

Ortvay megoldások 2.

A jelen cikk a 2016.évi 10. , illetve a 2017.évi 9. , 16. illetve 40. feladatokat, illetve azok megoldásait tartalmazza.

A jelen megoldásokat Gombkötő Ákos állította össze.

A 2016/10. és 2017/40. feladatok megoldásának leírásában Asztalos Bogdán végzett alapvető szerepet.

Köszönet a szervezőknek és a feladatok kitűzőinek a megoldásokkal kapcsolatos észrevételeikért, valamint minden feladatmegoldónak!

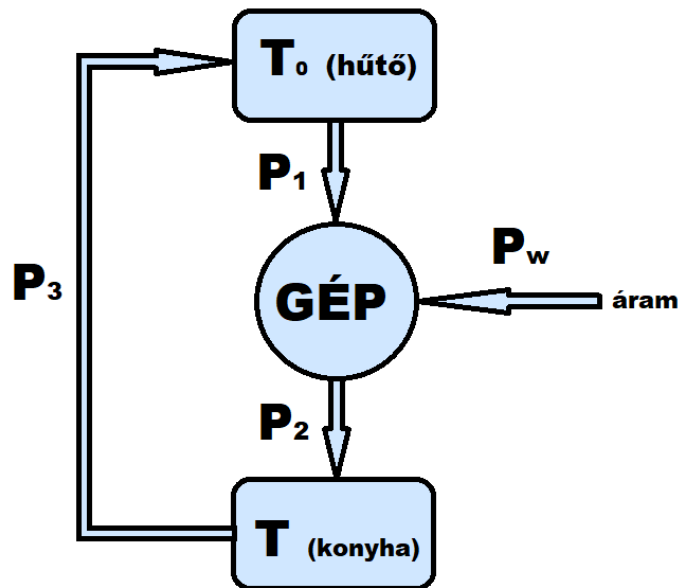
2016/10. Feladat

Egy tökéletesen hőszigetelt konyhában bekapcsolunk egy hűtőszekrényt. Hogyan változik időben a fridzsider átlagos áramfelvétele? Tegyük fel, hogy a hűtőszekrény ideális hatásfokú hőpumpaként működik!

(Bodor András)

A hűtőszekrény funkciója az, hogy a belsejében fenntartsion egy, a külső szobahőmérsékletnél alacsonyabb T_0 hőmérsékletet. Természetesen ekkor a hőáramlásnak lesz egy befelé irányuló komponense. Mivel a hűtőszekrény belseje működés közben hidegebb mint a környezete, ezért a hűtőszekrény tulajdonképpeni működése abból áll, hogy hőt pumpál belülről a környezetébe. Ez csak egy gép munkavégzésével lehetséges. Ehhez a gép áramot vesz fel, és ennek munkáját hasznosítja.

A konyha-hűtőszekrény belseje-gép rendszer energiaáram viszonyai az 1. ábrán láthatóak. P_1 az a hőteljesítmény, amit a hűtőgép felvesz a hűtőszekrény belsejéből, P_2 az, amit lead a konyhának. Ahhoz, hogy ez végbemehessen, a gépnek energiát kell felvennie kívülről, ennek teljesítménye P_W . És végül, mivel a konyha melegebb, mint a hűtőszekrény, van egy folyamatos P_3 hőáramlás is a konyha és a hűtő között.



1. ábra. A hőáramlás módja hűtőszekrény-konyha rendszerben.

Mivel hűtőgép a hűtő belsejének hőmérsékletét állandóan tartja, az oda beáramló és kiáramló

energiaáramok egyenlők, azaz

$$P_1 = P_3. \quad (0.1)$$

Mivel a konyha melegebb, folyamatosan hőt ad át a hűtőnek. Ilyen hétköznapi körülmények esetén, a hőátadás fő formája a hővezetés és a konvekció. Az effektív hőátadás mértéke jó közelítéssel a konyha és a hűtő belseje közti hőmérséklet-különbség lineáris függvénye. Ez alapján

$$P_3 = K(T - T_0), \quad (0.2)$$

ahol K a hűtőszekrény felületétől, geometriájától, hőszigetelésétől, és tágabban értett szerkezetétől függő effektív hőátadási állandó.

Az energiamegmaradás miatt a gép annyi energiát ad le a környezetnek, amennyit felvesz a hűtőből, plusz az a többletmunka, amit az áram végez. Ez alapján:

$$P_2 = P_1 + P_W. \quad (0.3)$$

A feladat szerint a hűtőgép ideális hőpumpaként működik, ami nem más, mint az ideális hőerőgép, vagyis a Carnot-gép megfordítottja. A hőerőgép hatásfoka a végzett munka, és a melegebb hőmérsékletű hely által leadott hő hányadosa. Carnot-gép esetén ez $\eta = \frac{\Delta T}{T_M}$, ahol T_M a magasabb hőmérséklet, ΔT pedig a hőmérsékletkülönbség. Esetünkben ez a kifejezés a befektetett munka és a magasabb hőmérsékletű helyre leadott hő hányadosa:

$$\frac{P_W}{P_2} = \frac{T - T_0}{T}. \quad (0.4)$$

A (0.1) és a (0.2) egyenletet behelyettesítve az energiamegmaradás egyenletébe:

$$P_2 = K(T - T_0) + P_W \quad (0.5)$$

Ezt felhasználva a (0.4) egyenletben:

$$\frac{P_W}{K(T - T_0) + P_W} = \frac{T - T_0}{T} \quad \text{amiből } P_W\text{-t kifejezve:} \quad P_W = \frac{K}{T_0}(T - T_0)^2. \quad (0.6)$$

Ismert, hogy az áram által végzett munka teljesítménye arányos a felvett áramerősség négyzetével, vagyis $P_W \propto I^2$. A fentiek alapján $I \propto T - T_0$, tehát ahhoz, hogy az áramfelvételt meg tudjuk mondani az idő függvényében, meg kell mondanunk a konyha hőmérsékletét az idő függvényében.

A konyha-hűtő-gép rendszer energiája nem állandó, hiszen a hűtőgép folyamatosan vesz fel P_W teljesítményt. Mivel azonban a hűtő hőmérsékletét a hűtőgép állandó értéken tartja, a plusz energia a konyhát fogja melegíteni. Tegyük fel, hogy a konyha hőkapacitása C , így T változásának gyorsasága:

$$C \frac{dT}{dt} = P_W. \quad (0.7)$$

Felhasználva a (0.6) egyenlet eredményét:

$$K \frac{(T - T_0)^2}{T_0} = C \frac{dT}{dt}. \quad (0.8)$$

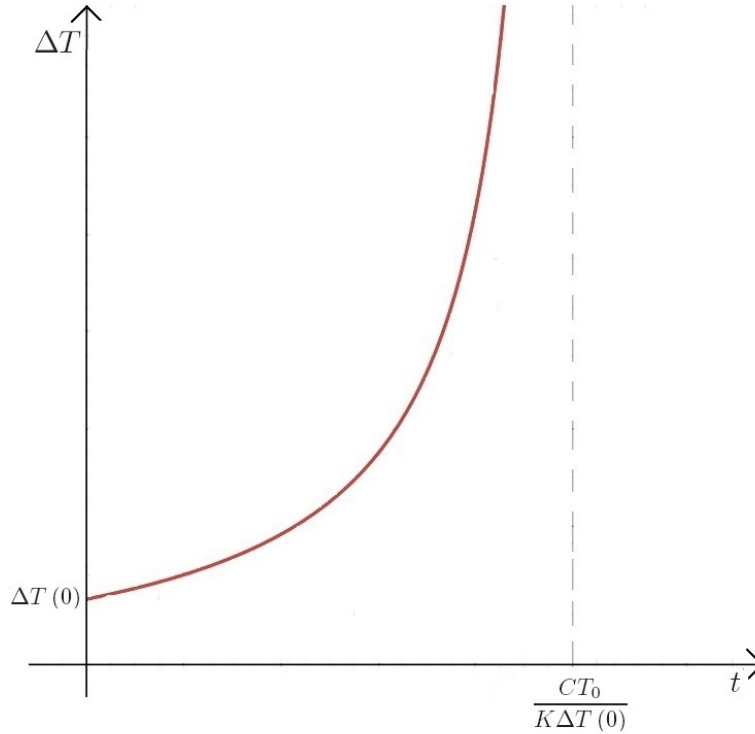
Bevezetve az $\alpha = \frac{K}{T_0 C}$ konstanst, az előbbi egyenlet az alábbi módon alakítható:

$$\alpha = \frac{1}{(T - T_0)^2} \frac{dT}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{T - T_0} \right). \quad (0.9)$$

A (0.9) egyenletből leolvasható, hogy az $\frac{1}{T_0 - T}$ egy olyan kifejezés, mely az időtől lineáris módon függ:

$$\frac{1}{T_0 - T(t)} = \alpha t - \beta \quad \text{amiből:} \quad T(t) = T_0 + \frac{1}{\beta - \alpha t}. \quad (0.10)$$

Itt β a kezdeti értéktől függő szabad paraméter. Ha a konyha hőmérséklete kezdetben $T(0)$ volt, akkor $\beta = \frac{1}{T(0) - T_0}$. A (0.10) képletből látható, hogy konyha hőmérsékletfüggvényének a $t_k = \frac{\beta}{\alpha}$ időpontban szingularitása van. A hőmérsékletfüggvény vázlatos rajza látható a 2. ábrán. A felvett áram ezzel arányos.



2. ábra. A hőmérséklet-különbség az idő függvényében

Az eredményeinkből az jön ki, hogy a konyha hőmérséklete véges időn belül minden határon túl nő. A valóságban ez a konyha levegőjének nyomásnövekedésével járna, tehát a konyha felrobbanna.

Becsüljük meg, mennyi idő kell ehhez! Legyen a hűtő belsejének hőmérséklete $T_0 = 5^\circ \text{C} = 278 \text{K}$, a konyha kezdeti hőmérséklete pedig $T(0) = 20^\circ \text{C} = 293 \text{K}$! Ekkor $\beta = 0,0667 \frac{1}{\text{K}}$.

Legyen a hűtőgép által felvett teljesítmény kezdetben $P_W = 100 \text{W}$, ekkor a (0.6) egyenletből kiszámolható, hogy a hőáramlási együttható $K = 125 \text{W/K}$. A konyha hőkapacitását vegyük annak a néhány kg levegőnek a hőkapacitásával egyenlőnek, amit tartalmaz, tehát körülbelül $C \sim 100 \frac{\text{kJ}}{\text{K}}$. Ekkor $\alpha = 0,0162 \frac{1}{\text{K} \cdot \text{h}}$.

A kritikus idő β és α hányadosa, a becsült adatokkal ez nagyságrendileg 5 óra, ennyi idő alatt kéne felrobbannia egy hűtőt tartalmazó, tökéletesen hőszigetelt konyhának.

Megjegyezzük, hogy a modell nemcsak nagy hőmérsékletkülönbségek esetén érvénytelenedik (a konvektív hőátadás nemlineárisává válik; a sugárzási hőátadás is jelentőssé válik), hanem a nagyon kicsi hőmérsékletkülönbség esetén is. Ez abból ered, hogy a modellben feltételeztük T_0 változatlanóságát, ami stacionárius esetben igaz, de például a gép bekapcsolásakor nem.

Hivatkozások

Budó Ágoston: Kísérleti Fizika I.

Asztalos Bogdán beküldött megoldása alapján került összeállításra. Felhasználásra került Jan Pulmann megoldása.

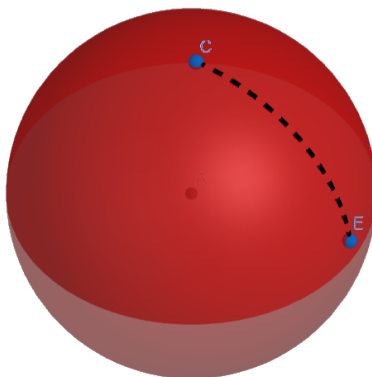
2017/9. Feladat

Egy R sugarú gömbnek mind az északi, mind a déli féltekéje homogén tömegeloszlású, de a tömegek különböző, $M_2 \neq M_1$.

- Mekkora munka árán lehet egy m tömegű pontszerű testet az északi pólusról a déli pólusra vinni?
- Számítsuk ki a munkát a gömbfelület két tetszőleges pontja között! Csak a gömb gravitációs térét vegyük számításba!

(Cserti József)

A feladat alapján célunk egy " R " sugarú, inhomogén tömegeloszlású gömb felületén való mozgás közben történő munka kiszámítása, ahol csak a test gravitáció hatását akarjuk figyelembevenni. Ez utóbbi azt jelenti, hogy egyrészről a felületen való mozgás során elhanyagolhatjuk a súrlódásokat és közegellenállást, másrészt a gömb forgásának hatásait.



3. ábra. A rendszer szemléltetése

Az első eldöntendő kérdés, hogy miként vegyük figyelembe a gravitációt. Ha az általános relativitáselmélet alapján kívánunk számolni, amely nagy M_1 vagy M_2 értékeknél szükséges lehet, akkor a számítás lényegesen bonyolultabb, és általában a gravitációs potenciál fogalma sem vezethető be egyszerű módon.

Jobban áttekinthető, és az érvényességi tartományon belül egzakt eredményt ad, ha a Newton-féle elméleten belül számítjuk ki a munkát. Vonatkoztatási rendszerünk origóját helyezzük a gömb geometriai középpontjába.

Célunk a gravitációs potenciál kiszámítása a felület mentén, ennek alapegyenlete a Poisson-

egyenlet:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (0.11)$$

A potenciálra vonatkozó megoldás felírható mint:

$$\Phi(\vec{r}) = G \int \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

Továbbá a helyfüggés gömbi harmonikusok szerint sorbafejthető:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\phi', \theta') Y_{lm}(\phi, \theta),$$

ahol $r_{<}$ a kisebb, $r_{>}$ a nagyobb $|\vec{r}|$ és $|\vec{r}'|$ kifejezések közül.

