvendes fra tidligere.

$a = 1 + r$

$$0.8544 = 1 + r \quad \textbf{(4.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for r}}$

$$[[r = -0.1456000000]] \quad \textbf{(4.2.2)}$$

$-0.1456000000 \cdot 100$

$$-14.56000000 \quad \textbf{(4.2.3)}$$

Så for hvert år der går, falder bestanden med 14.56%.

Delopgave c

$f'(5)$

$$-257.9238390 \quad \textbf{(4.3.1)}$$

Dvs. for hvert år der går, udgår 257 tigere efter år 2007 idet 2002+5=2007.

Opgave 11 - Differentialregning

restart
with(*Gym*) :

Funktionen
$f(x) := x^4 - 8x^2 + 1$

$$x \rightarrow x^4 - 8x^2 + 1 \tag{5.1}$$

Delopgave a

Den definerede funktion $f(x)$ sættes lig med 0.

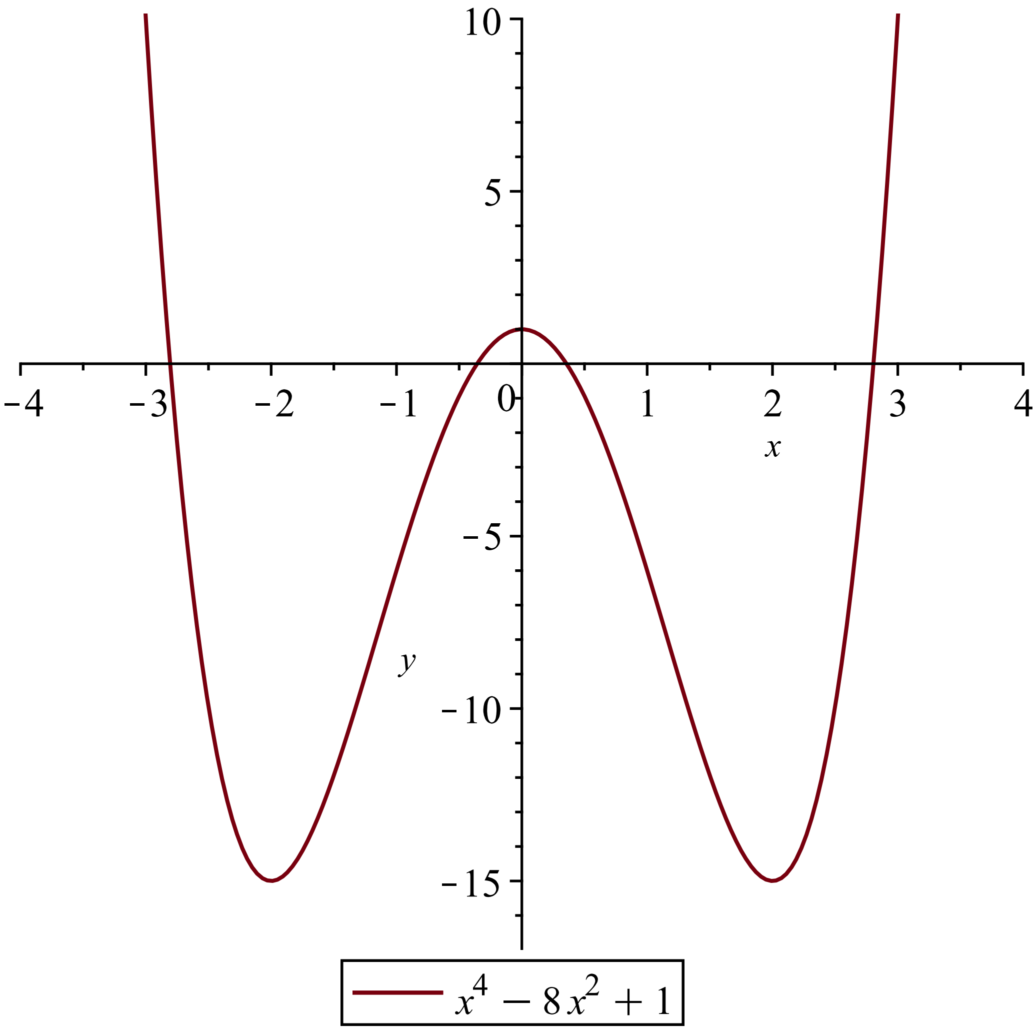
$f(x) = 0$

$$x^4 - 8x^2 + 1 = 0 \tag{5.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = \frac{1}{2}\sqrt{10} - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right], \left[x = -\frac{1}{2}\sqrt{10} + \frac{1}{2}\sqrt{6}\right], \left[x = \frac{1}{2}\sqrt{10} + \frac{1}{2}\sqrt{6}\right], \left[x = -\frac{1}{2}\sqrt{10} - \frac{1}{2}\sqrt{6}\right]\right] \tag{5.1.2}$$

Den kan plottes v.h.a. følgende kommando:
$plot([f(x)], x = -4..4, y = -17..10, legend = [f(x)])$



Dvs. 4 reelle rødder. (Som man også kunne se over grafen).

