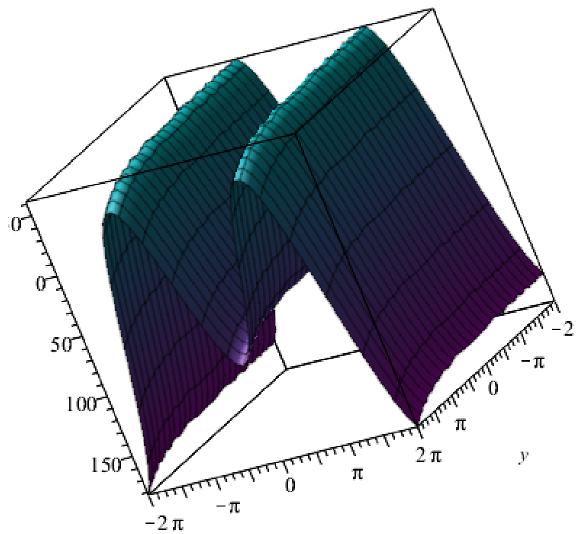
Matematik B, STX, gl
25. maj 2018
Delprøve 1+2, Maple format



MATEMATIK UNIVERSET

Universet med vejledende besvarelser til indlæring

Opgave 1

Er man kvik til (3,4,5) og (6,8,10) trekantstilfældene, så har man svaret. $|AB| = 10$ og $|DE| = 5$.
Dette vises naturligvis ved beregning.

$|AB| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$

Forholdet bestemmes.

$k = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{8}{4} = 2$, så

$|DE| = \frac{|AB|}{k} = \frac{10}{2} = 5.$

Opgave 2

Udtrykket reduceres.

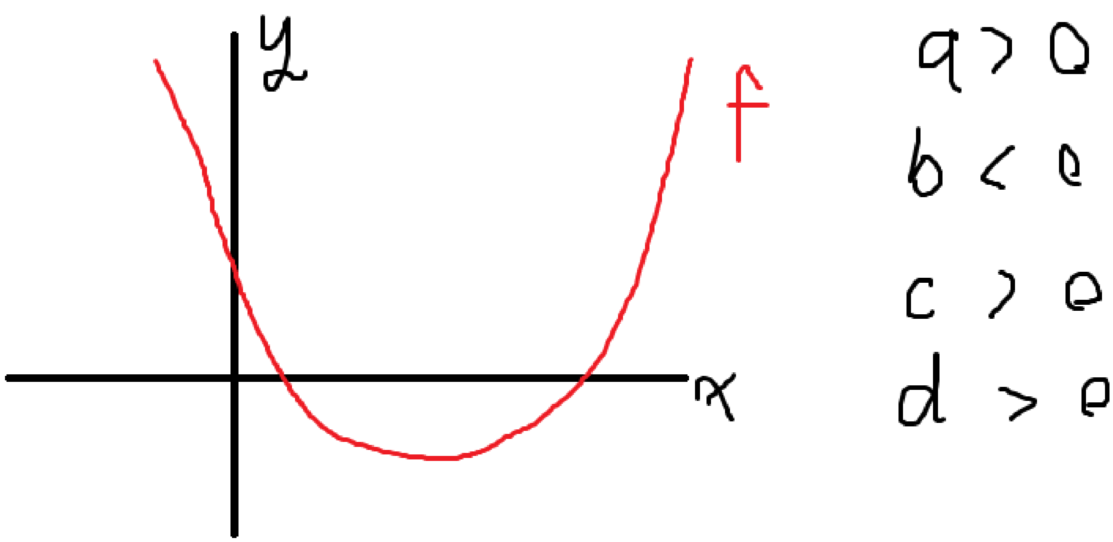
$(a-2)^2 + a\cdot(6-a) - 4$

$= a^2 + 2^2 - 2\cdot a\cdot 2 + 6\cdot a - a^2 - 4$

$= 2\,a$

Opgave 3

En mulig graf er



Her er $c > 0$, da den skærer andenaksen i første og anden kvadrant. Eller blot den positive side af andenaksen.

Opgave 4

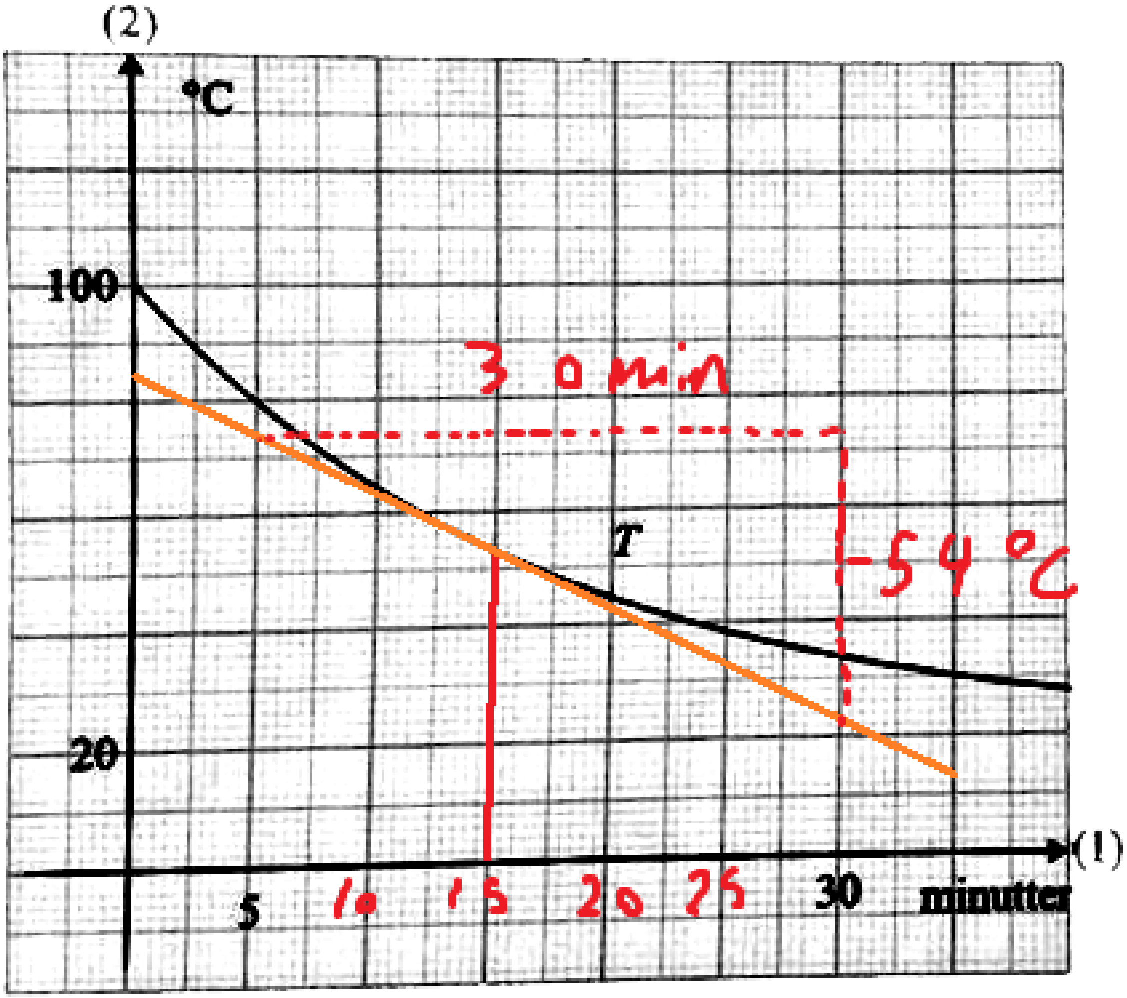
Ud fra opgaveteksten er det muligt at se, at der er tale om en lineær sammenhæng.