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

A tömegeloszlás lokalizált, vagyis adott R sugarú gömbön kívül nulla. Az $r_{>} = r$, $r_{<} = r'$ jelölést használva, a gömbön kívül a következő alakban írható a potenciál [1]:

$$\Phi(r, \theta, \phi) = -4\pi G \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \left(\int_V Y_{lm}^* r'^l \rho dV' \right) \frac{Y_{lm}}{r^{l+1}}. \quad (0.12)$$

A rendszer sűrűségfüggvénye írható a következő alakban:

$$\rho(\theta) = \rho_0 + \delta\rho \operatorname{sgn}(\cos \theta) = \rho_0 P_0^0 + \delta\rho \operatorname{sgn}(\cos \theta), \quad (0.13)$$

ahol $\rho_0 = 3 \frac{M_1 + M_2}{4\pi R^3}$, és ha a θ szöveget az északi sarktól mérjük, illetve ha az északi félteke az M_1 tömegű, akkor $\delta\rho = 3 \frac{M_1 - M_2}{4\pi R^3}$.

Azonnal látható, hogy szimmetriaokokból csak az $m = 0$ indexű tagok fognak szerepet játszani. Leválasztva az $l = 0$ tagot, a potenciál értékét közvetlenül a felszínen ($r = R$ értéknél) írhatjuk a következő alakban:

$$\Phi(R, \theta) = -\frac{G(M_1 + M_2)}{R} - G\delta\rho \sum_{l=1}^{\infty} \left(\int_V P_l(\cos \theta') r'^l \operatorname{sgn}(\cos \theta') dV' \right) \frac{P_l(\cos \theta)}{R^{l+1}},$$

átalakítások után

$$\Phi(R, \theta) = -\frac{G(M_1 + M_2)}{R} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2\pi G\delta\rho}{l+3} \left(\int_0^\pi P_l(\cos \theta') \operatorname{sgn}(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' \right) P_l(\cos \theta) R^2. \quad (0.14)$$

Az integrál csak páratlan "l" indexekre nemnulla, az integrál ekvivalensen átalakítható:

$$C_l = \begin{cases} 0, & \text{ha } l = 2k \quad k \in \mathbb{N} \\ 2 \int_0^{\pi/2} P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \left(-\frac{1}{2}\right)^{(l-1)/2} \frac{(l-2)!!}{\left(\frac{l+1}{2}\right)!}, & \text{ha } l = 2k+1 \quad k \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (0.15)$$

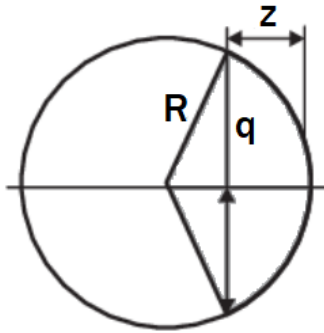
ahol az "!!" a kettős-faktoriál jele, nem összetévesztendő két egymás utáni faktoriális képzésével. A potenciál így már felírható:

$$\Phi(R, \theta) = -\frac{G(M_1 + M_2)}{R} - \delta\rho GR^2 2\pi \sum_{l=1,3,5,\dots,\infty} \frac{1}{l+3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{(l-1)/2} \frac{(l-2)!!}{\left(\frac{l+1}{2}\right)!} P_l(\cos\theta). \quad (0.16)$$

a) Ki akarjuk számítani egy kis "m" tömegű testen végzett munka nagyságát, miközben az északi-pólusról a délibe visszük. A munka természetesen a potenciális energia különbségével fejezhető ki, $W = m(\Phi(\pi) - \Phi(0))$.

Ezt először szemléletes úton, felhasználva a kezdő és végpontok speciális jellegét számoljuk ki, majd az általánosabban alkalmazható (0.16) képlet felhasználásával is megkapjuk ugyanezt.

Bontsuk fel a testet a szimmetriatengelyre merőleges körszeletekre. Jelöljük a körszeletek középpontjának a gömb pólusától való távolságát z -vel. Ekkor az egyes körszeletek sugara q , és mindkét féltéke esetén teljesül hogy $R^2 = q^2 + (R - z)^2$.



Az egyes körszeletek potenciálja [2]:

$$\delta\Phi = G\rho 2\pi[\sqrt{2Rz} - z]. \quad (0.17)$$

Az egyes félgömbökhöz rendelhető potenciál:

$$V_1 = \int_0^R G\rho_1 2\pi[\sqrt{2Rz} - z]dz = 2\pi G\rho_1 R^2 \left[\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}\right]$$

$$V_2 = \int_R^{2R} G\rho_2 2\pi[\sqrt{2Rz} - z]dz = 2\pi G\rho_2 R^2 \left[\frac{2\sqrt{2}}{3}(2^{3/2} - 1) - \frac{3}{2}\right].$$

Az északi sarkon ezek együttes értéke

$$U(0) = G2\pi R^2 \left(\rho_1 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} \right) + \rho_2 \left(\frac{8}{3} - \frac{3}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \right). \quad (0.18)$$

Elemi megfontolásokkal belátható, hogy a déli sarkon:

$$U(\pi) = G2\pi R^2 \left(\rho_2 \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} \right) + \rho_1 \left(\frac{8}{3} - \frac{3}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \right). \quad (0.19)$$

A munkavégzés e kettő érték különbségével fejezhető ki, a mozgatott test tömegével való szorzás után:

$$W = mG2\pi R^2 \left(\Delta\rho \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} \right) - \Delta\rho \left(\frac{8}{3} - \frac{3}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \right) = mG \frac{3(M_1 - M_2)}{R} \left(\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{3} \right) \quad (0.20)$$

Ezen végeredmény ismeretében, ellenőrzés jelleggel elvégezzük a számolást a (0.16) alapján.

$$W = -3mG \frac{M_1 - M_2}{2R} \sum_{l=1,3,5,\dots,\infty} \frac{1}{l+3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{(l-1)/2} \frac{(l-2)!!}{\left(\frac{l+1}{2} \right)!} [P_l(-1) - P_l(1)] \quad (0.21)$$

Felhasználva hogy $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$ illetve hogy $P_l(1) = 1$, az eredmény átírható:

$$W = 3mG \frac{M_1 - M_2}{R} \sum_{l=1,3,5,\dots,\infty} \frac{1}{l+3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{(l-1)/2} \frac{(l-2)!!}{\left(\frac{l+1}{2} \right)!} \quad (0.22)$$

Wolfram Mathematica program segítségével kiszámolva az összeget, megállapíthatjuk hogy értéke $\frac{1}{3}(4\sqrt{2}-5)$. A végzett munka miközben az északi sarkról a déli sarkig mozgatjuk a testet, a feladat paramétereivel kifejezve

$$W = (4\sqrt{2} - 5)mG \frac{M_1 - M_2}{R}, \quad (0.23)$$

azzal a konvencióval hogy M_1 jelöli az északi félteke tömegét. Jól láthatóan ez egybeesik a fenti számolásunkkal.

b) A munka két tetszőleges pont között kizárólag a kezdeti és végpontok θ_1 és θ_2 koordinátájától függ, a megfelelő képlet

