Matematik B, STX

18. maj 2017

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Ligningen løses.

$$4x-1=17-5x \Leftrightarrow 4x-1+1+5x=17-5x+5x \Leftrightarrow 9x=18 \Leftrightarrow$$
$$\frac{9x}{9}=\frac{18}{9} \Leftrightarrow x=2$$

Løsningen er $x=2$ som kan verificeres.

Opgave 2:

a) Vækstraten og begyndelsespunktet er kendt, så fremskrivningsfaktoren bestemmes.

$$a=1+r=1+\frac{25}{100}=1.25$$

Forskriften er en eksponentiel funktion, så

$$f(t)=250\cdot 1.25^t$$

Hvor $f(t)$ er antallet af brugere af den bestemte app til tidspunktet t, målt i år efter 2014.

Opgave 3:

a) Arealet er 24, så anvendes arealformlen kan højden bestemmes.

$$24=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot |BC| \Leftrightarrow 48=8\cdot |BC| \Leftrightarrow |BC|=\frac{48}{8}=6$$

Pythagoras benyttes så $|AB|$ kan bestemmes.

$$|AB|=\sqrt{8^2+6^2}=\sqrt{10^2}=10$$

Dermed blev de ønskede længder udregnet.

Opgave 4:

a) Først udregnes $f(2)$.

$$f(2)=4\cdot 2^3-8\cdot 2+6=22$$

Dernæst bestemmes en stamfunktion til f.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\,dx = \int (4x^3-8x+6)\,dx \\ &= \frac{4}{3+1}x^{3+1}-\frac{8}{1+1}x^{1+1}+6x+k \\ &= x^4-4x^2+6x+k \end{aligned}$$

For $k\in\mathbb{R}$.

Opgave 5:

a) Mulige funktionsforskrifter for $f(x)$, $g(x)$ og $h(x)$ er

$$f(x) = 3x - 2$$
$$g(x) = \frac{1}{2}x + 2$$
$$h(x) = -x + 2$$

For $f(x)$ er hældningskoefficienten 3 og begyndelsesværdien -2.

For $g(x)$ er hældningskoefficienten $1/2$ og begyndelsesværdien 2.

For $h(x)$ er hældningskoefficienten -1 og begyndelsesværdien 2.

Det ses, at $g(x)$ og $h(x)$ har samme begyndelsesværdi.

Opgave 6:

a) Det ses, at c-værdien er 1, da denne skærer y-aksen i $P(0;1)$.

$$f(x) = ax^2 + bx + 1$$

Dermed er det kun a og b tilbage. Findes $f'(x)$ fås $f'(x) = 2ax + b$. Sættes koordinatsættet for toppunktet ind i $f'(x)$ er

$$0 = 2 \cdot a \cdot 2 + b$$

Og for $f(x)$

$$9 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + 1$$

Så har man et ligningssystem

$$\begin{aligned} 0 &= 4a + b \quad &(1) \\ 9 &= 4a + 2b + 1 \quad &(2) \end{aligned}$$

Ved lige store koefficienters metode multipliceres 2 på (1), så

$$0 = 8a + 2b \quad (3)$$

Så kan ligningerne (2) og (3) trækkes fra hinanden.

$$9 - 0 = 4a - 8a + 2b - 2b + 1 \Leftrightarrow 9 = -4a + 1 \Leftrightarrow 4a = -8 \Leftrightarrow a = -2$$

Og nu kan b nemt findes. Man indsætter $a = -2$ i (1), (2) eller (3).

$$0 = 4 \cdot (-2) + b \Leftrightarrow b = 8$$

Så der kan sluttes, at tallene a, b og c er hhv.

$$a = -2, \qquad b = 8, \qquad c = 1$$

Løsningsforslag med hjælpemidler

Opgave 7: [Via Maple]

a) I Maple laves der eksponentiel regression. Tabellens oplysninger indlæses.

```
restart
with(Gym) :
E1 := [0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24] :
E2 := [30, 40, 49, 54, 68, 85, 101, 117, 138] :
f(t) := ExpReg(E1, E2, t) :
evalf[6](f(t))
                    32.0404 1.06434^t                    (1)
```

Dermed er tallene a og b hhv. $a = 1.06434$ og $b = 32.0404$.

b) Fordoblingstiden er

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1.06434)} = 11.116$$

Dvs. ca. hvert 11 måned fordobles antallet af brugere på Twitter.

c) Funktionen differentieres.

$$f'(t) = 32.0404 \cdot 1.06434^t \cdot \ln(1.06434)$$

Så er $f'(30) = 32.0404 \cdot 1.06434^{30} \cdot \ln(1.06434) = 12.971$

Dvs. efter 30 måneder øges antallet af Twitter brugere hver måned med 12.971 mio. brugere ifølge modellen.

Opgave 8: [Via GeoGebra]

a) Nulpunkterne bestemmes, dvs. der løses $f(x) = 0$.

$$x^3 - 8x^2 + 16x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 8x + 16) = 0$$

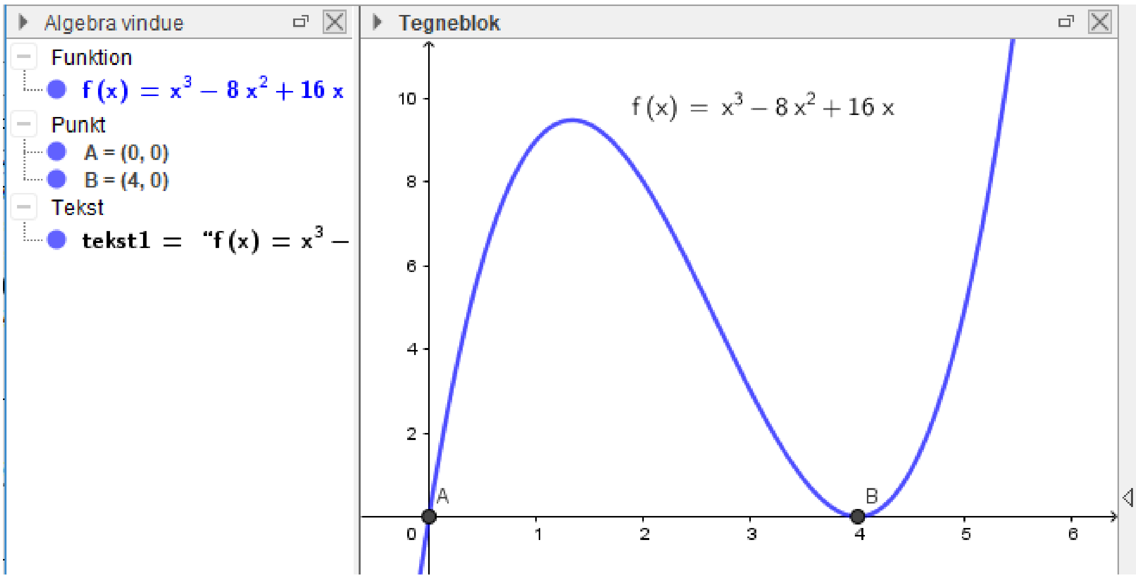
Ifølge nulreglen er $x = 0 \vee x^2 - 8x + 16 = 0$, så

$$x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 = 0 \Leftrightarrow (x-4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

Dermed er løsningerne til ligningen $f(x) = 0$

$$x = 0 \vee x = 4$$

Hvor $x = 4$ er dobbeltrod. I GeoGebra er grafen tegnet.



b) Arealet af M bestemmes vha. integralregning.

$$M = \int_0^4 (x^3 - 8x^2 + 16x)\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{8}{3}x^3 + 8x^2\right]_0^4 = \frac{1}{4}\cdot 4^4 - \frac{8}{3}\cdot 4^3 + 8\cdot 4^2 = \frac{64}{3}$$

Arealet er dermed $64/3 \approx 21.\overline{3}$.