$f(x) = 0.1\cdot x + 1$

Hvor $f(x)$ er trykket ved havoverfalden, målt i atmosfære, og x er dybden, målt i antal meter.

Opgave 5

Benyt en lineal og gå ud fra $t = 15$, og lav en tangent til grafen. Aflæs grafen (du har det nok i pænere format...)



Så cirka.

$\dfrac{\Delta N}{\Delta t} = \dfrac{-54^{o}C}{30\ \text{min}} \approx 2^{o}C/\text{min}$

Det betyder, at efter 15 minutter, falder temperaturen cirka med 2 grader celsius.

Opgave 6

Integralet bestemmes.

$$\int_0^3 (3x^2 - x + 1)\,\mathrm{d}x = \left[x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^3 = 3^3 - \frac{1}{2}3^2 + 3 - \left(0^3 - \frac{1}{2}0^2 + 0\right) = \frac{51}{2}$$

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :

Tabellens data indlæses.

L1 := [0, 2, 4, 6, 8, 10] :

L2 := [80.5, 80.7, 81.2, 81.9, 82.7, 82.8] :

Spgm. a

Der anvendes lineær regression.

$f(x) := LinReg(L1, L2, x) :$

$evalf[5](f(x))$

$$0.26000\, x + 80.333 \quad \textbf{(7.1.1)}$$

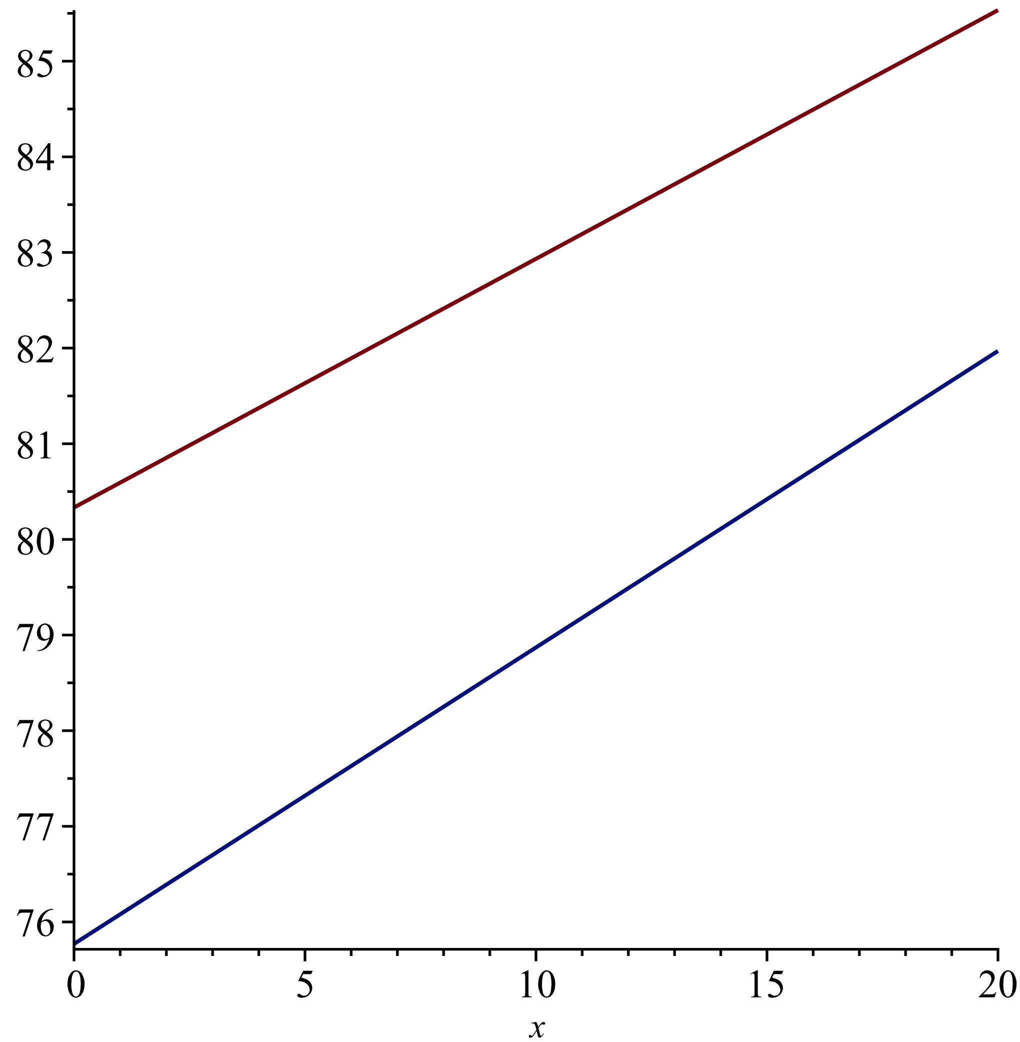
Tallene er $a = 0.26$ og $b = 80.333$.

Spgm. b

Modellen defineres.

$g(x) := 0.31 \cdot x + 75.77 :$

$plot([f(x), g(x)], x = 0 ..20)$



For kvinden har man $x = 12$

$f(12)$

$$83.4533333333333 \quad \textbf{(7.2.1)}$$

For manden har man $x = 12$

$g(12)$

$$79.49 \quad \textbf{(7.2.2)}$$

Differensen:

$f(12) - g(12)$

$$3.96333333333334 \qquad (7.2.3)$$

Så aldersforskellen er 3.96år hvis man er født i år 2017.

Spgm. c

Hældningskoefficienten for kvinderne er $a = 0.26$ og mændende er $a = 0.31$.
For hvert år der går, stiger levealderen for kvinder med 0.26år.
For hvert år der går, stiger levealderen for mænd med 0.31år

Summa summarum vil mændenes levealder indhente kvindernes levealder, hvilket kan findes ved at løse ligningerne

$f(x) = g(x)$

$$0.2599999999999996\, x + 80.3333333333334 = 0.31\, x + 75.77 \qquad (7.3.1)$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x = 91.26666667]] \qquad (7.3.2)$$

Så i år 2005+91=2096 vil det ske. Dette var dog ikke en del af opgaven.