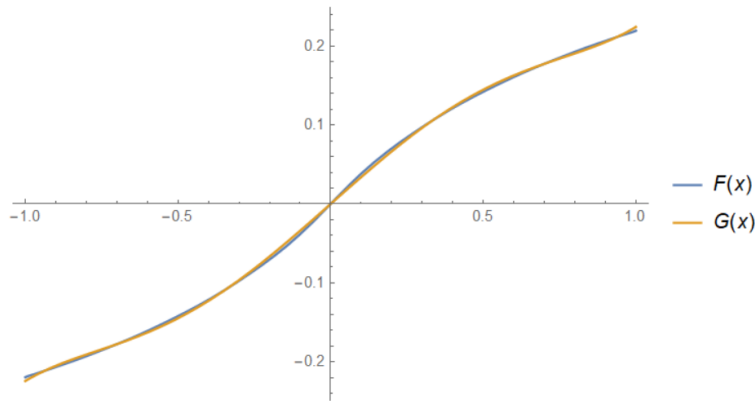
$$W = -3mG \frac{M_1 - M_2}{2R} \sum_{l=1,3,5,\dots,\infty} \frac{1}{l+3} \left(-\frac{1}{2} \right)^{(l-1)/2} \frac{(l-2)!!}{\left(\frac{l+1}{2} \right)!} [P_l(\theta_2) - P_l(\theta_1)] \quad (0.24)$$

Ezúttal nem lehet a fentiekben látott egyszerű módon kifejezni a szummát, bár természetesen az a) részben kiszámolt eredmény felső korlátot ad a nagyságára.

Közelítő, nagyságrendileg elfogadható becslést azonban megfogalmazhatunk. Használjuk fel, hogy az összeg viszonylag gyorsan konvergál.

Az összegben szereplő együtthatók közül az első három rendre $1/4$, $-1/24$, illetve $1/64$ nagyságú, a negyedik tag $-1/128$. Feltételezve hogy az összeg első három tagja többé-kevésbé hűen visszaadja a határértéket, a munkát közelítően kifejezhetjük a kezdő és végpontok koordinátaival.

$$W \approx 3mG \frac{M_1 - M_2}{2R} \left(\frac{175}{512} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) - \frac{185}{768} (\cos^3 \theta_1 - \cos^3 \theta_2) + \frac{63}{512} (\cos^5 \theta_1 - \cos^5 \theta_2) \right) \quad (0.25)$$



4. ábra. A vízszintes tengelyen $x = \cos \theta$ szerepel, a függőleges tengelyen az összeg első tíz- (F) és három- (G) tagja.

Ábrázoljuk az eredményt abban a speciális esetben, mikor $\theta_1 = \pi/2$, vagyis az egyenlítőől mozdítjuk el a testet adott szélességi fokig. Legyen $M_1 > M_2$.

Hivatkozások

[1] J. D. Jackson: Klasszikus Elektrodinamika

[2] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/potlin.html>

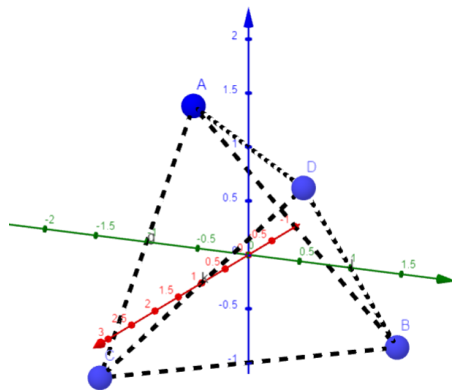
Gombkötő Ákos beküldött megoldás alapján került összeállításra. Felhasználásra került Michal Roncik megoldása.

2017/16. Feladat

Egy szabályos tetraéder csúcaiban egyforma pontszerű töltések vannak rögzítve. A tetraéder középpontjában egy kicsiny, de véges tömegű töltött test van, ami egy egyenes mentén súrlódásmentesen mozoghat.

Ha a középső testet kicsiny A távolsággal kitérítjük és elengedjük, a kialakuló rezgés periódusideje $T(A)$ lesz. Mekkora lesz a kétszeres kitérítéshez tartozó $T(2A)$ periódusidő?

Gnädig Péter



5. ábra. A rendszer elrendezése.

A feladat kis rezgések periódusidejére vonatkozik. Az egyik legfontosabb kérdés ennek megfelelően az, hogy egyáltalán van-e, illetve pontosan milyen egyenes(ek) mentén alakulhat ki kis rezgés. Ezt a potenciál sorbafejtésének első nemeltűnő tagja alapján válaszolhatjuk meg. Ha az ehhez tartozó erő visszatérítő jellegű, akkor dimenzióanalízis segítségével könnyen meghatározható a periódusidő amplitúdófüggése. Tegyük fel, hogy:

$$F = -kx^n$$

alakú erőterben történik anharmonikus rezgés.

A periódusidő csak a k konstanstól, a test tömegétől, és az amplitúdótól függ. Dimenzióanalízis segítségével belátható, hogy idő dimenziójú mennyiséget csak ezen mennyiségek alábbi kombinációja ad [1]:

$$T \propto \sqrt{\frac{m}{kA^{n-1}}}.$$

Továbbiakban az a feladatunk, hogy meghatározzuk az erő (egyensúlyi helyzet körül értelmezett) Taylor-sorának első el nem tűnő tagjának rendjét. Ehhez írjuk fel a potenciált és a Coulomb-törvényt a ponttöltésekre:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^4 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}_i|}.$$

Definíció szerint pedig ilyen esetekben, mivel más erő nincs:

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad , \quad -grad\Phi = \vec{E} \quad ,$$

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^4 \frac{\vec{r} - \vec{a}_i}{|\vec{r} - \vec{a}_i|^3}.$$

Itt Q a csúcsokban lévő töltés, q a kicsiny, rögzíthető test töltése, \vec{r} ennek a helyvektora, \vec{a}_i pedig a tetraéder i edik csúcsához mutató vektor.

Megelőlegezzük azt a részeredményt, hogy a egyensúlyi helyzet a tetraéder geometriai középpontjában van.

Vegyük fel a koordináta-rendszerünket úgy, hogy az egyensúlyi helyzet az origóban legyen, és legyenek a tetraéder csúcsai az alábbi vektorokkal megadva:

$$a_1 = \frac{l}{2\sqrt{2}} (1, 1, 1),$$

$$a_2 = \frac{l}{2\sqrt{2}} (1, -1, -1),$$

$$a_3 = \frac{l}{2\sqrt{2}} (-1, 1, -1),$$

$$a_4 = \frac{l}{2\sqrt{2}} (-1, -1, 1),$$

ahol l a tetraéder oldalának hossza. Mivel a további vizsgálatban nem játszanak szerepet, a konstansokat el fogjuk hagyni a sorbafejtés során.

Mielőtt felírnánk az erő megfelelő közelítő hatványsorát, érdemes bizonyos általános megfontolásokat tenni.