Opgave 9: [Via Maple]

a) Funktionen defineres i Maple og dernæst bestemmes $f'(x)$ og ligningen $f'(x) = 0$ løses.

```
restart
with(Gym) :
f(x) := (x^2 − 8) e^(-x)
                    f := x ↦ (x^2 − 8) e^(-x)                (1)
f'(x)
                    2 x e^(-x) − (x^2 − 8) e^(-x)            (2)
Så løses
f'(x) = 0
                  2 x e^(-x) − (x^2 − 8) e^(-x) = 0          (3)
  solve for x
  ——————————→
                    [[x = 4], [x = −2]]                      (4)
```

Der foretages nu fortegnsvariation, hvor man anvender -3, 0 og 5. I Maple udregnes disse talværdier.

```
evalf[5](f'(-3))
                    −140.60                                  (5)
evalf[5](f'(0))
                    8.                                       (6)
evalf[5](f'(5))
                    −0.047165                                (7)
```

Endelig kan man lave monotoniskemaet.

x		-2		4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$

Dermed kan der sluttes, at

- $f(x)$ er aftagende i intervallet $]-\infty; -2] \cup [4; \infty[$
- $f(x)$ er voksende i intervallet $[-2; 4]$

b) Ligningen $f(x) = -6$ løses. Enkelte CAS-værktøjer oplever problemer med løsning af denne type ligning herunder Maple. **Nspire, WordMat og GeoGebra** vil der ikke være problemer.

restart
with(*Gym*) :
$f(x) := (x^2 - 8)\,\mathrm{e}^{-x}$

$$f := x \mapsto (x^2 - 8)\,\mathrm{e}^{-x} \qquad \textbf{(1)}$$

$f(x) = -6$

$$(x^2 - 8)\,\mathrm{e}^{-x} = -6 \qquad \textbf{(2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

Warning, solutions may have been lost

$$[[x = \mathit{RootOf}(\mathrm{e}^{-\_Z}\,\_Z^2 - 8\,\mathrm{e}^{-\_Z} + 6)]] \qquad \textbf{(3)}$$

evalf[5]((**3**))

$$[[x = -2.7605 + 7.6032\;10^{-10}\,\mathrm{I}]] \qquad \textbf{(4)}$$

Nej, den går ikke. Nedenstående kommando virker:
fintervalsolve($f(x) = -6, -100..100$)

$$[-2.760515359, 0.2779762722] \qquad \textbf{(5)}$$

Er man en af de stærkere bruger af Maple, så kan man også skrive

fsolve($f(x) = -6, x = -3$)

$$-2.760515359 \qquad \textbf{(6)}$$

fsolve($f(x) = -6, x = 0$)

$$0.2779762722 \qquad \textbf{(7)}$$

Dermed fandt man de to løsninger til ligningen $f(x) = -6$.

Opgave 10:

a) Indsættes $x = 0.2$ så fås

$$y = 22.41 \cdot 0.2^{0.663} = 7.709$$

Så når rumfanget er $0.2dm^3$ er overfaldearealet $7.709dm^2$.

b) Her anvendes formlen

$$r_y = ((1 + r_x)^a - 1) \cdot 100\%$$

Her er $a = 0.663$ og $r_x = 10\% = 0.1$, så

$$r_y = ((1 + 0.1)^{0.663} - 1) \cdot 100\% = 6.523\%$$

Så når rumfanget øges med 10%, øges overfaldearealet med 6.523%.

Opgave 11: [Via Maple]

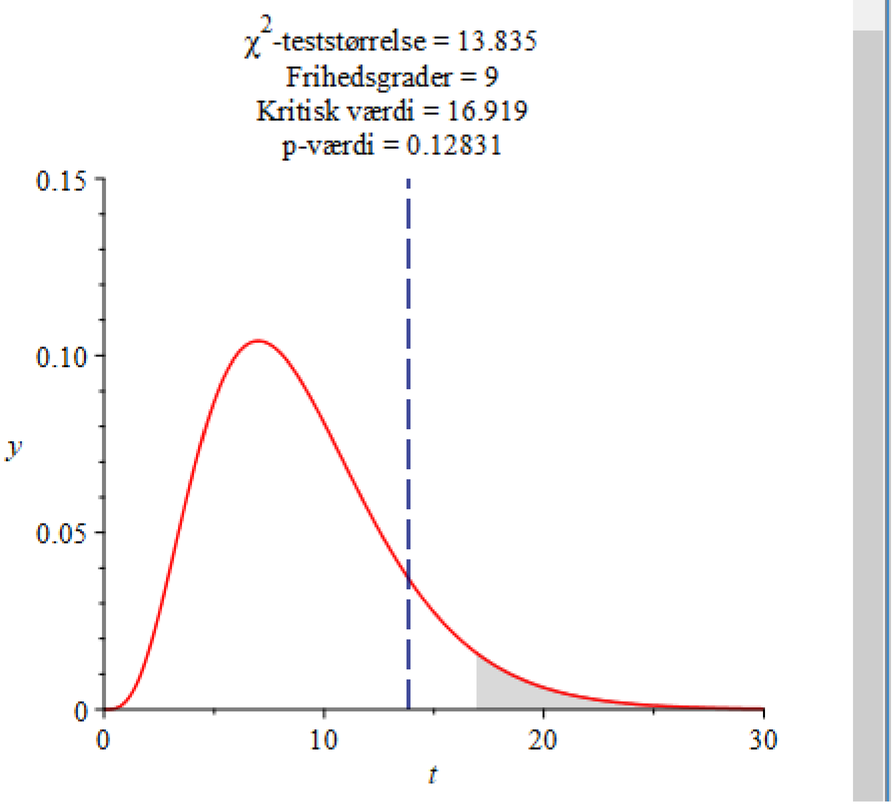
a) I Maple indlæses de observerende værdier samt at de forventede værdier udregnes.

```
restart
with(Gym) :
obs := [283, 60, 31, 40, 88, 9, 192, 179, 90, 57] :
forv := 1029/100 · [26.3, 4.6, 3.4, 4.2, 7.5, 0.8, 21.1, 19.5, 7.8, 4.8] :
evalf[5](forv)
[270.63, 47.334, 34.986, 43.218, 77.175, 8.2320, 217.12, 200.66, 80.262, 49.392]
```

Der multipliceres med 1029 på alle procentværdierne, hvorved dette deles med 100, da man ønsker de forventede antal stemmer ud fra procentværdierne. Tallet 1029 er summen af antallet af stemmer i stikprøven.

b) I Maple foretages en chi-anden-test.

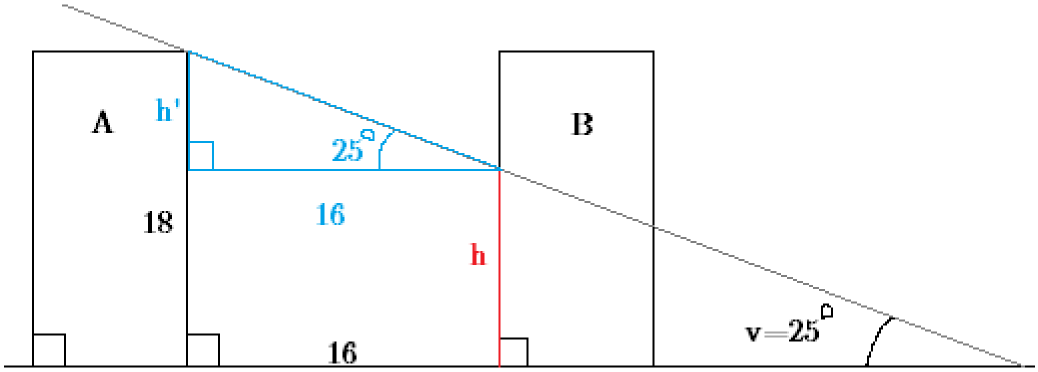
```
ChiKvadratGOFtest(obs, forv, level = 0.05)
```



Da p-værdien er over de 0.05 signifikansniveau der testes med, accepteres nulhypotesen.

Opgave 12:

a) En skitse tegnes ud fra opgavebeskrivelsen. Bemærk den blå trekant der er tilføjet. Her udregnes h', hvor denne værdi kan fratrækkes den totale højde på 18m, så man får h.



Højden h' findes ved formlen

$$h' = \tan(25) \cdot 16 = 7.46$$

Da højden $h' = 7.46$m, så er $h = 18 - h' = 18 - 7.46 = 10.54$m.

Opgave 13:

a) Topunktsformlerne anvendes.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{230 - 410}{40 - 15} = -7.2$$
$$b = y_1 - ax_1 = 410 - (-7.2) \cdot 15 = 518$$

Dermed er forskriften for $f(x) = -7.2x + 518$

b) $g(x) = x \cdot (-7.2x + 518) = -7.2x^2 + 518x, \;\; 0 < x < 70.$

$$g'(x) = 0$$

Løses, sådan så man kan finde den kilopris, der giver den største omsætning.

$$-14.4x + 518 = 0 \Leftrightarrow 14.4x = 518 \Leftrightarrow x = \frac{518}{14.4} = 35.972 \approx 36$$

Ved fortegnsvariation er

$$f'(34) = -14.4 \cdot 34 + 518 = 28.4$$
$$f'(37) = -14.4 \cdot 37 + 518 = -14.8$$

Dette bekræfter, at $x = 36$ er den kilopris, der giver den største omsætning.