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

$f(x) := 4.37 \cdot x^{1.27}$

$$f := x \mapsto 4.37\, x^{1.27} \qquad (8.1.1)$$

Man indsætter $x = 60$, så

$f(60)$

$$792.0152157 \qquad (8.1.2)$$

Så lysmængden er 792 lumen når glødepæren har en effekt på 60watt.

Spgm. b

Her er $r_x = 0.5 = 50\ \%$, og r_y er ubekendt. $a = 1.27$, så

$r_y = \left((1 + 0.5)^{1.27} - 1 \right) \cdot 100$

$$r_y = 67.35392370 \qquad (8.2.1)$$

Så når effekten øges med 50%, så øges lysmængden med 67.35%

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Nulhypotesen er: Valg af undervisningsmaterialet er uafhængigt af kønnet.
Oplysningerne defineres i en matrix.

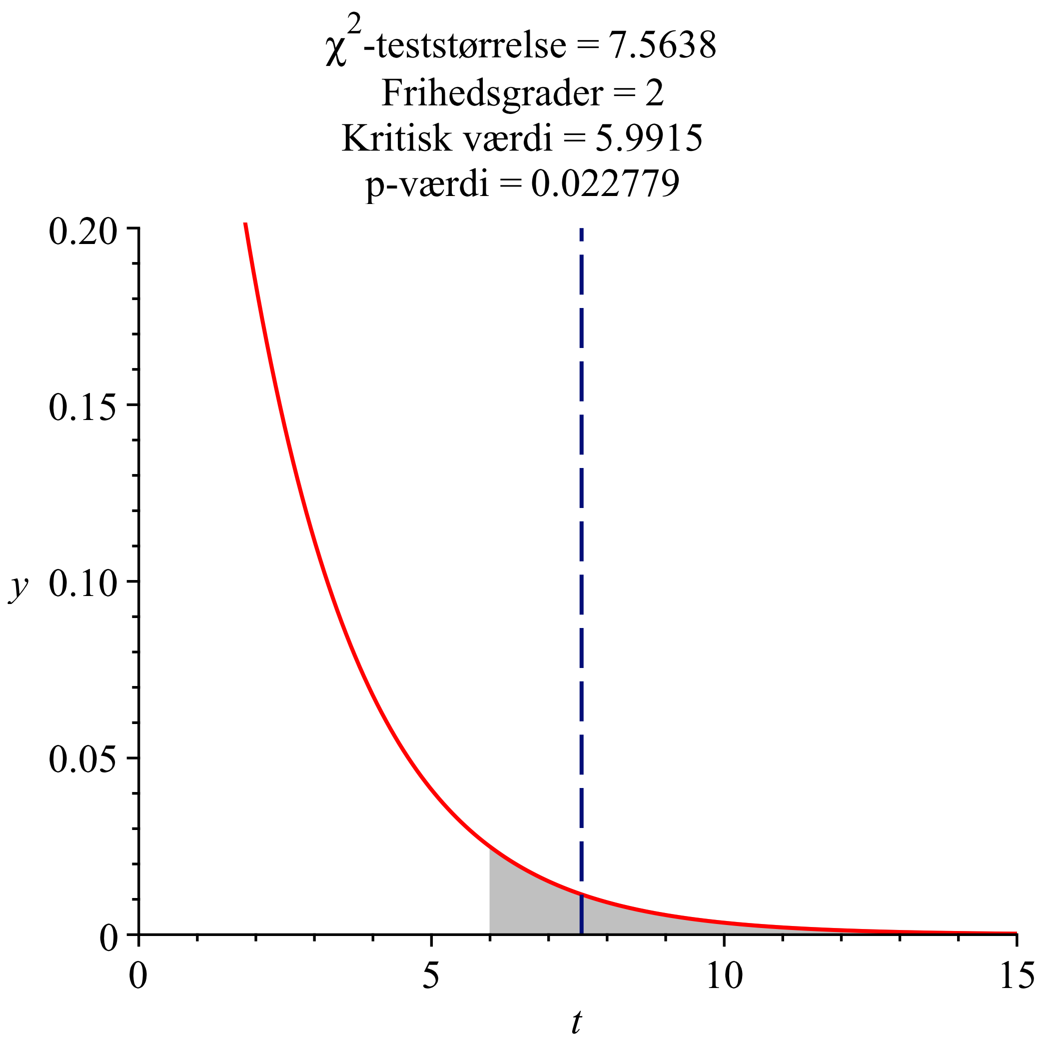
$obs := \begin{bmatrix} 20 & 30 \\ 30 & 15 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} :$

$evalf[2](forventet(obs))$

$$\begin{bmatrix} 25. & 25. \\ 23. & 22. \\ 14. & 14. \end{bmatrix} \quad (9.1.1)$$

Spgm. b

Man anvender uafhænighedstesten.
ChiKvadratUtest(*obs*, *level* = 0.05)



Da p-værdien er mindre end 5%, så forkastes nulhypotesen.

Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

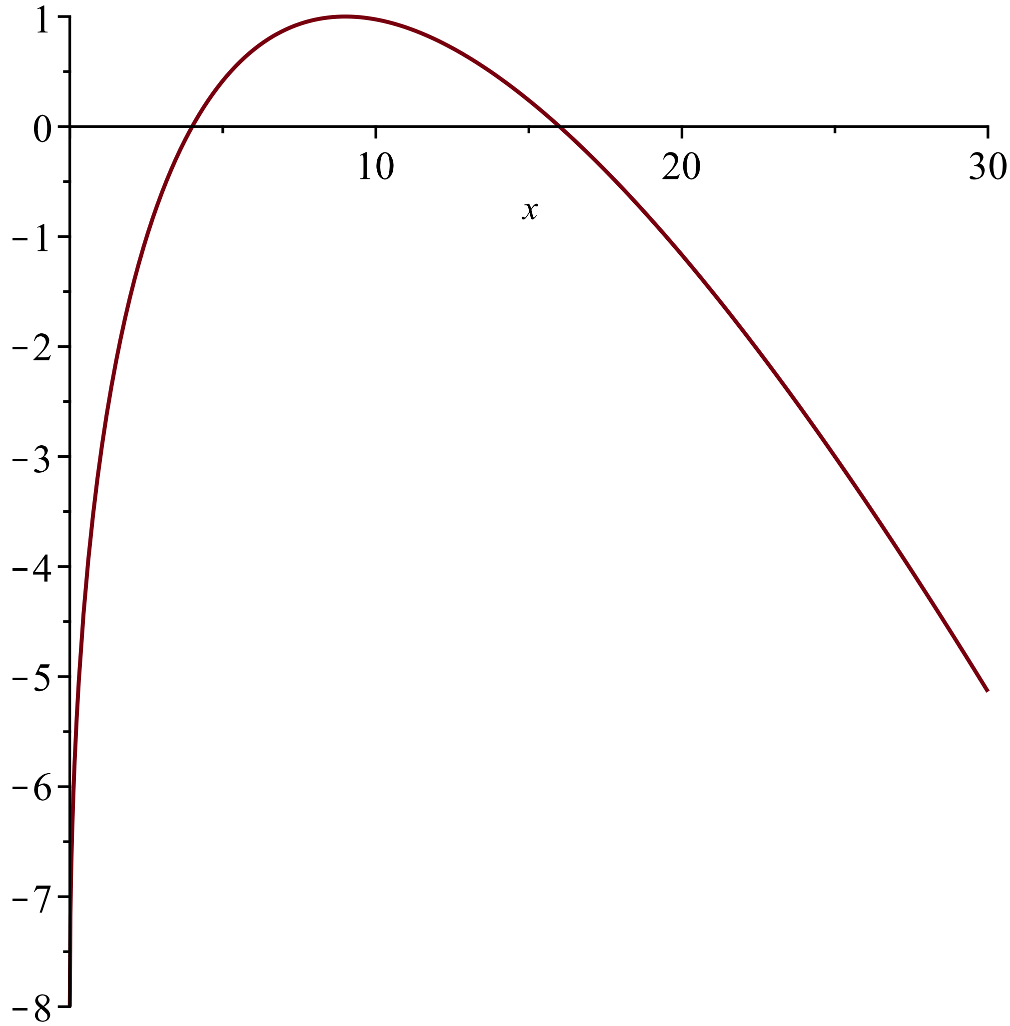
Funktionen defineres.

