Delprøve 1, 4. juni 2012 vejledende besvarelse matematik B-niveau

Opgave 1 - Reduktion:

a) Reducér udtrykket $2 \cdot (a-8) + a + 20$.

Reducér udtrykket $\dfrac{14 \cdot x^5}{7 \cdot x^2}$.

Besvarelse:

Der reduceres for udtrykket:

$$2(a-8)+a+20 =$$
$$2a-16+a+20 =$$
$$3a+4$$

Og der reduceres for udtrykket:

$$\frac{14x^5}{7x^2} = 2x^3$$

Bemærk, at potensregnereglerne anvendes her.

Opgave 2 - Eksponentielle funktioner:

På en ø vokser antallet af fugle med 27 % om året.
I 2005 var der 1200 fugle på øen.

a) Indfør passende betegnelser, og opstil en formel til at beregne antallet af fugle i årene efter 2005.

Besvarelse:

Der oplyses, at 2005 er begyndelses året. Vi opstiller en eksponentiel model over antallet af fugle.

$$f(x) = 1200 \cdot 1.27^x$$

Fordi 27% omregnes vha. følgende formel: $a = 1 + r$, så $a = 1 + \left(\frac{27}{100}\right) = 1.27$.

Opgave 3 - Differentialregning:

Der er givet funktionen $f(x) = x^3 - 4x^2$.

a) Bestem $f'(x)$.

Besvarelse:

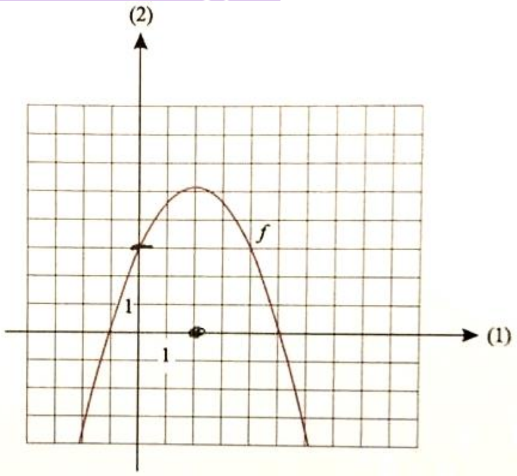
Funktionen differentieres, så $f'(x) = 3x^2 - 8x$. Integreres dette fås stamfunktionen og en konstant.

Opgave 4 - Differentialregning:

Figuren viser grafen for et andengradspolynomium $f(x)$.
Nedenfor følger tre påstande om $f(x)$:

1. $f(0) = 3$.
2. Ligningen $f'(x) = 0$ har løsningen $x = 2$.
3. Diskriminanten er negativ.

a) Hvilke af de tre påstande er korrekte? Begrund svaret.



Forklaring:

1) Der ses, at $f(0) = 3$, dvs. at førsteaksen er 0, så går man op og aflæser andenaksen ved 3. Derfor passer udsagnet.

2) Ved at aflæse grafen for $f'(x) = 0$, ses det, at den vandrette tangent ligger i toppunktet, og aflæses det på x −aksens ses det, at $x = 2$. Derfor passer udsagnet.

3) Diskriminanten er negativ, så snart parablen ikke rammer førsteaksen. Dette giver komplekse tal. I dette tilfælde rammer parablen førsteaksen, således at der er to reelle rødder. Udsagnet passer ikke.

Opgave 5 - Lineære funktioner:

Det oplyses, at der er en lineær sammenhæng mellem de to variable x og y.

a) Udfyld et skema som nedenstående. Begrund svaret.

x	5	6	10
y	17	19	27

Besvarelse:

Der er angivet et skema over nogle punkter. Da der er oplyst to punkter, er det muligt at finde tallene a og b, hvorefter man kan opstille en lineærmodel.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{19 - 17}{6 - 5} = \frac{2}{1} = 2$$

$$b = y_1 - ax_1 = 17 - 2 \cdot 5 = 7$$

Modellen er således:

$$f(x) = 2x + 7$$

Vi kan nu udregne det sidste i tabellen, nemlig y. Dette kan gøres ved indsættelse af x.

$$f(10) = 2 \cdot 10 + 7 = 27$$

Dette er det sidste og ønskede y. Støttepunktet er $(10, 27)$

Opgave 6 - Ubestemte integraler:

a) Bestem $\int 8x^3 dx$.