Matematik B, STX

23. maj 2017

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

b) Ligningen løses.

$$3x + 2 = 14 \Leftrightarrow 3x + 2 - 2 = 14 - 2 \Leftrightarrow 3x = 12 \Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{12}{3} \Leftrightarrow x = 4$$

Opgave 2:

a) Forholdet bestemmes.

$$k = \frac{|DF|}{|AC|} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Længden $|DE|$ bestemmes.

$$|DE| = k \cdot |AB| = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12$$

Længden $|BC|$ bestemmes.

$$|BC| = \frac{|EF|}{k} = \frac{9}{\frac{3}{2}} = \frac{9 \cdot 2}{3} = 6$$

Opgave 3:

a) Den eneste funktion med størst b-værdi er $h(x)$, så $h(x)$ svarer til grafen for C. Graferne for A og B har begge samme b-værdi men forskellige a-værdier. Det ses, at $f(x)$ har en a-værdi mellem 0 og 1, dermed er denne aftagende. På grafen ses det at det er B. Grafen for $g(x)$ har en a-værdi større end 1, dette er grafen for A. Så der kan sluttes at

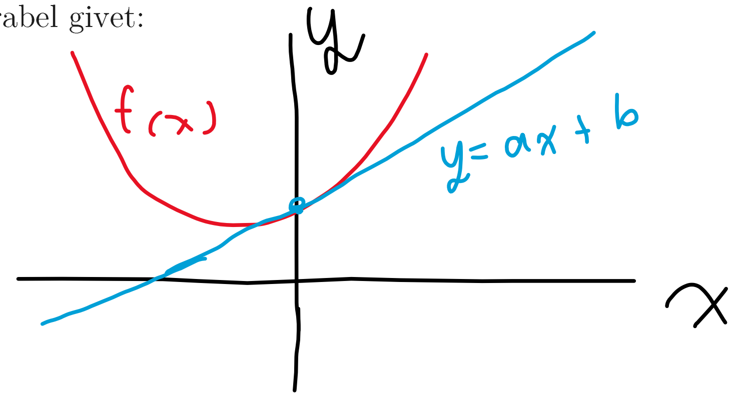
$f(x)$ tilhører B.

$g(x)$ tilhører A.

$h(x)$ tilhører C.

Opgave 4:

a) Givet forskriften $f(x) = ax^2 + bx + c$, her er $a > 0$, $b > 0$ og $c > 0$. Dermed er en mulig parabel givet:



Den røde graf angiver $f(x)$, og den blå tangent i punktet $(0; c)$ angiver tangenten, og da hældningstallet for linjen er positiv, så er $b > 0$. Det ses, at grafen er konveks (dvs. glad med grenene opad) og skæringen med y-aksen er over x-aksen. Så parablen passer med forskrifterne.

Opgave 5:

a) En stamfunktion bestemmes.

$$F(x) = \int (9x^2 - 2x - 5)\, dx = \frac{9}{2+1}x^{2+1} - \frac{2}{1+1}x^{1+1} - 5x + k$$
$$= 3x^3 - x^2 - 5x + k$$

Så isoleres k, når man har punktet P.

$$13 = 3 \cdot 2^3 - 2^2 - 5 \cdot 2 + k \Leftrightarrow 13 = 10 + k \Leftrightarrow k = 3$$

Den ønskede stamfunktion igennem P er

$$F(x) = 3x^2 - x^2 - 5x + 3$$

Opgave 6:

a) Funktionen $f(x)$ differentieres.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 3, \qquad x > 0$$

Sættes ovenstående lig med hældningskoefficienten for y, er

$$\frac{1}{x} + 3 = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Laves en tangentligning for $f(x)$ med $x = 1$ er

$$f(1) = \ln(1) + 3 \cdot 1 + 2 = 0 + 5 = 5$$
$$f'(1) = \frac{1}{1} + 3 = 1 + 3 = 4$$

Så $y = 4(x-1) + 5 = 4x - 4 + 5 = 4x + 1$ og dermed passer det.

Løsningsforslag med hjælpemidler

Opgave 7: [Via Maple]

a) Tabellens oplysninger indskrives i Maple, og der foretages lineær regression.

```
restart
with(Gym) :
L1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6] :
L2 := [2981, 3335, 3759, 3936, 4349, 4680, 4916] :
f(x) := LinReg(L1, L2, x) :
evalf[6](f(x))
                    324.464 x + 3020.32                (1)
```

Dermed er tallene a og b bestemt til hhv.

$$a = 324.464, \qquad b = 3020.32$$

b) År 2018 svarer til $x = 8$, så der gælder

$$f(8) = 324.464 \cdot 8 + 3020.32 = 5616.032 \approx 5616$$

Så i år 2018 vil der være 5616 tilfælde af misligholdte SU-lån under $50\,000$kr ifølge modellen.

Opgave 8:

a) Der er oplyst vækstraten samt begyndelsestiden. Omregnes vækstraten til fremskrivningsfaktoren vil det være muligt at opstille en eksponentiel model.

$$a = 1 + r = 1 + \frac{3.4}{100} = 1.034$$

Så modellen er

$$f(x) = 950 \cdot 1.034^x$$

Hvor $f(x)$ beskriver udviklingen af råvildt til tidspunktet x, målt i år efter år 2010.

b) Fordoblingstiden udregnes.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1.034)} = 20.731$$

Dvs. antallet af råvildt i populationen fordobles hver 20.7 år.

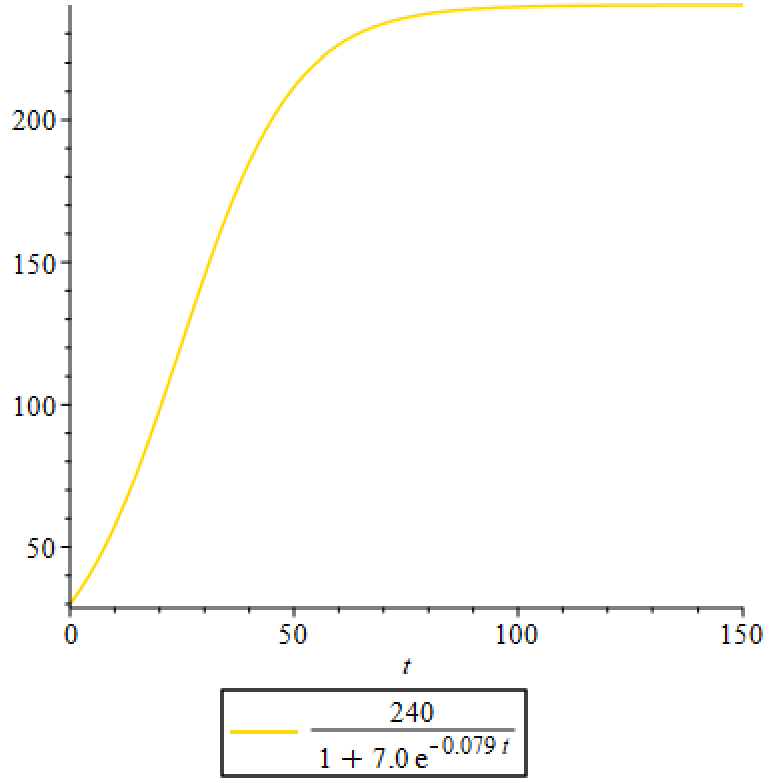
Opgave 9:

a) I Maple defineres den matematiske model, og der laves en skitse.

restart
with(Gym) :

$M(t) := \frac{240}{1 + 7.0 \cdot \exp(-0.079 \cdot t)}$:

plot(M(t), t = 0 ..150, legend = M(t), color = "Gold")



Dernæst løses ligningen $M(t) = 100$.

$M(t) = 100$

$$\frac{240}{1 + 7.0\, e^{-0.079\, t}} = 100 \quad \textbf{(1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 20.37263180]] \quad \textbf{(2)}$$

Så 20.4 år efter udviklingen af biomasse på et landområde vil der være 100 tons pr. hektar.

b) I Maple udregnes tallet $M'(10)$.

$M'(10)$

$$3.452492592 \quad \textbf{(1)}$$

Dvs. efter 10 år fra udviklingen af biomassen vil man for hvert år der går, øge mængden af biomasse på landområdet med 3.45 tons pr. hektar.

Opgave 10:

a) Funktionen differentieres. [OBS: Denne opgave anbefales at løses i CAS].

$$f'(x) = \left((x^2-3)\cdot \mathrm{e}^{x+2}\right)'$$

Produktreglen samt kædereglen anvendes.

$$f'(x) = (x^2-3)\cdot \mathrm{e}^{x+2} + 2x\cdot \mathrm{e}^{x+2}$$

Dernæst løses ligningen $f'(x) = 0$

$$(x^2-3)\mathrm{e}^{x+2} + 2x\mathrm{e}^{x+2} = 0 \Leftrightarrow (x^2-3+2x)\mathrm{e}^{x+2} = 0 \Leftrightarrow x^2-3+2x = 0$$

Da $\mathrm{e}^{x+2} = 0$ er undefined. Dermed løses en andengradsligning.

$$x^2-3+2x = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0$$

Så er løsningerne $x = -3 \vee x = 1$.