$f(x) := 6 \cdot \sqrt{x} - x - 8$

$$f := x \mapsto 6\sqrt{x} - x - 8 \quad (10.1.1)$$

$x > 0.$

Grafen tegnes.
$plot(f(x), x = 0..30)$



Og ligningen $f(x) = 0$ løses
$solve(f(x) = 0)$

$$4, 16 \tag{10.1.2}$$

Så nulpunkterne er
$A(4; 0)$ og $B(16; 0)$.

Spgm. b

Funktionens monotoniforhold bestemmes.
$f'(x) = 0$

$$\frac{3}{\sqrt{x}} - 1 = 0 \tag{10.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 9]] \tag{10.2.2}$$

Den anden afledede udnyttes.
$f''(9)$

$$-\frac{\sqrt{9}}{54} \quad (10.2.3)$$

Da tallet er mindre end 0, så der lokalt maksimum (se graf.....), så der kan sluttes, at $f(x)$ er voksende i intervallet $]0; 9]$ og aftagende i intervallet $[9; \infty[$.

Spgm. c

Man bruger løsningerne fra spgm. a. og bestemmer arealet vha. integralregning.

$$M = \int_4^{16} f(x)\, dx$$

$$M = 8 \quad (10.3.1)$$

Så arealet af M er ifølge Maple lig med 8.

Opgave 11

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vinklen v bestemmes vha. cosinusrelationerne.

$$v := invCos\left(\frac{25^2 + 25^2 - 24^2}{2 \cdot 25 \cdot 25}\right)$$

$$v := 57.37080404 \quad (11.1.1)$$

Spgm. b

Højden h_c bestemmes i trekanten ABC. Til det udnyttes Pythagoras' læresætning

$$h_c = \sqrt{25^2 - \left(\frac{24}{2}\right)^2}$$

$$h_c = \sqrt{481} \quad (11.2.1)$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$h_c = 21.932 \quad (11.2.2)$$

Så højden er 21.9cm

Man finder x ved at trække højden fra radius, så
$x = 25 - 21.932$

$$x = 3.068 \quad (11.2.3)$$

Så højden x er 3.068cm.
Er man god til formler fra folkeskolen, og husker formlen for pilhøjden, så er

$x = r \cdot \left(1 - Cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)$, her er $r = 25$ og $v = 57.37080404^o$, så

Dvcs.

$$x = 25 \cdot \left(1 - Cos\left(\frac{57.37080404}{2}\right)\right)$$

$$x = 3.068287802 \quad (11.2.4)$$

Så højden x er 3.068cm

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Kig godt på figuren.
Kassen er et rektangel med kvadratisk bund.
Kassen er ÅBEN!!!

Man har volumen:
$V = x \cdot x \cdot h$

$$V = x^2\, h \tag{12.1.1}$$

Her er $V = 1000$, og det giver så
$1000 = x \cdot x \cdot (h - 2)$

$$1000 = x^2\, (h - 2) \tag{12.1.2}$$

$\xrightarrow{\text{isolate for h}}$

$$h = \frac{1000}{x^2} + 2 \tag{12.1.3}$$

Overfladearealet af kassen er
$\mathrm{O} = x \cdot x + x \cdot h + x \cdot h + x \cdot h + x \cdot h$

$$\mathrm{O} = 4\, x\, h + x^2 \tag{12.1.4}$$

Erstat h med udtrykket (**6.1.3**).
$expand\left(\mathrm{O}(x) = 4\, x \cdot \left(\frac{1000}{x^2} + 2\right) + x^2\right)$

$$\mathrm{O}(x) = x^2 + 8\, x + \frac{4000}{x} \tag{12.1.5}$$

Spgm. b

Man definerer $\mathrm{O}(x)$.
local O
Warning, A new binding for the name \`O\` has been created. The global instance of this name is still accessible using the :- prefix, :-\`O\`. See ?protect for details.

$\mathrm{O}(x) := x^2 + 8\, x + \frac{4000}{x}$

$$\mathrm{O} := x \mapsto x^2 + 8\, x + \frac{4000}{x} \tag{12.2.1}$$

Og differentierer $\mathrm{O}(x)$.
$fintervalsolve(\mathrm{O}'(x) = 0, x = 0 ..30)$

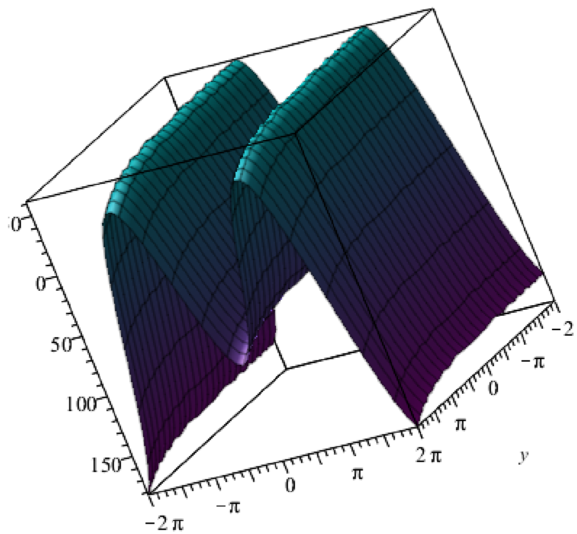
$$[11.39712248] \tag{12.2.2}$$

Den anden afledede benyttes.
$\mathrm{O}''(11.39712248)$

$$7.403863130 \tag{12.2.3}$$

Da tallet er positivt, er $x = 11.39712248$ minimum. Dermed skal sidelængden være 11.4cm

Matematik B, STX, gl
30. maj 2018
Delprøve 1+2, Maple format



MATEMATIK UNIVERSET

Universet med vejledende besvarelser til indlæring

Opgave 1

Ligningen løses.