Az origó körül a négy töltés potenciáljára teljesül a Laplace-egyenlet ($\Delta\phi = 0$) ennek megfelelően gömbi polárkoordinátákban a potenciál felírható a gömbfüggvények segítségével [3]:

$$\Phi = \sum_{l,m} A_{lm} r^l Y_{lm}.$$

- A potenciál nulladrendű tagjai fizikailag nem relevánsak.
- A potenciál elsőrendű tagjai nullák, mert erőegyensúly van.
- A másodrendű tagokból álló Hess-mátrix szimmetrikus, sajátvektorai merőlegesek egymásra. Ugyanakkor a rendszer bizonyos 120 fokos forgatásokra invariáns. Ez a kettő tulajdonság csak úgy egyeztethető össze, ha mindhárom sajátérték megegyezik. A Laplace-egyenletből közvetlenül következik az előbbieket értelmében, hogy ($3\phi''(r=0) = 0$). Emiatt a kvadratikusság eltűnik.
- A harmadrendű tagok gömbi polárkoordinátákban felírva arányosak az $r^2 Y_{3,m}$ gömbfüggvények egy szuperpozíciójával. Bizonyos irányokban ez nulla, ilyen irányok esetén a negyedrendű tag adhat vezető járulékot.
- A negyedrendű tagok szintén eltűnhetnek bizonyos irányok mentén, egyidejűleg az alacsonyabb rendekkel.
- Az ötödrendű tagok el fognak tűnni minden irányban.
- Azon véges számú irány esetén, ahol az alacsonyabb rendek eltűnnek, a hatodrendű tagok lesznek dominánsak.

Összefoglalva, legtöbb irányban a potenciál harmadrendű tagjai lesznek az első el nem tűnő tagok, és ekkor a mozgás instabil. Ugyanakkor léteznek olyan irányok melyek esetében a potenciál negyedrendű vagy hatodrendű tagja lesz a meghatározó, ami megfelelő paraméterek esetén stabil (anharmonikus) rezgésekre vezet.

Az egyenesen lévő ponttöltés csak r -től függő potenciálját az alábbi paraméterezéssel fejezzük ki:

$$\vec{r} = r[\sin\theta \cos\phi \vec{e}_x + \sin\theta \sin\phi \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z].$$

Egyszerű speciális eset az x-irányú tengely menti elmozdulás, vagyis ha $\theta = \pi/2$, $\phi = 0$.

$$F_r = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(2 \frac{r-1}{[(r-1)^2 + 2]^{\frac{3}{2}}} + 2 \frac{r+1}{[(r+1)^2 + 2]^{\frac{3}{2}}} \right) \approx \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{56}{81\sqrt{3}} r^3 + \sigma(r^5).$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy az adott elrendezés esetén

$$T \propto \frac{1}{A},$$

vagyis kis rezgésekre vonatkozóan kétszeres kitérés esetén a periódus idő a felére csökken.

A potenciál, illetve az erő explicit alakja, illetve azok sorbafejtése a következők szerint lehetséges:

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^4 \frac{1}{\sqrt{(x_i - r \sin\theta \cos\phi)^2 + (y_i - r \sin\theta \sin\phi)^2 + (z_i - r \cos\theta)^2}},$$

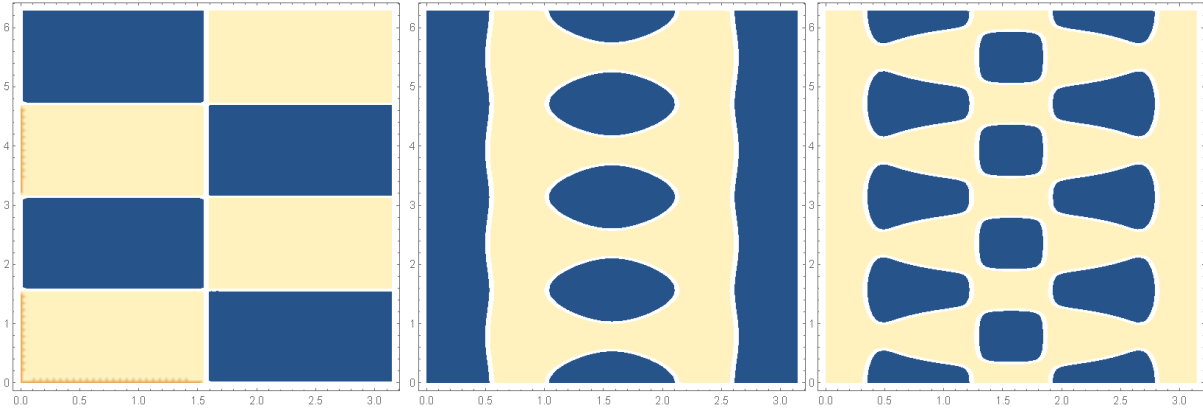
$$\begin{aligned}
F_r &= -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^4 \frac{(x_i - r \sin \theta \cos \phi) \sin \theta \cos \phi + (y_i - r \sin \theta \sin \phi) \sin \theta \sin \phi + (z_i - r \cos \theta) \cos \theta}{\left[\sqrt{(x_i - r \sin \theta \cos \phi)^2 + (y_i - r \sin \theta \sin \phi)^2 + (z_i - r \cos \theta)^2} \right]^3} \\
&= -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^4 \frac{x_i \sin \theta \cos \phi + y_i \sin \theta \sin \phi + z_i \cos \theta - r}{\left[\sqrt{(x_i - r \sin \theta \cos \phi)^2 + (y_i - r \sin \theta \sin \phi)^2 + (z_i - r \cos \theta)^2} \right]^3}, \quad (0.26)
\end{aligned}$$

ahol x_i, y_i, z_i az a_i vektorok komponenseit jelöli. A sorbafejtést Wolfram Mathematica programmal elvégezve az r paraméter szerint, megállapíthatjuk akárcsak feljebb, hogy $F(r = 0) = 0$, illetve hogy az erő elsőrendű tagja (a potenciál másodrendű tagja) általánosan is nulla. Ahogy fentebb írtuk, a továbbiakban lényegében az $l = 2^{3/2}$ paraméterre szorítkozunk, a formulák áttekinthetősége érdekében.

$$\begin{aligned}
F_r &\approx -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{20}{3\sqrt{3}} [\cos \theta \cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta] r^2 + \right. \\
&\left[-\frac{7}{72\sqrt{3}} - \frac{35}{216\sqrt{3}} \cos(4\phi) + \frac{35}{324\sqrt{3}} \cos(4\phi - 2\theta) - \frac{35}{1296\sqrt{3}} \cos(4\phi - 4\theta) - \frac{35}{162\sqrt{3}} \cos(2\theta) \right. \\
&\left. \left. - \frac{245}{648\sqrt{3}} \cos(4\theta) - \frac{35}{1296\sqrt{3}} \cos(4(\phi + \theta)) + \frac{35}{324\sqrt{3}} \cos(2(2\phi + \theta)) \right] r^3 \right] + F_r^{(5)} r^5.
\end{aligned}$$

Itt az $F_r^{(5)}$ az erő ötödrendű (a potenciál hatodrendű) tagja, melyet nem írunk ki expliciten. A kis rezgés szükséges feltétele hogy az erő páratlan függvényt legyen approximálható, vagyis hogy $\cos \theta \cos \phi \sin \phi \sin^2 \theta = 0$ teljesüljön, vagyis teljesüljön hogy: $\{\theta = n\pi/2 \vee \phi = n\pi/2 \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

Ebből eredően kis rezgések olyan esetekben lehetségesek, ha a mozgás tengelye a mi koordinátázásunk szerint az x-y,x-z,y-z síkok valamelyikébe esik.