I Maple:

restart
with(*Gym*) :
$f(x) := (x^2-3)\cdot \exp(x+2)$:
$f'(x) = 0$

$$2\,x\,\mathrm{e}^{x+2} + (x^2-3)\,\mathrm{e}^{x+2} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x=1],[x=-3]] \qquad \textbf{(2)}$$

Dermed laves der fortegnsvariation.

$$f'(-4) = ((-4)^2-3)\mathrm{e}^{-4+2} + 2\cdot(-4)\cdot \mathrm{e}^{-4+2} = 5\mathrm{e}^{-2} \approx 0.67670$$
$$f'(0) = (0^2-3)\mathrm{e}^{0+2} + 2\cdot 0\cdot \mathrm{e}^{0+2} = -3\mathrm{e}^2 \approx -22.167$$
$$f'(2) = (2^2-3)\mathrm{e}^{2+2} + 2\cdot 2\cdot \mathrm{e}^{2+2} = 5\mathrm{e}^4 \approx 272.99$$

Monotoniskemaet er

x		-3		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

Dermed kan der sluttes, at

- $f(x)$ er voksende i intervallet $]-\infty;-3] \cup [1;\infty[$
- $f(x)$ er aftagende i intervallet $[-3;1]$

b) Tangentligningen i punktet 0 udregnes. Fra fortegnsvariationen fik man at $f'(0) = -3\mathrm{e}^2 \approx -22.167$ og $f(0) = (0^2-3)\cdot \mathrm{e}^{0+2} = -3\mathrm{e}^2 \approx -22.167$, så samme svar.

Dermed er tangentens ligning

$$y = -3\mathrm{e}^2(x-0) + (-3\mathrm{e}^2) = -3\mathrm{e}^2x - 3\mathrm{e}^2$$

Afrundet:

$$y = -22.167x - 22.167$$

Opgave 11: [Via Maple]

a) En hypotese:

H: Der er ingen sammenhæng mellem bekymring og køn.

b) De forventede værdier udregnes i Maple. Man opstiller en 2×3 matrix, og indsætter de observerende værdier.

```
restart
with(Gym) :
```

$$obs := \begin{bmatrix} 353 & 117 & 54 \\ 314 & 167 & 26 \end{bmatrix} :$$

```
forventet(obs)
```

$$\begin{bmatrix} 339.00 & 144.34 & 40.660 \\ 328.00 & 139.66 & 39.340 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

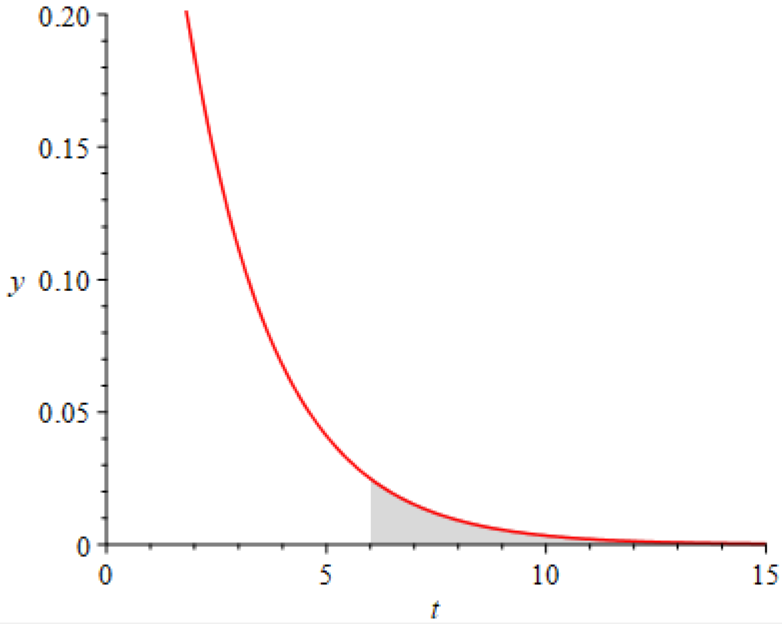
Dermed blev de forventede værdier bestemt. Disse kan regnes manuelt vha. formlen

$$forventet = \frac{sum\ lodret \cdot sum\ vandret}{sum\ total}$$

I Maple udregnes en teststørrelse, som skal vise om hypotesen skal accepteres eller afvises.

$ChiKvadratUtest(obs, level = 0.05)$

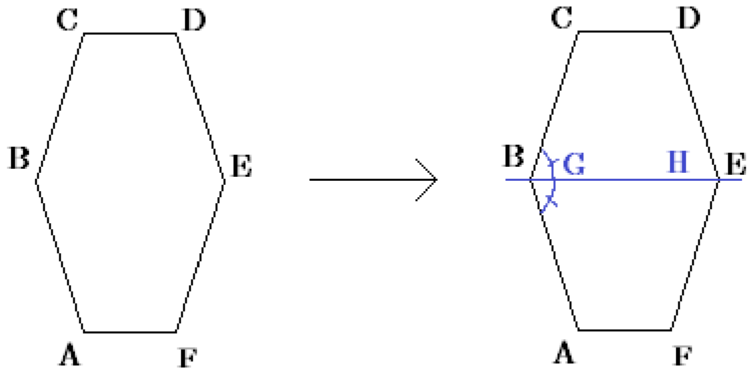
χ^2-teststørrelse = 20.608
Frihedsgrader = 2
Kritisk værdi = 5.9915
p-værdi = 0.000033491



Den linje som normal optræder er ikke synlig, p-værdien er meget lille og meget mindre end 0.05, så afvises hypotesen H.

Opgave 12:

a) Vinkel B er symmetrisk, så denne kan deles i to. Mere specifikt:



Den totale afstand $|AC| = 40$cm, men da dette er symmetrisk om den blå linje, så anvendes $|AG| = |GC| = 20$cm. Afstanden $|BE| = 24$cm og $|AF| = 12$cm giver hver side 6cm, mere specifikt: $|BG| = |HE| = 6$cm, dermed kan vinkel B_{halv} bestemmes.

$$B_{halv} = \arctan\left(\frac{CG}{BG}\right) = \arctan\left(\frac{20}{6}\right) = 73.3^o$$

Da vi skar halvdelen over, er den rigtige vinkel

$$B = 2 \cdot B_{halv} = 2 \cdot 73.3^o = 146.6^o$$

I trekanten ABG kender man vinkel $B_{halv} = 70.3^o$ og $G = 90^o$, så er $A_{ABG} = 180^o - 73.3^o - 90^o = 16.7^o$, men dette er en spids vinkel, man ved jo, at A dækker hele ABF, så den rigtige vinkel A er $A = A_{ABG} + 90^o = 16.7^o + 90^o = 106.7^o$, så kort:

$$A = 106.7^o$$
$$B = 146.6^o$$

b) Omkredsen for en flise bestemmes.

$$O_{flise} = |BC| + |CD| + |DE| + |EF| + |FA| + |AB|$$

Her kender man $|CD| = |AF| = 12$. De resterende bestemmes vha. figuren fra spørgsmål a. Længden $|CG|$ kendes og $|BG|$ kendes. Vha. Pythagoras kan man få $|BC|$, så $|BC| = \sqrt{20^2 + 6^2} = 20.88$cm, så den totale omkreds er

$$O_{flise} = 20.88 + 12 + 20.88 + 20.88 + 12 + 20.88 = 107.52$$

Så omkredsen af den angivende flise er 107.52cm.

Længden $|BF|$ kan udregnes vha. cosinusrelationerne. Her er $|AB| = 20.88$ og $|AF| = 12$ samt $A = 106.7^o$, så

$$|BF| = \sqrt{20.88^2 + 12^2 - 2 \cdot 20.88 \cdot 12 \cdot \cos(106.7)} = 26.907$$

Så længden $|BF|$ er 26.906cm.

Opgave 13:

a) Her er $x = 50$, så denne indsættes i funktionen.

$$f(50) = 0.00005 \cdot 50^3 - 0.0005 \cdot 50^2 + 0.55 \cdot 50 = 32.5$$

Dvs. 50% af den fattigste andel af landets befolkning udgør 32.5% af landets samlede indkomst.

b) Funktionen $g(x) = x - f(x) = -0.00005 \cdot x^3 + 0.0005 \cdot x^2 + 0.45 \cdot x, \quad 0 \leq x \leq 100$. Funktionen differentieres.

$$g'(x) = 0.45 - 0.00015 \cdot x^2 + 0.0010 \cdot x, \qquad 0 \leq x \leq 100$$

Ligningen $g'(x) = 0$, som så er en andengradsligning.

$$0.45 - 0.00015 \cdot x^2 + 0.0010 \cdot x = 0$$

Løsningerne er

$$x = \frac{-0.0010 \pm \sqrt{0.0010^2 - 4 \cdot (-0.00015) \cdot 0.45}}{2 \cdot (-0.00015)}$$

$$= \frac{-0.0010 \pm 0.01646207763}{-0.0003} = \begin{cases} \dfrac{-0.0010 + 0.01646207763}{-0.0003} = -51.540 \\ \dfrac{-0.0010 - 0.01646207763}{-0.0003} = 58.207 \end{cases}$$

Det negative tal er ikke med i domænet for g, dermed anvendes det positive tal. Dette indsættes i g.

$$g(58.207) = -0.00005 \cdot 58.207^3 + 0.0005 \cdot 58.207^2 + 0.45 \cdot 58.207 = 18.027$$

Dvs. Robin Hood indekset for landet er 18.027%

Matematik B, STX

15. august 2017

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Benyt topunktsformlerne for en lineær funktion.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{3-1} = 3$$
$$b = y_1 - ax_1 = 2 - 3 \cdot 1 = -1$$

Dermed er tallene $a = 3$ og $b = -1$ fundet.