$5x - 4 = 3x + 2 \Leftrightarrow$

$5x - 3x - 4 = 3x + 2 - 3x \Leftrightarrow$

$2x - 4 + 4 = 2 + 4 \Leftrightarrow$

$\frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \Leftrightarrow$

$x = 3$

Opgave 2

Fra teksten ses det, at der er tale om en eksponentiel model, da man får angivet begyndelsesværdien og det vigtigste, vækstraten.

Her er $b = 29132$ og $r = 10\ \% = 0.1$, så kan fremskrivningsfaktoren findes.

$a = 1 + r = 1 + 0.1 = 1.1$

Dermed er

$f(x) = 29132 \cdot 1.1^x$

Den ønskede model, hvor $f(x)$ angiver antallet af solgte huse til tidspunktet x, målt i år efter år 2012.

Opgave 3

Man kan bestemme toppunktet på to måder, dels ved differentialregning og dels ved formlerne for toppunktet. Sidstnævnte overlades til læseren.

$f'(x) = 2x - 4$, så løses ligningen $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 + 4 = 0 + 4 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{4}{2} \Leftrightarrow x = 2$.

Andenkoordinaten finder man ved at indsætte $x = 2$ i $f(x)$, så

$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$

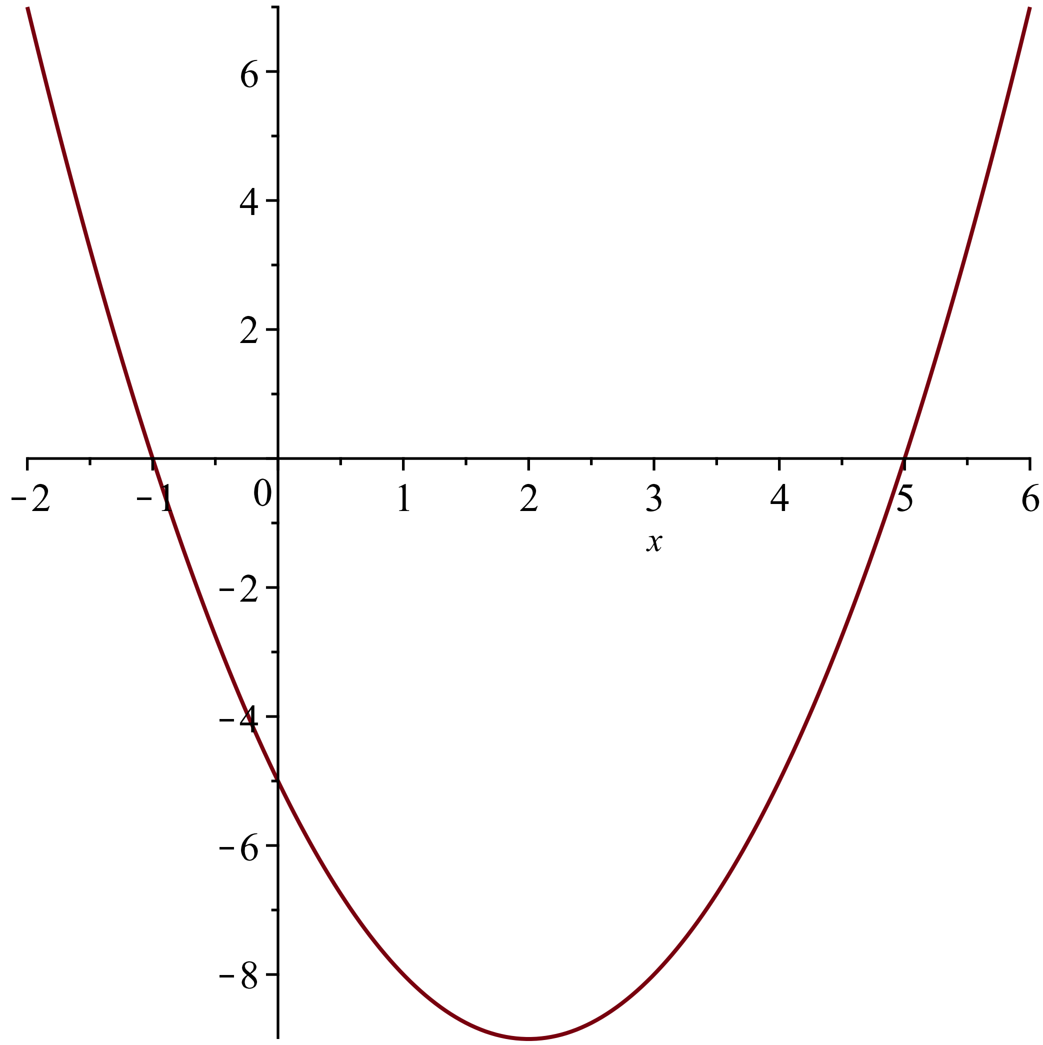
Dermed er koordinatsættet $T(2; -9)$.

Man kan tegne grafen vha. at lave et sildeben, men vi snyder lidt her.

$f(x) := x^2 - 4 \cdot x - 5$

$$f := x \mapsto x^2 - 4x - 5 \qquad \mathbf{(15.1)}$$

$plot(f(x), x = -2..6)$



Opgave 4

De tre grafer er alle sammen potensfunktioner. Der gælder følgende:

$0 < a < 1$,funktionen er langsomt voksende
$a = 0$,funktionen er konstant
$a > 1$,funktionen er hurtigt voksende
$a = 1$,funktionen er lineær voksende/ aftagende
$a < 0$,funktionen er aftagende

Da $a = 1.5 = \frac{3}{2}$, så er $a > 1$ og dermed er a hurtigt voksende, det betyder, at grafen for A og C er ugyldige, idet A har en a-værdi der er mindre end 0, og dermed aftager, og C har en a-værdi, der er mellem 0 og 1, så grafen for C vokser langsomt. Altså er grafen for B, der passer for $f(x) = 2 \cdot x^{1.5}$.

Opgave 5

Fra figuren kan man se, at trekanten er ligebenet, dermed er afstanden fra C til midtpunktet 5, tilsvarende for B til midtpunktet. Dermed kan man benytte Pythagoras til at bestemme højden.
$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$

Dermed er højden h fra A til jorden 12 meter.

Opgave 6

Funktionen differentieres først.

$f'(x) = 2e^x$

(Fordi e^x altid differentieret giver sig selv. Hvorfor mon?)

Man indsætter $x = 0$ i $f(x)$ og $f'(x)$ og får

$f(0) = 2e^0 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$

$f'(0) = 2e^0 = 2 \cdot 1 = 2$

Tangentligningen er dermed

$y = 2 \cdot (x - 0) + 3 = 2x + 3$

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

År 2000 svarer til $x = 0$. Tabellens data indlæses.

$L1 := [0, 5, 10, 15]:$

$L2 := [1450, 1200, 900, 450]:$

Der anvendes lineær regression.