6. ábra. Az erő másodrendű, harmadrendű, és ötödrendű tagjainak előjele az irány függvényében. A függőleges tengely ϕ , a vízszintes tengely θ szerinti függést ábrázolja. $Qq < 0$ esetén a sárga területek pozitívak, a kékek negatívak.

A 6. ábra alapján beazonosíthatóak azok a paraméterek, melyekre az erő másodrendű tagja

eltűnik, ezek a fehér vonalak a baloldalon. Ilyen irányok esetén akkor alakulhat ki kis rezgés, ha:

- 1) A szögparaméterek a középső ábra kék területeire esnek $qQ < 0$ teljesülése mellett.
- 2) A szögparaméterek a középső ábra sárga területeire esnek $qQ > 0$ teljesülése mellett.
- 3) A szögparaméterek a középső és baloldali ábra fehér vonalainak közös pontjaira esnek. Ezek a pontok a jobboldali ábra kék területein helyezkednek el, így ekkor csak $qQ < 0$ esetén fordulhat elő kis rezgés.

Az 1) és 2) esetekben $T \propto A^{-1}$, és a korábbi speciális megoldással összhangban kétszeres kitéréshez feleakkora periódusidő tartozik. A 3) esetben $T \propto A^{-2}$, és kétszeres kitéréshez negyedakkora periódusidő rendelhető.

Hivatkozások

- [1] L.D.Landau: Elméleti fizika I.
 - [2] Fekete Zoltán, Zalay Miklós: Többváltozós függvények analízise
 - [3] J. D. Jackson: Klasszikus Elektrodinamika
- Elek Péter beküldött megoldása alapján került összeállításra.

Pirx pilóta járőrhajójával egy vibránium-felhő peremvidékén kering, ahol a ritka gázban még a súrlódás is elhanyagolható. Mint tudjuk, a vibránium feltétlenül szükséges a fénynél gyorsabb közlekedést lehetővé tevő warp-hajtómű kifejlesztéséhez. Mindazonáltal az Ismert Ūrben nagyon kis mennyiségben fordul elő - nem csoda, ha az intelligens űrhajózó civilizációk kiélezett versenyt folytatnak a ritka vibránium-források megszerzéséért.

És most itt ez az új lelőhely - egy egész bolygónyi (nagyjából a Föld tömegével megegyező mennyiségű) tiszta vibránium-gázfelhő, amely az első mérések szerint gömb-szimmetrikusan oszlik el, sűrűsége a középponti atommagsűrűségtől radiális irányban exponenciálisan csökken. Ebben a gázformában a vibránium teljesen ártalmatlan, semmiféle spontán tértorzító hatása nincs (ez a képessége csak a vulkániak által kifejlesztett warp-hajtóműben nyilvánul meg, ha pantagonittal kerül kémiai reakcióba). Pirx tehát egy látzólag közönséges gázfelhő külső rétegében kezd körözni, arra ügyelve, nehogy valamelyik konkurens (vagy baráti - olyan nehéz őket megkülönböztetni!) civilizáció rátegye a kezét a lelőhelyre.

És íme - alig tett meg egy félkört a felhő középpontja körül, máris azt látja, hogy a felhő túlsó oldalán, vele pontosan szemben egy másik űrhajó érkezik a végtelenből, fékez, majd pontosan az övével megegyező sugarú körpályára áll. Pirx minden műszerét az idegen hajóra irányítja (természetesen csak passzív megfigyelésekre hagyatkozik, aktív eszközök, pl. radar használata elárulná az ő hajójának jelenlétét és koordinátáit). A vibránium-gáz a látható fény számára eléggé átlátszó, a vonatkozó Smith-Kovács-Kuznyecov-elmélet szerint törésmutatója csak a gáz sűrűségétől függ. Pirx fejlett műszerei még a sűrű középponti tartományon is átlátnak. A képernyőn kirajzolódó idegen hajó meglehetősen hasonlít Pirx saját járőrhajójára, a farrészen még a Bolygók Egyesült Föderációjának felségjele is felismerhető. Az a gyanús, ami nem gyanús! - tanulta valaha Pirx az űrakadémiaán. Hát igen, a soros ellenség föderációs hajónak álcázza kémhajóit... Nézzük meg közelebről! - gondolja Pirx, és hajóját a felhő mélyebb rétegeibe vezeti, gondolván, ott gyorsabb keringéssel közelebb kerülhet az idegenhez. Igen ám, de alig fél keringés után azt veszi észre, hogy az idegen hajó is mélyebbre merül a vibránium-felhőbe, majd pontosan ugyanakkora sugarú körpályára áll, mint Pirx hajója, pontosan vele átellenes pozícióban. Nem enged közelebb magához - gondolja Pirx. De nem hagyom! - és újabb manőverbe kezd.

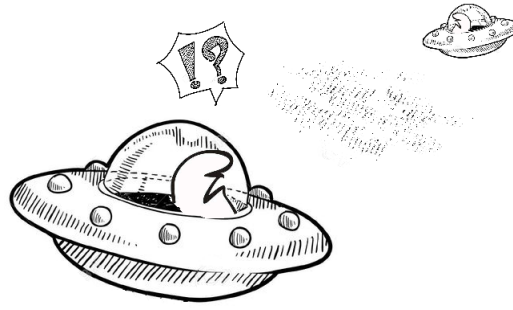
Igen, jól sejtettétek. A fenti forgatókönyv még negyvenegyszer megismétlődik. Valahányszor Pirx új, más sugarú körpályára tér át, az idegen hajó félfordulat múlva követi, és ugyanolyan sugarú körpályára áll, mint Pirx, vele pontosan szemközti helyzetben.

A negyvenkettedik sikertelen próbálkozás után (ennyit ír elő a Galaxis Ūtikalauz és a Szolgálati Szabályzat) Pirx feladja a kilátástalan űrmacska-űregér harcot, és elhagyja a vibránium-felhőt. Fél fordulattal később ugyanezt teszi az idegen hajó is. Pirx az anyahajón jelentést tesz parancsnokának - az azonban bolondnak nézi, hiszen a flotta érzékeny műszerei sok fényéves körzetben nem jeleztek azonosítatlan űrtevékenységet.

Egyelőre a jövő titka, hogy melyik civilizáció fogja kiaknázni az új vibránium-lelőhelyet, amint az is, hogy mi lesz a habókosnak nyilvánított Pirx további karrierjével. Tudományos szempontból bennünket egyetlen kérdés érdekel: pontosan milyen formula szerint függ a vibránium-gáz törésmutatója a gáz sűrűségétől?

(Dávid Gyula)

A vibrániumról a következőket sejtjük:



7. ábra. A feladatban leírt jelenség egy lehetséges ábrázolása.

-Szükséges a warp-drivehoz.

-A vibránium tömegsűrűsége pozitív, és önmagában feltehetően nem különösebben egzotikus, ellenkező esetben Pirx hajója sem lenne képes körülötte keringeni kizárólag a gravitáció hatása alatt.