Opgave 2:

a) Andengradsligningen løses. Den kan løses vha. diskriminanten. Dette overlades til læseren.

$$x^2 - 10x + 21 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-7) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 7$$

Opgave 3:

a) Da skalafaktoren k er 2, så er

$$|AC_1| = |AC| \cdot k = 5 \cdot 2 = 10$$

Dernæst bestemmes $|BC|$. Dette gøres vha. Pythagoras.

$$|BC| = \sqrt{|AB|^2 - |AC|^2} = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$$

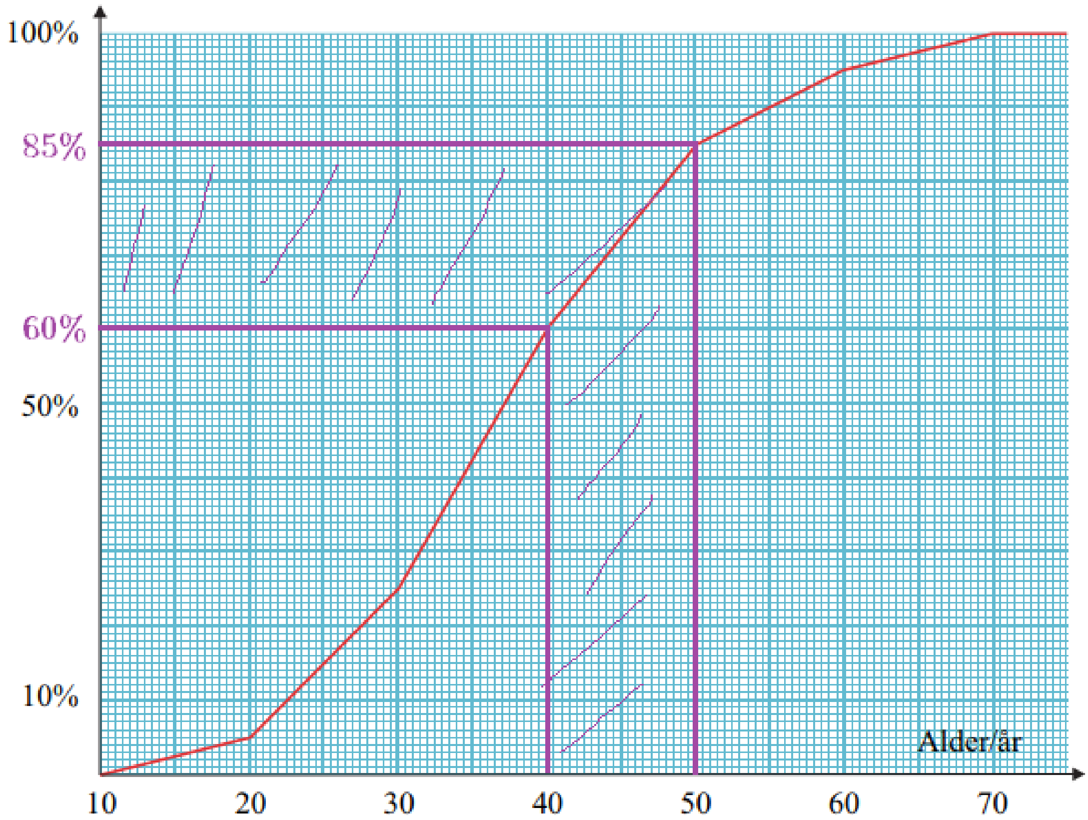
Opgave 4:

a) h isoleres.

$$\frac{h}{2} - 10 = M \Leftrightarrow \frac{h}{2} - 10 + 10 = M + 10 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{h}{2} = 2 \cdot (M + 10) \Leftrightarrow$$
$$h = 2 \cdot (M + 10) = 2M + 20$$

Opgave 5:

a) Vha. bilaget finder man ud af, hvor mange procent af arbejderne der er mere end 40år og mindre end 50år.



Så er den procentvise differens $85\% - 60\% = 25\%$. Der er 80 arbejdere, så 25% af de 80 arbejdere er $\frac{25\%}{100} \cdot 80 = 0.25 \cdot 80 = \frac{1}{4} \cdot 80 = 20$, så der er 20 arbejdere i kategorien 40år til 50år.

Opgave 6:

a) En ligning for tangenten i $P\big(2; f(2)\big)$ bestemmes. Først udregnes $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 16x + 3$$

Så indsættes $x = 2$ i f og f', så

$$f(2) = 2^3 - 8 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 2 = -16$$
$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + 3 = -17$$

Dermed er tangentligningen i P fundet til at være

$$y = -17(x - 2) - 16 = -17x + 34 - 16 = -17x + 18$$

Løsningsforslag med hjælpemidler

Opgave 7: [Via Maple]

a) Tabellens data indlæses i Maple, og der foretages lineær regression.

```
restart :; with(Gym) :
L1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5] :
L2 := [411, 449, 487, 524, 560, 584] :
f(x) := LinReg(L1, L2, x) :
evalf[6](f(x))
                    35.2857 x + 414.286                    (1)
```

Dermed fik man - vha. Maple - bestemt tallene a og b, som er hhv.

$$a = 35.2857$$
$$b = 414.286$$

b) Tallet a fortæller, at for hvert år der går, efter år 2010, stiger antallet af hunde med $35\,286$ ifølge modellen.

Opgave 8:

a) Da der er oplyst vækstraten, og begyndelsesværdien, så kan man opstille en eksponentiel funktion. Først bestemmes fremskrivningsfaktoren.

$$a = 1 + r = 1 + \frac{5}{100} = 1.05$$

Så er forskriften

$$P(t) = 4500 \cdot 1.05^t$$

Hvor $P(t)$ er antallet af individer i populationen til tidspunktet t, målt i måneder.

b) Fordoblingstiden bestemmes.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.05)} = 14.2$$

Dvs. populationen fordobles ca. hver 14 måned.

Opgave 9:

a) Trekanten er vilkårlig, og man kender sidelængderne $|AB| = 5$ og $|AD| = 7$ samt vinkel $A = 40^o$. Længden $|BD|$ bestemmes vha. cosinusrelationerne.

$$|BD| = \sqrt{5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cos(40)} = 4.514$$

b) Længden $|BD| = |DC| = 4.514$, så man skal blot bestemme vinkel D i trekanten BCD. Dette kan man gøre ved at finde vinkel D i trekanten ABD, så

$$D_{ABD} = \arccos\left(\frac{4.514^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 4.514 \cdot 7}\right) = 45.396^o$$

Så ved at anvende vinkelsummen kan man finde vinkel D_{BCD}, så

$$D_{BCD} = 180^o - D_{ABD} = 180^o - 45.396^o = 134.604^o$$

Og dermed er det muligt at finde arealet BCD, så

$$T = \frac{1}{2} \cdot 4.514 \cdot 4.514 \cdot \sin(134.604) = 7.254$$

Hvilket er det ønskede areal.

Opgave 10: [Via Maple]

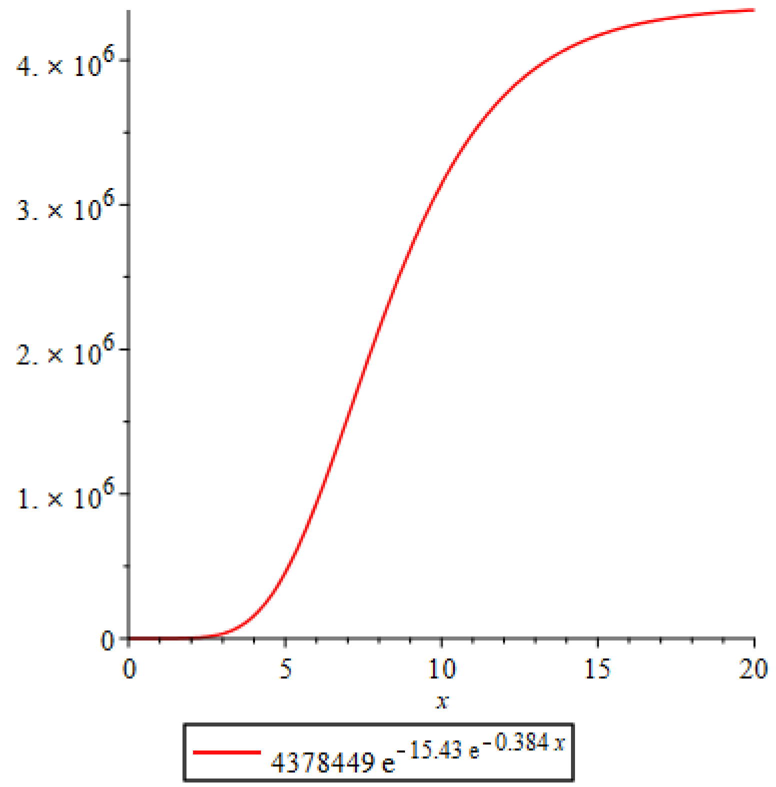
a) Grafen tegnes i Maple.