$f(x) := LinReg(L1, L2, x):$

$f(x)$

$$-66.\,x + 1495.00000000000 \quad \textbf{(19.1.1)}$$

Tallene er $a = -66$ og $b = 1495$.

Spgm. b

Tallet a fortæller, at for hvert år der går, efter år 2000, falder den årlige brevmængde med 66 mio. ifølge modellen.

Spgm. c

Man løser ligningen

$f(x) = 100$

$$-66.\,x + 1495.00000000000 = 100 \quad \textbf{(19.3.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 21.13636364]] \quad \textbf{(19.3.2)}$$

Dvs. ifølge modellen kommer brevmængden under 100 mio. i løbet af år 2021.

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

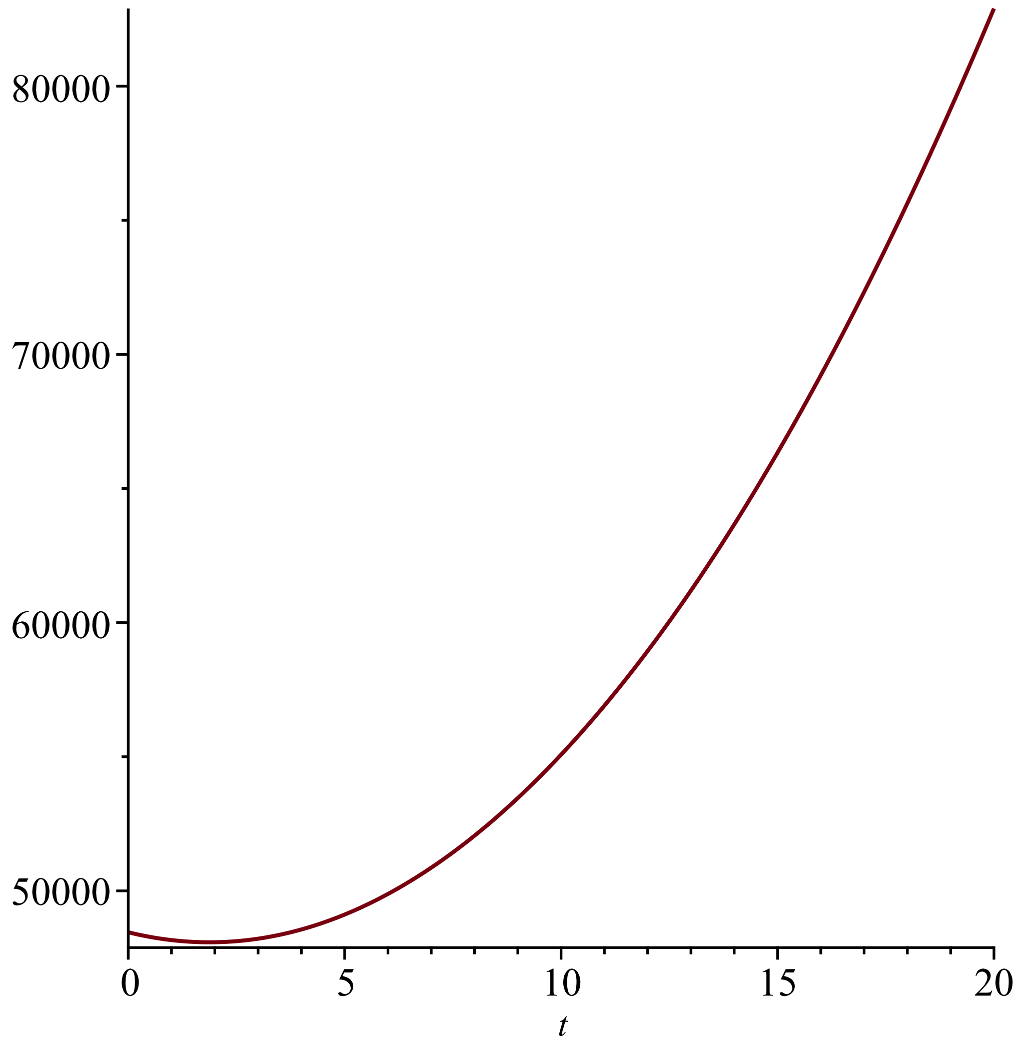
Modellen defineres.

$N(t) := 106 \cdot t^2 - 398 \cdot t + 48456$

$$N := t \mapsto 106\,t^2 - 398\,t + 48456 \quad \textbf{(20.1.1)}$$

Hvor $t \geq 0$. Grafen tegnes.

$plot(N(t), t = 0..20)$



År 2018 svarer til $t = 7$, så ifølge modellen vil befolkningstallet i år 2018 være

$N(7)$

$$50864 \tag{20.1.2}$$

På Færøerne.

Spgm. b

Når noget hedder "mindst", så skal man finde den afledede.
$N'(t) = 0$

$$212\,t - 398 = 0 \tag{20.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$\left[\left[t = \frac{199}{106}\right]\right] \tag{20.2.2}$$

$evalf[5](\%)$

$$[[t = 1.8774]] \tag{20.2.3}$$

$is(N''(1.8774) > 0)$

$$true \tag{20.2.4}$$

Dvs. når $N''(1.8774) > 0$, så er der globalt minimum, som også kan ses på grafen.

Det betyder, at ifølge modellen er befolkningstallet mindst i ca. år 2013 ifølge modellen.

Spgm. c

Her er $t = 4$, så
$N'(4)$

$$450 \quad (20.3.1)$$

Dvs. for hvert år der går, efter år 2015, vokser befolkningstallet med 450 personer pr. år.

Opgave 9

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Alle vinkler og længder defineres.
$DAB := 34.5 :; ABD := 141 :; DBC := 10 :; AB := 3 :; CD := 7 :$
Vinkel BDA bestemmes
$BDA := 180 - DAB - ABD$

$$BDA := 4.5 \quad (21.1.1)$$

Vha. sinusrelationerne kan man finde længden BD.

$$\frac{Sin(DAB)}{BD} = \frac{Sin(BDA)}{AB}$$

$$\frac{0.5664062371}{BD} = 0.02615303191 \quad (21.1.2)$$

$$\xrightarrow{\text{solve for BD}}$$

$$[[BD = 21.65738332]] \quad (21.1.3)$$

Så afstanden er 21.66km
$BD := 21.65738332 :$

Spgm. b

Vinkel BCD bestemmes også vha. sinusrelationerne.

$$\frac{Sin(BCD_{spids})}{BD} = \frac{Sin(DBC)}{CD}$$

$$0.04617362981 \sin(0.01745329252\, BCD_{spids}) = 0.02480688253 \quad (21.2.1)$$

$$\xrightarrow{\text{solve for BCD[spids]}}$$

$$[[BCD_{spids} = 32.49677692]] \quad (21.2.2)$$

$BCD = 180 - 32.49677692$

$$BCD = 147.5032231 \quad (21.2.3)$$

Som er den ønskede vinkel.