-A törésmutatója nagyon jó közelítéssel valós, hiszen Pirx képes volt az optikai tartományban 1000km nagyságrendű távolságból tisztán észlelni egy távoli képet.

Tudjuk ezenfelül, hogy a -feltételezetten másik űrhajó- mozgását késve, hozzávetőlegesen egy félkör megtétele után észleli azonosnak mint a saját mozgását.

A körpálya természetesen a vibránium-felhő tömegközéppontja körül értendő.

A feladat megadja hogy a vibránium-felhő sűrűsége gömbszimmetrikus, és exponenciálisan lecsengő, vagyis írható úgy, mint:

$$\rho(r) = \rho_0 e^{-\frac{r}{\lambda}}, \quad (0.27)$$

ahol ρ_0 a középpontban lévő sűrűség, λ pedig egy, a felhőre jellemző távolság dimenziójú mennyiség.

Az észlelt jelenség magyarázata az lehet, hogy Pirx önmaga képét látta.

Ehhez az szükséges hogy a félpálya megtételéhez szükséges idő éppen egybeessen a fénynek az optikai út megtételéhez szükséges idejével. Az optikai út a félkör két végpontját köti össze. A képalkotásról, illetve annak minőségéről nem beszélünk, csak azt vizsgáljuk hogy milyen feltételek szükségesek egyáltalán a fényjel megfelelő megérkezéséhez.

A feladat alapján ez a meghatározandó feltétel legalább 42 kiválasztott sugarú félkör esetén teljesül, ami elegendő annak a megsejtéséhez, hogy tetszőleges sugar esetén is teljesül.

A megoldás gondolatmenete a következő: Feltételezve hogy a feladatban leírt jelenség minden sugar esetén teljesül, felírható egy összefüggés a törésmutató sugárfüggésére. Mivel a törésmutató csak a sűrűségtől függ, illetve mivel a sűrűség sugárfüggése ismert, megállapítható hogy pontosan hogyan függ a törésmutató a vibránium sűrűségétől.

A vibránium-felhő gömbszimmetrikus tömegeloszlása miatt a körülötte kialakuló gravitációs mező is gömbszimmetrikus lesz, így a térerősségvektor minden pontban sugárirányú, és -adott sugar esetén- a térerősség pusztán az adott sugarú gömbön belül lévő tömegtől függ. A gömbszimmetria miatt ez a tömeg ugyanolyan gravitációs teret hoz létre, mintha az egész tömeg a középpontban lenne. [1]

Az optikai jelenség formulával kifejezve –feltételezve hogy Pirx az adott félköröket mindig szabadesésben teszi meg, illetve azt hogy a hajó tömege a felhő tömegeloszlását gyakorlatilag

nem változtatja meg, és elhanyagolható nagyságú a releváns $M(R)$ tömeghez képest– azt jelenti, hogy:

$$T = 2 \int_0^R \frac{n(r)dr}{c} \approx \frac{\sqrt{R^3\pi}}{\sqrt{GM(R)}}, \quad (0.28)$$

ahol "r" a sugárirányú koordinátát jelöli a felhő tömegközéppontjától, és felhasználtuk Kepler harmadik törvényének explicit alakját.

Mivel a sűrűség úgy írható, mint $\varrho(r) = \varrho_0 e^{-\frac{r}{\lambda}}$, az R sugáron belül eső tömeg:

$$\begin{aligned} M(R) &= \int_0^R \varrho(r) 4\pi r^2 dr = 4\pi \varrho_0 \int_0^R r^2 e^{\frac{r}{\lambda}} dr = \\ &= 4\pi \varrho_0 \lambda^3 \left(2 - 2e^{-\frac{R}{\lambda}} - 2\frac{R}{\lambda} e^{-\frac{R}{\lambda}} - \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 e^{-\frac{R}{\lambda}} \right). \end{aligned}$$

R helyébe ∞ -t helyettesítve, látható hogy a felhő teljes tömege $M = 8\pi \varrho_0 \lambda^3$, amiből, mivel tudjuk hogy M nagyjából a földtömeg, ϱ_0 pedig az atommagsűrűség, kifejezhető λ ismert mennyiségekkel, $\lambda \approx 100m$. Mivel azonban a képletekben a legtöbb helyen az $\frac{r}{\lambda}$ hányados szerepel, mint "relatív sugár", jelöljük ezt inentől x -szel.

Pirx fél-keringési ideje:

$$T(x) = \pi \sqrt{\frac{1}{4\pi G \varrho_0} \cdot \frac{1}{2\frac{1}{x^3} - 2\frac{1}{x^3}e^{-x} - 2\frac{1}{x^2}e^{-x} - \frac{1}{x}e^{-x}}}.$$

Az érzékelt jel terjedésével kapcsolatos összefüggést az alapján tudjuk felírni, hogy a fény sebessége $v_{feny} = \frac{c}{n}$ ahol c a vákuumbeli fénysebesség, n pedig az adott helyen érvényes törésmutató. Mivel a törésmutató csak a vibránium sűrűségétől függ, -az pedig csak a középponttól való távolságtól- a törésmutatóra létezik egy egyértelműen megadható $n(x)$ sugárfüggés. Mivel a felhő szimmetrikus, a fény ugyanannyi idő alatt ér el az x sugártól a középpontig, mint a középponttól az x sugarú pályáig, így elég, ha azt számoljuk ki, mennyi idő alatt ér a középpontból jövő fénysugár x -ig. Számolhatunk egyenes pályával, hiszen a sugár mentén haladó fénysugár irányát nem töri meg a változó törésmutató. Átparaméterezéssel $dr = \lambda dx$.

$$t(0 \rightarrow x) = \int_0^x \frac{\lambda dx'}{\frac{c}{n(x')}} = \frac{\lambda}{c} \int_0^x n(x') dx'$$

Mivel az az idő amíg a fénysugár átér a szemközti pontba Pirx félperiódusidejével egyenlő, a fent kiszámolt $t(0 \rightarrow x)$ idő Pirx periódusidejének negyedével, $T(x)/2$ -vel egyenlő:

$$\frac{\lambda}{c} \int_0^x n(x') dx' = \frac{T(x)}{2},$$

deriválva mindkét oldalt x szerint:

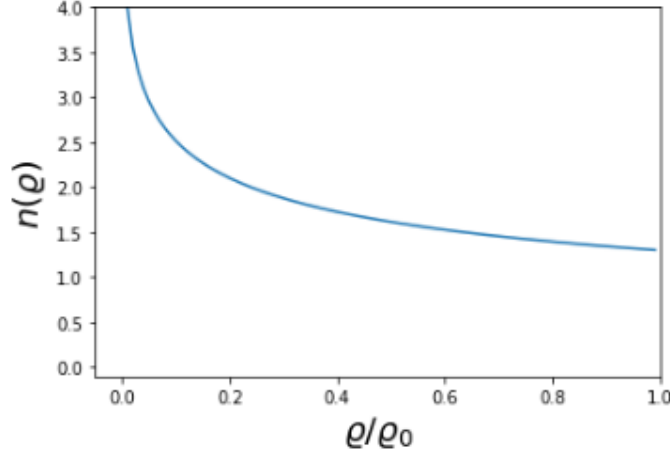
$$n(x) = \frac{c}{2\lambda} \frac{dT(x)}{dx}. \quad (0.29)$$