$restart :; with(Gym) :$

$f(x) := 4378449 \cdot \exp(-15.43 \cdot (\exp(-0.384 \cdot x)))$

$$f := x \mapsto 4378449\, e^{-15.43\, e^{-0.384\, x}} \quad (1)$$

$plot(f(x), x = 0..20, legend = f(x), color = "Red")$



b) Man indsætter $x = 3$ i modellen og udregner.

$f(3)$

$$33398.33756 \quad (2)$$

Dernæst løses ligningen $f(x) = 500\,000$ i Maple.

$f(x) = 500000$

$$4378449\, e^{-15.43\, e^{-0.384\, x}} = 500000 \quad (3)$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 5.108488114]] \quad (4)$$

Så i løbet af år 2005 oversteg artiklerne på Wikipedia med $500\,000$

c) I Maple udregnes $f'(10)$.

$f(10)$

$$400216.0404 \qquad (5)$$

Dvs. i år 2010 og frem, vokser antallet af artikler på Wikipedia med $400\,216$ hvert år.

Opgave 11:

a) Funktionen $f(x) = x^2 - 8\ln(x)$, $x > 0$ differentieres og ligningen $f'(x) = 0$ løses.

$$f'(x) = 2x - \frac{8}{x}, \qquad x > 0$$

Så er $f'(x) = 0$

$$2x - \frac{8}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{8}{x} \Leftrightarrow 2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Fordi $x > 0$, så er $x = 2$. Den anden afledede bestemmes.

$$f''(x) = 2 + \frac{8}{x^2}, \qquad x > 0$$

Indsættes $x = 2$ i $f''(x)$ fås

$$f''(2) = 2 + \frac{8}{2^2} = 2 + \frac{8}{4} = 4$$

Da $f''(2) > 0$ så er der minimum i $x = 4$, hvilket betyder, at

$f(x)$ er aftagende i intervallet $(0; 2]$ og voksende i intervallet $[2; \infty)$.

Opgave 12: [Via Maple]

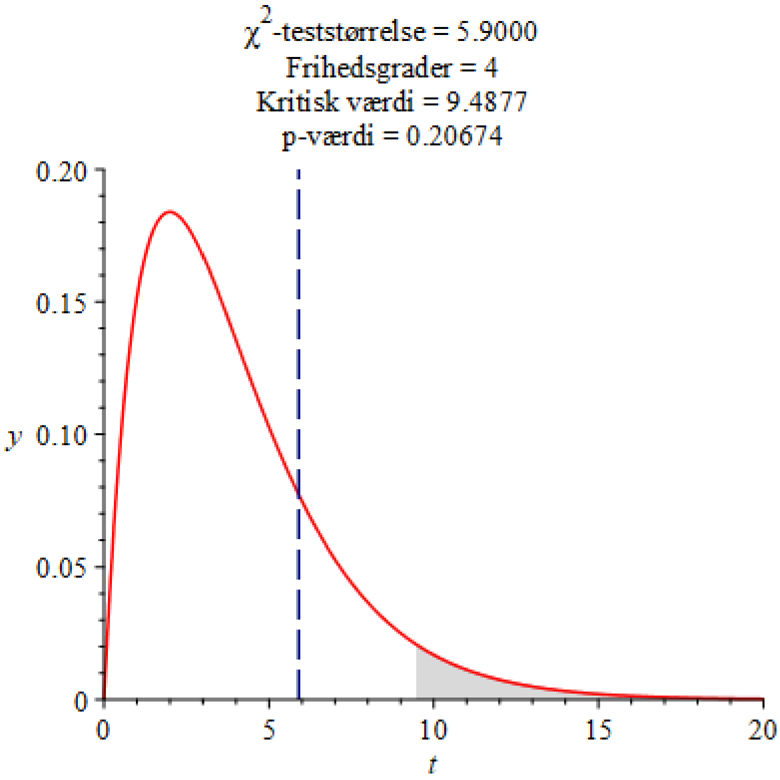
a) Stikprøve er de balloner man har valgt at udtage, i dette tilfælde er der foretaget en stikprøve på 100 balloner. Population er det sted man foretager en stikprøve på, dvs. populationen i dette tilfælde er det store parti balloner man påstår at der er lige mange hver. Så nulhypotesen er

H: Fabrikken producerer lige mange balloner i hver farve.

b) I Maple bestemmes det, om hypotesen skal accepteres eller afvises. Der er 100 balloner og dermed skal de forventede værdier være således, da der påstås at der bliver produceret lige mange i hver farve:

	Blå	Røde	Grønne	Gule	Lilla
Forventet	20	20	20	20	20
Obs	20	28	21	13	18

```
restart :; with(Gym) :
obs := [20, 28, 21, 13, 18] :
forv := [20, 20, 20, 20, 20] :
ChiKvadratGOFtest(obs, forv, level = 0.05)
```



Da p- værdien er større end 0.05, så accepteres nulhypotesen.

Opgave 13: [Via Maple]

a) Først bestemmes grænseværdierne, som ses nemt at være 0 og 6. Dette eftervises via beregning. Dermed bestemmes arealet i Maple:

$restart :; with(Gym) :$

$f(x) := -x^2 + 6x :$

$f(x) = 0$

$$-x^2 + 6x = 0 \qquad (1)$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 0], [x = 6]] \qquad (2)$$

$M = \int_0^6 f(x)\,dx$

$$M = 36 \qquad (3)$$

Dvs. ifølge Maple er arealet af $M = 36$.

b) Arealet N skal være $1/3$ af M, så

$$N = \frac{1}{3} \cdot M = \frac{1}{3} \cdot 36 = 12$$

I Maple findes k.

$evalf[5]\left(fsolve\left(12 = \int_0^k f(x)\,dx\right)\right)$

$$-1.8237, 2.3218, 8.5020 \qquad (3)$$

Da -1.8237 og 8.5020 ikke er med i definitionsmængden for k, så er $k = 2.3218$ den værdi, der giver et areal på 12.

Matematik B, STX

07. december 2017

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Ligningen løses.

$$3x + 5 = 2x - 1 \Leftrightarrow 3x + 5 - 2x = 2x - 1 - 2x \Leftrightarrow x + 5 = -1 \Leftrightarrow$$
$$x + 5 - 5 = -1 - 5 \Leftrightarrow x = -6$$

Så $x = -6$ er løsningen til ligningen. (Kan kontrolleres ved at indsætte $x = -6$ i ligningen).

Opgave 2:

a) Den angivende funktion $f(x) = \mathrm{e}^x + x^2$ differentieres.

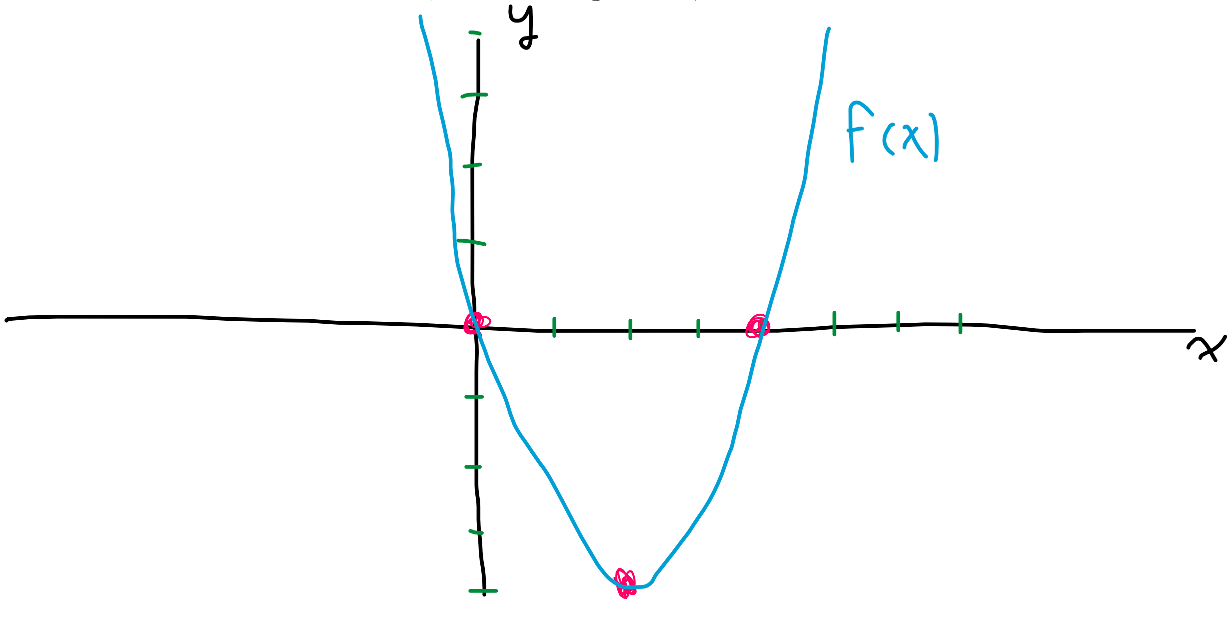
$$f'(x) = \mathrm{e}^x \cdot \ln(\mathrm{e}) + 2 \cdot x^{2-1} = \mathrm{e}^x + 2x$$