Opgave 10

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Funktionen defineres.
$f(x) := x^3 + 1 :$

Integralet udregnes.

$$\int_1^3 f(x)\,dx$$

$$22 \qquad (22.1.1)$$

Hvilket også kunne udregnes i hånden. God øvelse til den mundtlige eksamen.

Spgm. b

Stamfunktionen benævnes med $F(x)$.

$F(x) = \int f(x)\,dx + k$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x + k \qquad (22.2.1)$$

Fordi Maple tilføjer ikke nogen konstant selv. Man bruger punktet P til at finde den partikulære stamfunktion til $f(x)$.

$4 = \frac{1}{4}\cdot 2^4 + 2 + k \xrightarrow{\text{solve for k}} [[k = -2]]$

Så er

$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x - 2$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + x - 2 \qquad (22.2.2)$$

Opgave 11

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

I Maple opstilles en matrix, kaldet "obs".

$$obs := \begin{bmatrix} 0..2 & 514 \\ 2..3 & 3311 \\ 3..3.5 & 8411 \\ 3.5..4 & 10098 \\ 4..4.5 & 4525 \\ 4.5..6 & 1003 \end{bmatrix}:$$

Man kan vha. Maple skrive

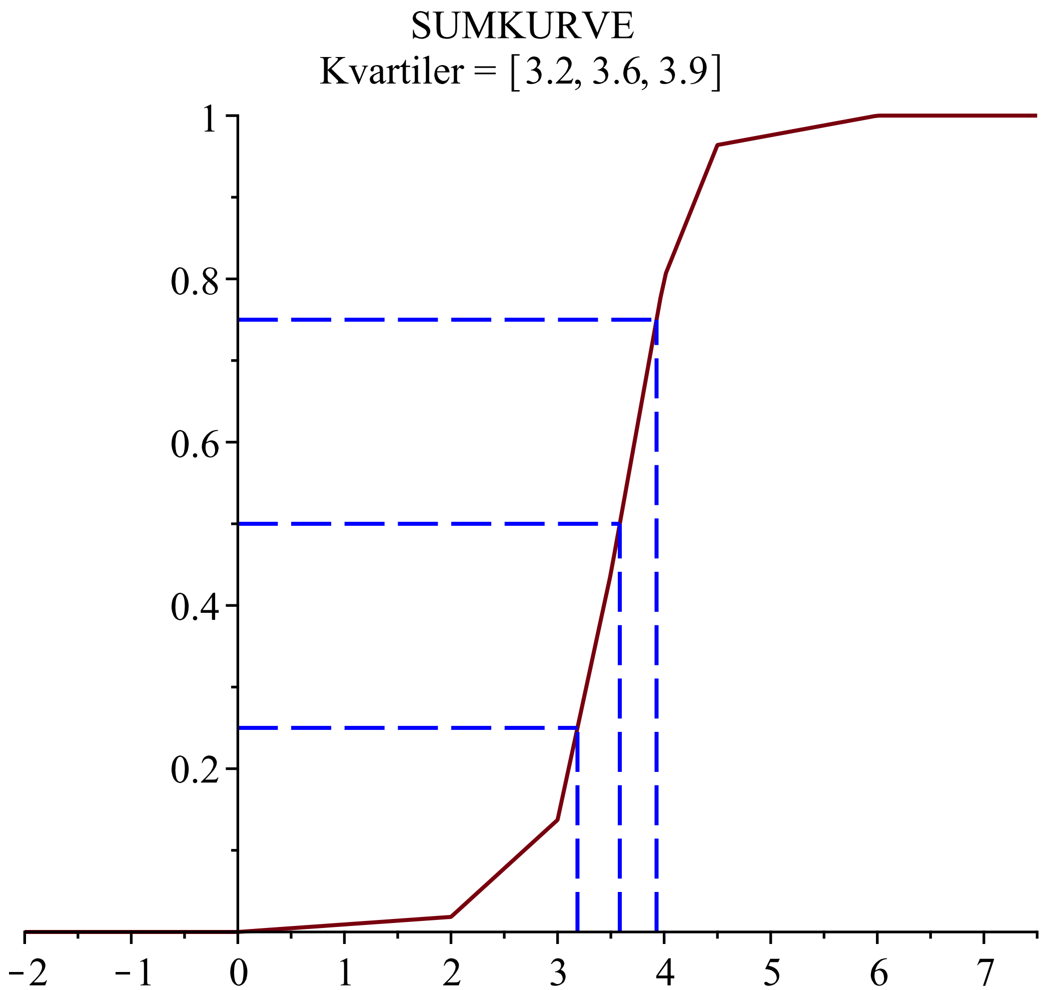
frekvensTabel(*obs*)

observation	hyppighed	frekvens(%)	kumuleret(%)
0 .. 2	514	1.845	1.84
2 .. 3	3311	11.88	13.7
3 .. 3.5	8411	30.19	43.9
3.5 .. 4	10098	36.24	80.2
4 .. 4.5	4525	16.24	96.4
4.5 .. 6	1003	3.6	100

Og få de kumulerede frekvenser. Alternativt kan man også bare regne det i hånden.

Sumkurven kan findes vha. kommandoen

$plotSumkurve(obs)$



Spgm. b

Medianen findes ved at se på sumkurven eller skrive
$median(obs)$

$$3.5839 \tag{23.2.1}$$

Dvs. 50% af levende enkeltfødte drenge i Danmark har en vægt på 3.584kg.

Middeltallet findes ved
$middel(obs)$

$$3.53498492570526 \tag{23.2.2}$$

Dvs. gennemsnittet af alle enkeltfødte drenge i Danmark har en vægt på 3.535kg.

Opgave 12

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Funktionen defineres.
$f(x) := x \cdot \exp(-x)$

$$f := x \mapsto x\,e^{-x} \qquad \textbf{(24.1.1)}$$

Monotoniforholdene bestemmes. Man løser ligningen
$f'(x) = 0$

$$e^{-x} - x\,e^{-x} = 0 \qquad \textbf{(24.1.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