Delopgave b

Tangentligningen til f undersøges, punktet $P(3, f(3))$ er angivet.

$y = f'(3) \cdot (x-3) + f(3)$

$$y = 60x - 170 \tag{5.2.1}$$

Dette er tangenthældningen, udført i Maple.

Delopgave c

Monotoniforholdene bestemmes v.h.a. differentiering

$f'(x) = 0$

$$4x^3 - 16x = 0 \tag{5.3.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 0], [x = 2], [x = -2]] \tag{5.3.2}$$

Man kan aflæse på grafen ovenfor hvordan den afledede vil forløbe sig, men der udregnes for om hvornår f er voksende og aftagende. Der vælges x-værdier der er forskelligt fra rødderne til førsteaksen.

$f'(-3)$

$$-60 \tag{5.3.3}$$

$f'(-1)$

$$12 \tag{5.3.4}$$

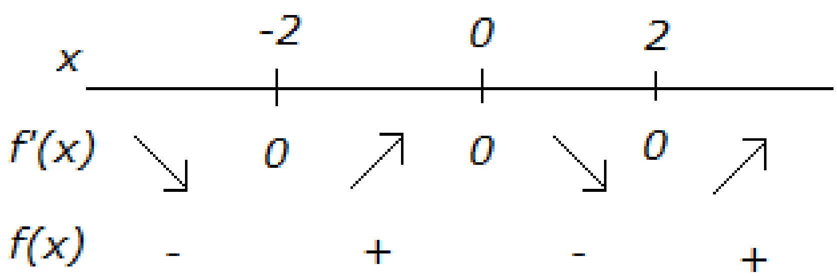
$f'(1)$

$$-12 \tag{5.3.5}$$

$f'(3)$

$$60 \tag{5.3.6}$$

Dette danner et overblik over, hvornår f er voksende og aftagende. En monotonilinje tegnes.



Det passer godt med grafen fra delopgave a.

Derfor er f:
aftagende i intervallet $]-\infty;-2]$
voksende i intervallet $[-2;0]$
aftagende i intervallet $[0;2]$
voksende i intervallet $[2;\infty[$

Opgave 12 - Integralregning

restart
with(*Gym*) :

Funktionen
$f(x) := x^3$:
Linjen
$g(x) := 8$:

Delopgave a

Arealet M bestemmes ved:

$$M = \int_0^2 g(x) - f(x)\, dx$$

$$M = 12 \tag{6.1.1}$$

Fordi 0 og 2 er grænseområderne og $g(x)$ ligger øverst på førstekvadrant. Derved er arealet 12.

Opgave 13 - Optimering

restart
with(Gym) :

Modellen

$V(x) := \frac{2}{1} \cdot (16 - x^2)x$

$$x \rightarrow (32 - 2\,x^2)\,x \tag{7.1}$$

Delopgave a

Overfladearealet udtrykt ved x og y udføres således:
Der er 2 bredder, 2 længder og 2 højder. Derfor:
$\mathrm{O} = 2 \cdot x \cdot x + 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot y$

$$\mathrm{O} = 2\,x^2 + 4\,x\,y \tag{7.1.1}$$

Dette er udtrykket, både med x og y.

Delopgave b

Der skal bestemmes for den værdi, der giver den størst mulige rumfang.

$V'(x) = 0$

$$-6\,x^2 + 32 = 0 \tag{7.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = -\frac{4}{3}\sqrt{3}\right], \left[x = \frac{4}{3}\sqrt{3}\right]\right] \tag{7.2.2}$$

$x = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

$$x = \frac{4}{3}\sqrt{3} \tag{7.2.3}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$x = 2.3094 \tag{7.2.4}$$

Den anden rod forkastes pga. begrænsningen $0 < x < 4$

Der vælges tal der ikke er det samme som rodden.

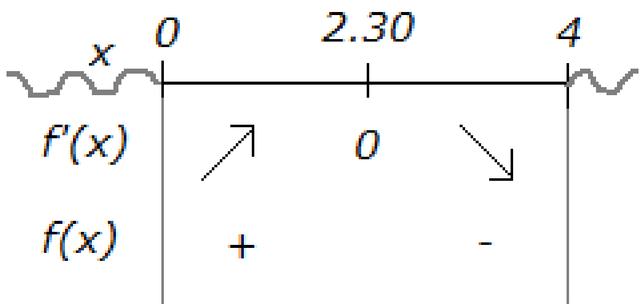
$V'(2)$

$$8 \tag{7.2.5}$$

$V'(3)$

$$-22 \tag{7.2.6}$$

Dvs. dette giver et billede af, hvornår det er muligt at have den størte rumfang.



I GeoGebra tegnes dette.