Opgave 3:

a) Da parablen ingen c-værdi har, så er er skæring i $x = 0$. Man kan vise, at de skærer førsteaksen ved at indsætte $x = 0$ og $x = 4$ i parablen.

$$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 = 0$$
$$f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 = 0$$

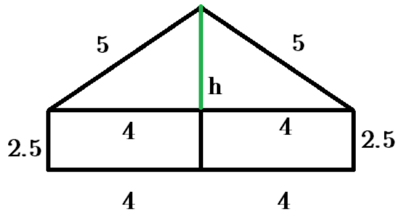
Parablen er symmetrisk i toppunktet, og toppunktet ligger i $x = 2$, så $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$. Det ses, at $a > 0$ og $b < 0$, så en skitse:



Sådan cirka.

Opgave 4:

a) Da gavlen er symmetrisk om h, så er grundlinjen $4+4$. (se skitse)



Dermed med disse oplysninger, er det muligt at anvende Pythagoras til at finde den grønne linje, hvor man efterfølgende finder hele h.

$$grøn = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$$

Så er hele højden $h = 2.5 + 3 = 5.5$, dvs. gavlens højde er 5.5 meter.

Opgave 5:

a) Stamfunktionen til $f(x)$ benævnes med $F(x)$, så

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int (3x-2)\,dx = \frac{3}{2}x^2 - 2x + k$$

Så kan man bestemme k vha. punktet $P(2;1)$. Man får

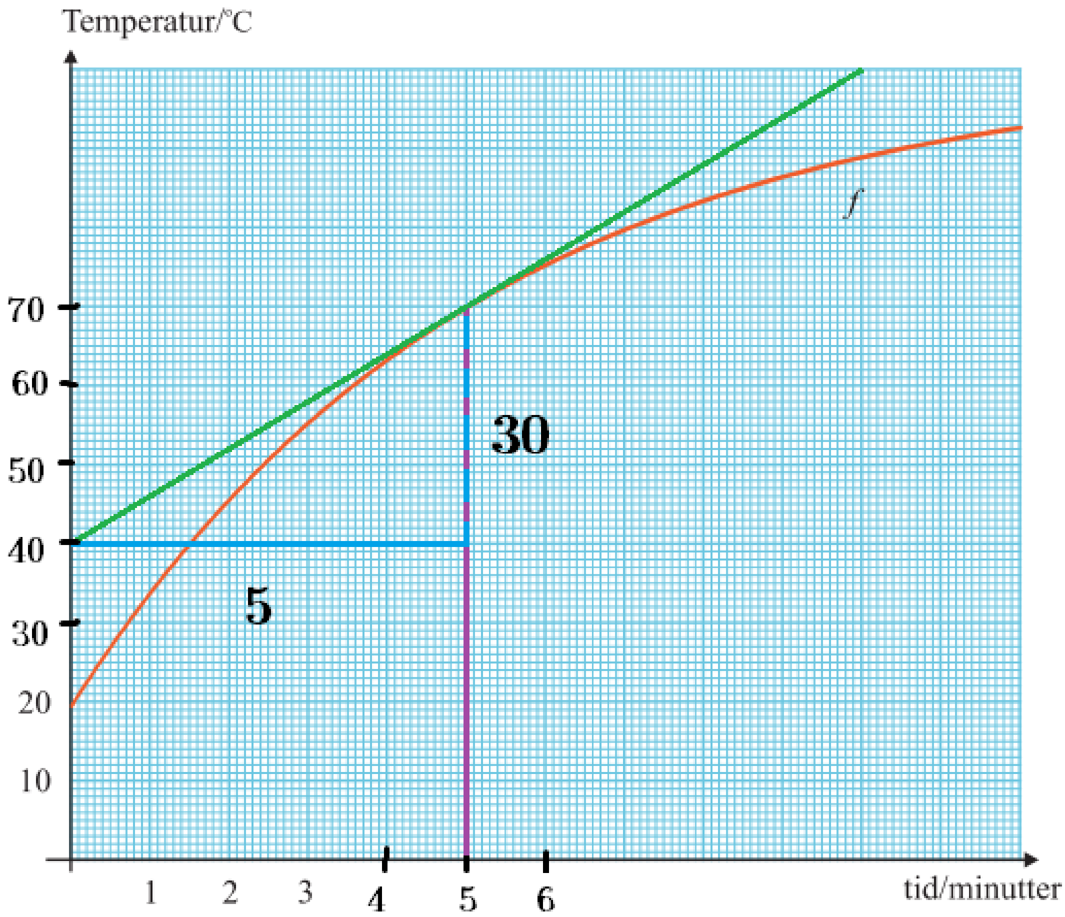
$$1 = \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + k \Leftrightarrow 1 = 2 + k \Leftrightarrow k = -1$$

Dermed er den ønskede stamfunktion til $f(x)$ som gennemløber P

$$F(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x - 1$$

Opgave 6:

a) Ved at udnytte bilaget kan man udregne $f'(5)$ som beskriver hældningen for tangenten i $x = 5$.



Så dermed har man hældningen (se blå trekant med grøn hypotenuse).

$$a = \frac{30^o C}{5min} = 6^o C/min$$

Dermed kan der sluttes, at efter 5 minutter stiger temperaturen i det bestemte vandbad med $6^o C$ pr. minut.

Løsningsforslag med hjælpemidler

Opgave 7: [Via Maple]

a) Tabellens data indlæses i Maple, og der foretages lineær regression.

```
restart :; with(Gym) :
L1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5] :
L2 := [45596, 45145, 44908, 44494, 44230, 44078] :
f(x) := LinReg(L1, L2, x) :
evalf[5](f(x))
                    -307.11 x + 45510.                    (1)
```

Dermed fik man - vha. Maple - bestemt tallene a og b, som er hhv.

$$a = -307.11$$
$$b = 45510$$

b) I Maple løses ligningen $f(x) = 42000$, så

```
solve(-307.11 x + 45510 = 42000)
                    11.42912963                    (2)
```

Dvs. i løbet af år 2021 vil der i Thisted kommune være 42000 indbyggere ifølge modellen.

Opgave 8: [Via Maple]

a) Denne opgave kan løses vha. WordMat og Excel, som overlades til læseren.

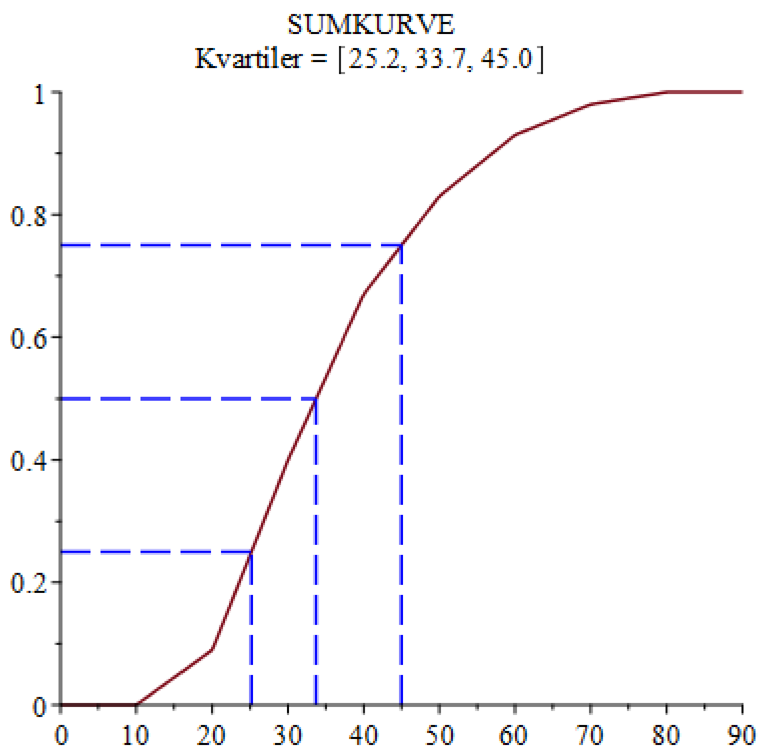
I Maple indlæses cirkeldiagrammets oplysninger.

```
restart :; with(Gym) :
       [10..20  0.09]
       [20..30  0.31]
       [30..40  0.27]
M :=   [40..50  0.16] :
       [50..60  0.10]
       [60..70  0.05]
       [70..80  0.02]
frekvensTabel(M)
  observation   frekvens(%)  kumuleret(%)
     10 .. 20             9             9
     20 .. 30            31            40
     30 .. 40            27            67
     40 .. 50            16            83
     50 .. 60            10            93
     60 .. 70             5            98
     70 .. 80             2           100
```

Så ifølge Maple er de kumulerede frekvenser bestemt (helt til højre). Som også kan regnes i hånden.