A (0.29.) egyenlet alapján elvileg rendelkezésünkre áll minden információ ami a törésmutató kiszámításához szükséges.

$$\begin{aligned} n(x) &= \frac{c}{2\lambda} \frac{\pi}{\sqrt{4\pi G \varrho_0}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{2\frac{1}{x^3} - 2\frac{1}{x^3}e^{-x} - 2\frac{1}{x^2}e^{-x} - \frac{1}{x}e^{-x}}} \right) = \\ &= \frac{c}{8\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{G \varrho_0}} \cdot \frac{6x^2 - 6x^2e^{-x} - 6x^3e^{-x} - 3x^4e^{-x} - x^5e^{-x}}{(2x - 2xe^{-x} - 2x^2e^{-x} - x^3e^{-x})^{3/2}}. \end{aligned}$$

A sűrűség sugárfüggése $\varrho(x) = \varrho_0 e^{-x}$ volt, ebből kifejezve x -et ϱ -val ($x = \ln(\rho_0/\rho)$), és behelyettesítve az előző képletbe, megkapjuk a törésmutató sűrűségfüggését:

$$n(\varrho) = \frac{c}{8\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{G\varrho_0}} \cdot \frac{6 \ln^2\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right) - 6 \ln^2\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right) \frac{\varrho}{\varrho_0} - 6 \ln^3\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right) \frac{\varrho}{\varrho_0} - 3 \ln^4\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right) \frac{\varrho}{\varrho_0} - \ln^5\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right) \frac{\varrho}{\varrho_0}}{\left(2 \ln\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right) - 2 \ln\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right) \frac{\varrho}{\varrho_0} - 2 \ln^2\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right) \frac{\varrho}{\varrho_0} - \ln^3\left(\frac{\varrho_0}{\varrho}\right) \frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{3/2}}.$$



8. ábra. A törésmutató sűrűségfüggvényének grafikonja. Jól látható, hogy 0 esetén a törésmutató minden határon túl nő. (Az $n(\varrho)$ függvényben lévő konstans szorzótényezőt 1-nek vettük.)

Érdeemes ezen a ponton hangsúlyozni, hogy a Pirx által észlelt jelenség igen erősen koincideniális, a felhő pontos paraméterein múló megfigyelés volt.

Látható módon $n(\rho)$ anyagi egyenlet tartalmazza a λ és ρ_0 paramétereket, amelyek a konkrét tömegeloszlás jellemzője.

Ha részletesebben megvizsgáljuk a kapott $n(\varrho)$ összefüggést, azt találjuk, hogy a függvényérték $\varrho = 0$ értékhez közeledve a végtelenbe tart. Ez azt jelentené, hogy ahol egyáltalán nincs is vibránium, ott mégis lelassul a fény, méghozzá szélsőséges mértékben.

Ennek fizikailag nyilvánvalóan nincs értelme, úgyhogy ezt az eredményt jobban meg kell vizsgálni. Azt gondolnánk, hogy ha Pirx negyvenkét különböző sugarú pálya mindegyikén ugyanazt a jelenséget tapasztalta, akkor tetszőleges sugár esetén is meglátnánk a fél periódussal ezelőtti saját magunkat.

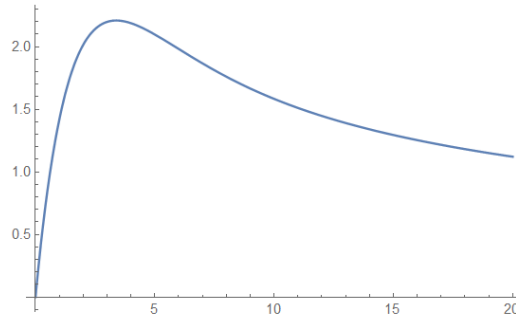
Ha viszont kellően nagy sugarú körpályára állnánk, akkor úgy vehetjük, hogy a vibrániumfelhő teljes tömege az adott sugarú gömbön belül van, ekkor viszont az érzékelt gravitációs mező már olyan, mint egy tömegpont gravitációs mezeje, ahol a keringési idő Kepler törvényei szerint a sugár 3/2-ik hatványával arányos. A korábban leírt gondolatmenet szerint, a törésmutató sugárfüggése ennek a deriváltjával arányos, vagyis nagy x -ek esetén $n(x) \propto x^{1/2}$ kell hogy teljesüljön, ami szintén azt jelenti, hogy $\varrho \rightarrow 0$ esetén $n \rightarrow \infty$. Sőt, ezeknek fényében tetszőleges gömbszimmetrikus gázfelhő esetére, melynek szélén folytonosan csökken a sűrűség, és ahol egy úrhajós a Pirx által észlelt jelenséget tapasztalja minden sugáron, ott a törésmutató 0 sűrűség esetén divergál.

Az ellentmondás feloldását az tény jelentheti, hogy a Pirx által bejárt pályák közül volt egy legnagyobb, aminek sugara véges, és ennek imeretében megmondható a pálya mentén lévő ϱ_{min} sűrűség. A Pirx által tapasztaltakból csak annyit szűrhetünk le, hogy a fent kapott $n(\varrho)$ képlet

csak olyan sűrűségek esetén igaz, amik ρ_{min} értékénél nagyobbak voltak, hiszen csak ezeken ment keresztül az a fény, ami Pirx műszereihez eljutott. Azt, hogy a ρ_{min} sűrűségűnél kisebb vibrániumgázban hogyan terjed a fény, csak egy ennél általánosabb törvény írja le, aminek megállapításához további kísérletek lennének szükségesek (például a gázfelhő külsőbb rétegeiben).

Bár a feladat megoldásához nem szükséges, érdekes lehet megvizsgálni az úrhajó sebességét is az egyes félkörök mentén. Mivel a gravitációs gyorsulás tartja félkörpályán az úrhajót, így a sebességet is kifejezhetjük:

$$v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}} = \sqrt{4\pi G \rho_0 \frac{\lambda^3}{R} \left(2 - 2e^{-\frac{R}{\lambda}} - 2\frac{R}{\lambda} e^{-\frac{R}{\lambda}} - \left(\frac{R}{\lambda}\right)^2 e^{-\frac{R}{\lambda}} \right)} \quad (0.30)$$



9. ábra. A $v(R)$ függvény menete. G ; ρ_0 ; λ paramétereket egységnyinek választottuk.

Pirx a feladat szerint növelte a sebességét miközben mélyebbre vezette a hajóját. Mivel a sebességnek maximuma van egy bizonyos sugár mellett, alsó korlátot tudunk adni a kísérletileg megvalósult legkisebb sugárra, illetve legnagyobb sűrűségekre. Ez azt is jelenti, hogy a törésmutató sűrűségfüggésének érvényességével kapcsolatban nemcsak a kicsi, hanem a nagy sűrűségek tartományában is kétségek merülhetnek fel.

Hivatkozások

[1] R. Feynman: Mai fizika 1.

Asztalos Bogdán és Gombkötő Ákos beküldött megoldásai alapján került összeállításra.