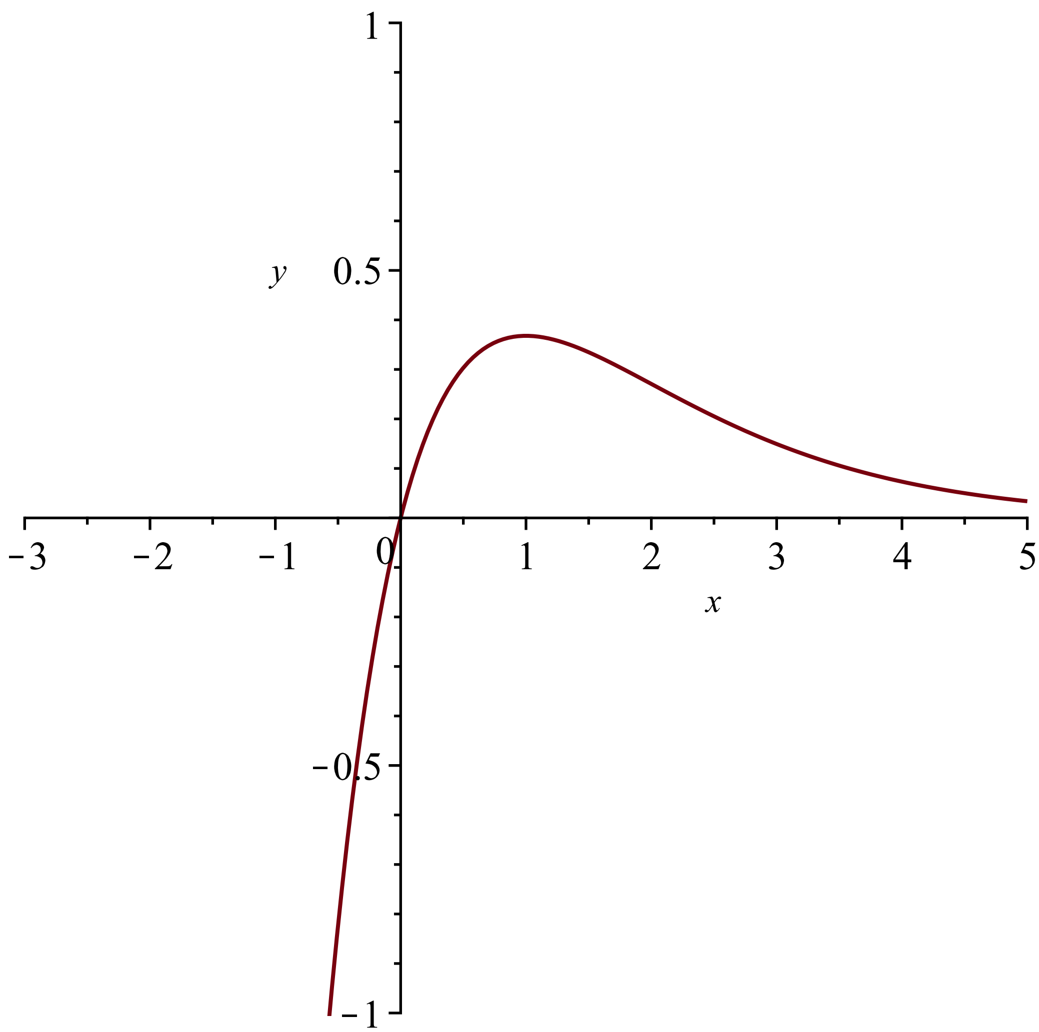
$$[[x = 1]] \qquad \textbf{(24.1.3)}$$

Og benytter den anden afledede.
$f''(1)$

$$-e^{-1} \qquad \textbf{(24.1.4)}$$

Da tallet er mindre end 0, dvs. $f''(1) < 0$, så er der lokalt maksimum. I dette tilfælde globalt maksimum. Altså er funktionen $f(x)$
-$f(x)$ er voksende i intervallet $]-\infty; 1]$
-$f(x)$ er aftagende i intervallet $[1;\infty[$.

Så kan man se, hvordan grafen forløber sig ved en tegning (ikke en del af opgaven).
$plot(f(x), x=-3..5, y=-1..1)$



Spgm. b

Funktionen defineres.

$g(x) := x \cdot \exp(-a \cdot x)$

$$g := x \mapsto x\,\mathrm{e}^{-a\,x} \tag{24.2.1}$$

Funktionen differentieres.

$g'(x)$

$$\mathrm{e}^{-a\,x} - x\,a\,\mathrm{e}^{-a\,x} \tag{24.2.2}$$

Hvis der skal være maksimum i $x = 2$, så skal man sætte $x = 2$ i $g'(x)$ og løse ligningen $g'(2) = 0$.

$g'(2) = 0$

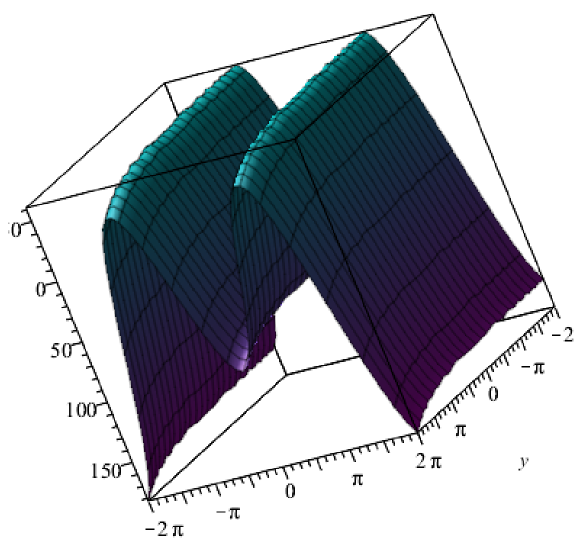
$$\mathrm{e}^{-2\,a} - 2\,a\,\mathrm{e}^{-2\,a} = 0 \tag{24.2.3}$$

$\xrightarrow{\text{solve for a}}$

$$\left[\left[a = \frac{1}{2}\right]\right] \tag{24.2.4}$$

Dvs. a-værdien skal være $\frac{1}{2}$, hvis man skal have maksimum i $x = 2$.

Matematik B, STX, gl
15. august 2018
Delprøve 2, Maple format



MATEMATIK UNIVERSET

Universet med vejledende besvarelser til indlæring

► **Opgave 7**

► **Opgave 8**

► **Opgave 9**

► **Opgave 10**

► **Opgave 11**

► **Opgave 12**

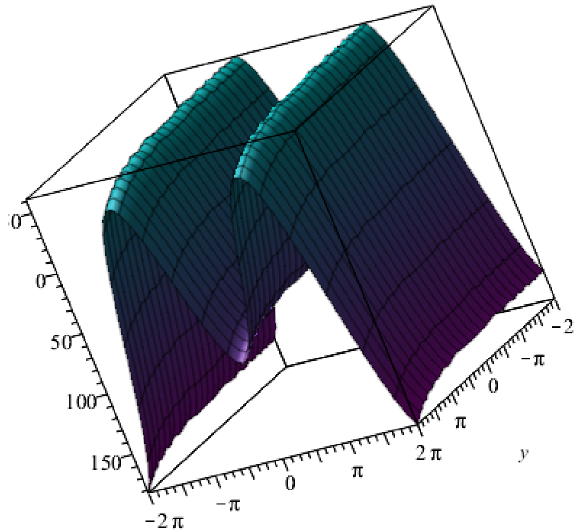
► **Opgave 13**

► **Opgave 14**

► **Opgave 15**

► **Opgave 16**

Matematik B, STX, gl
07. december 2018
Delprøve 2, Maple format



MATEMATIK UNIVERSET

Universet med vejledende besvarelser til indlæring

▶ **Opgave 7**

▶ **Opgave 8**

▶ **Opgave 9**

▶ **Opgave 10**

▶ **Opgave 11**

▶ **Opgave 12**

▶ **Opgave 13**

▶ **Opgave 14**

▶ **Opgave 15**

▶ **Opgave 16**