Maple kan også tegne sumkurven, så det gøres.

plotSumkurve(*M*)



Sumkurven viser aldersfordelingen blandt medlemmerne i kæden af fitnesscentre. Derudover er kvartilsættet fundet.

b) Fra spørgsmål a kunne man se kvartilsættet, men dette kan alene også bestemmes vha. kommandoen "kvartiler".

kvartiler(*M*)

[25.161, 33.704, 45.000] **(1)**

Så ifølge Maple er kvartilsættet (afrundet mht. alder) [25,34,45].

Procentdelen af medlemmer i kæden af fitnesscentre der er over 55år udregnes vha. Maple.

1 − *sumkurve*(*M*, 55)

0.120000000000000 **(2)**

%·100

12.0000000000000 **(3)**

Så antallet af medlemmer der er over 55år er 12%.

Opgave 9:

a) Sinusrelationerne anvendes til at finde vinkel B.

$$\frac{\sin(B)}{6} = \frac{\sin(77)}{7} \Leftrightarrow \sin(B)\cdot 7 = \sin(77)\cdot 6 \Leftrightarrow \sin(B) = \frac{\sin(77)\cdot 6}{7} \Leftrightarrow$$

$$B = \arcsin\left(\frac{\sin(77)\cdot 6}{7}\right) = 56.634^o$$

Så findes vinkel A.

$$A = 180^o - B - C = 180^o - 56.633^o - 77^o = 46.367^o$$

Længden $|BC|$ bestemmes via sinusrelationerne.

$$\frac{\sin(46.367)}{|BC|} = \frac{\sin(77)}{7} \Leftrightarrow \sin(46.367)\cdot 7 = \sin(77)\cdot |BC| \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin(46.367)\cdot 7}{\sin(77)} = |BC| \Leftrightarrow |BC| = 5.2$$

I Maple vil man kunne løse det hurtigere:

```
restart :; with(Gym) :
```

$$Cos(77) = \frac{6^2 + BC^2 - 7^2}{2\cdot 6\cdot BC} \xrightarrow{\text{solve for BC}}$$

$$[[BC = -2.500190707], [BC = 5.199603360]]$$

b) Længden $|DC|$ bestemmes via arealformlen.

$$12 = \frac{1}{2}\cdot 5.2\cdot |DC|\cdot \sin(77) \Leftrightarrow |DC| = \frac{12}{\frac{1}{2}\cdot 5.2\cdot \sin(77)} = 4.737$$

Så dette er længden $|DC|$.

Opgave 10: [Via Maple]

a) Den angivende funktion defineres i Maple og nulpunkterne bestemmes.

```
restart :; with(Gym) :
```

$$f(x) := x^4 - 5\cdot x^3 + 2\cdot x^2 + 8\cdot x :$$

$$f(x) = 0$$

$$x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 8x = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x = 0], [x = 2], [x = 4], [x = -1]] \quad \textbf{(2)}$$

b) Funktionens monotoniforhold bestemmes. Først differentieres funktionen og dernæst løses $f'(x) = 0$.

$$f'(x)$$

$$4x^3 - 15x^2 + 4x + 8 \quad \textbf{(3)}$$

$$evalf[5](fsolve(f'(x) = 0))$$

$$-0.57421, 1.0705, 3.2537 \quad \textbf{(4)}$$

Dermed blev ekstremaværdierne fundet. Vha. Maple udregnes den anden afledede.

$$f''(x)$$
$$12x^2 - 30x + 4 \quad \textbf{(5)}$$

Får man et tal, $f''(x) < 0$ så er der lokalt maks. Får man et tal $f''(x) > 0$ så er der lokalt min. Så de aflededes nulpunkter (fra $f'(x) = 0$) indsættes i $f''(x)$.

$$f''(-0.57421)$$
$$25.18290549 \quad \textbf{(6)}$$
$$25.18290549 > 0 \text{ lok. min.}$$
$$f''(1.0705)$$
$$-14.36335700 \quad \textbf{(7)}$$
$$-14.36335700 < 0 \text{ lok. maks.}$$
$$f''(3.2537)$$
$$33.42776428 \quad \textbf{(8)}$$
$$33.42776428 > 0 \text{ lok. min.}$$

Dermed kan der sluttes, at funktionen $f(x)$ er:

- Aftagende i intervallet $(-\infty; -0.57421] \cup [1.0705; 3.2537]$
- Voksende i intervallet $[-0.57421; 1.070] \cup [3.2537; \infty)$

c) Fra opgave b fik man, at grafen havde maksimum i $x = 1.0705$, hvilket betyder, at grafen må være over x-aksen i $x = 0$ og $x = 2$. (Hvis du ikke er overbevist, så skitser grafen). Arealet af M bestemmes vha. et integral med grænserne 0 og 2.

$$M = \int_0^2 f(x)\,dx$$
$$M = \frac{116}{15} \quad \textbf{(1)}$$
$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}} M = 7.7333$$

Som er det ønskede.

Opgave 11:

a) Der er angivet en eksponentiel funktionsforskrift.
Tallet 123700 fortæller, at i år 2015 var antallet af biler der kører pr. døgn ved den bestemte motorvejsstrækning 123700.

Man anvender fordoblingskonstanten, da $a > 1$.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.02)} \approx 35$$

Så der vil gå 35 år, før antallet af bilerne på strækningen er fordoblet.

b) Den anden model er

$$g(x) = 3000x + 123700$$

Så man løser ligningen $f(x) = g(x)$.

$$123700 \cdot 1.02^x = 3000x + 123700$$

Da ligningen ikke kan løses analytisk, så anvendes Maple.

$$123700 \cdot 1.02^x = 3000\,x + 123700$$

$$123700\ 1.02^x = 3000\,x + 123700 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x = 1.178294828\ 10^{-80}], [x = 19.82371944]] \qquad \textbf{(2)}$$

Dvs. i år 2035 vil man opnå samme antal biler på strækningen ifølge begge modeller.

Opgave 12:

a) Rumfangsformlen for æsken er:

$$V_{æske} = 2x \cdot x \cdot h = 2hx^2$$

Overfladearealet for æsken uden låg er:

$$O_{æske} = 2 \cdot x \cdot x + 2 \cdot 2 \cdot x \cdot h + 2 \cdot x \cdot h = 6hx + 2x^2$$

Så når $x = 12$ og $h = 10$ er

$$V_{æske} = 2 \cdot 10 \cdot 12^2 = 2880\text{cm}^3$$

$$O_{æske} = 6 \cdot 10 \cdot 12 + 2 \cdot 12^2 = 1008\text{cm}^2$$

b) Først erstattes $V_{æske}$ med 4000 og h isoleres.

$$4000 = 2hx^2 \Leftrightarrow h = \frac{2000}{x^2}$$

Denne værdi erstatter nu h i overfladearealet, sådan så man kun har x tilbage.

$$O(x) = 2x^2 + 6\frac{2000}{x^2}x = 2x^2 + \frac{12000}{x}$$

c) For at finde de værdier af x og h, sådan så æsken får det mindste ydre overfaldeareal differentieres $O(x)$.

$$O'(x) = 4x - \frac{12000}{x^2}$$

Og ligningen $O'(x) = 0$ løses.

$$4x - \frac{12000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{12000}{x^2} \Leftrightarrow 4x^3 = 12000 \Leftrightarrow$$
$$x^3 = \frac{12000}{4} = 3000 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{3000} \approx 14.422$$

Ved at bestemme den anden afledede kan man undersøge, om ovenstående værdi giver $O''(x) > 0$.

$$O''(x) = 4 + \frac{24000}{x^3}$$

Så er $O''\left(\sqrt[3]{3000}\right) = 4 + \frac{24000}{\sqrt[3]{3000}^3} = 4 + \frac{24000}{3000} = 12,\ 12 > 0,\ lok\ min$

Dermed er $x = 14.422$cm den minimale værdi. Så findes den minimale værdi af h ved at udnytte volumenformlen for æsken.

$$h = \frac{2000}{14.422^2} = 9.616$$

Og $h = 9.616$cm, som giver den minimale overfladeareal.