Besvarelse:

Der er angivet et ubestemt integral, og dette betyder, at der skal findes stamfunktionen for funktionen.

$$\int 8x^3 \, dx \Leftrightarrow F(x) = 8 \cdot \frac{1}{3+1} x^{3+1} + k \Leftrightarrow F(x) = 2x^4 + k$$

Dette er stamfunktionen. Da k er en vilkårlig konstant, findes der uendelig mange løsninger for den.

Delprøve 2, 4. juni 2012 vejledende besvarelse matematik B-niveau

Opgave 7 - Lineære funktioner:

Man har opstillet en model for produktionen af naturgas i EU. I denne model regner man med, at

$$y = -4{,}64 \cdot x + 217\,,$$

hvor y er produktionen, målt i milliarder m^3, og x er antal år efter 2008.

a) Hvad fortæller tallene $-4{,}64$ og 217 om produktionen af naturgas i EU?

Kilde: Berlingske Tidende 7. juli 2011 og International Energy Agency.

Forklaring:

Delopgave a)

Her er opgivet en model.

$$y = -4.64x + 217$$

Denne model er en lineær funktion, hvor x er antal år efter 2008 og y er produktionen, målt i mia. m^3.

Tallene a og b har hver deres betydning, og da tallet b er begyndelsesværdien, så var produktionen af naturgas i 2008 217 mia. m^3 og for hvert år der går efter år 2008 vil mængden af den producerede naturgas aftage med 4.64 mia. m^3.

Opgave 8 - Eksponentielle funktioner:

Tabellen viser udviklingen i antallet af unge, der har problemer med at betale deres SU-gæld.

År	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Antal unge med SU-gældsproblemer	43 000	45 900	48 700	51 600	54 700	57 800

Det oplyses, at antallet $f(x)$ af unge med SU-gældsproblemer med god tilnærmelse kan beskrives ved funktionen

$$f(x) = b \cdot a^x ,$$

hvor x er antal år efter 2005.

a) Bestem tallet a.

b) Bestem fordoblingstiden, og forklar betydningen af dette tal.

Kilde: Styrelsen for Statens Uddannelsesstøtte, 2011.

Besvarelse:

Denne opgave forudsættes at man laver en eksponentiel regression. Dette sker i CAS programmet Maple 2015.

Delopgave a)

Som beskrevet før, skal der udføres regression i Maple. Der er tale om en eksponentiel regression, derfor følgende:


```
with(Gym) :

L1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5] :
L2 := [43000, 45900, 48700, 51600, 54700, 57800] :

ExpReg(L1, L2)
```

Eksponentiel Regression
$y = 43175. \cdot 1.0607^x$
Forklaringsgrad $R^2 = 0.99934$

Her bliver tallet a bestemt til $a = 1.0607$. Tallet b bliver også bestemt til $b = 43175.0$

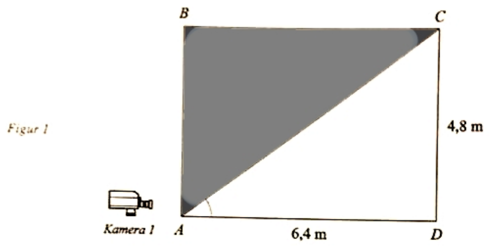
Delopgave b)

Vi bestemmer fordoblingstiden vha. følgende formel:

$$T_2 = \frac{\log(2)}{\log(a)} = \frac{\log(2)}{\log(1.0607)} \approx 11.762$$

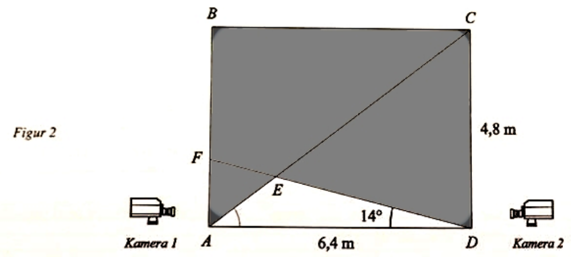
Så når der er gået 11.762 år efter år 2005, eller i år $2016 - 2017$ ca., vil de unges SU-gældsproblemer være steget til det dobbelte og sådan vil det fortsætte.

Opgave 9 - Geometri:



Figur 1 viser et lokale $ABCD$, der har form som et rektangel.
Lokalet er 6,4 meter langt og 4,8 meter bredt.
Et overvågningskamera (kamera 1) ved A dækker det grå område af lokalet.

a) Bestem længden af AC og vinkel A i trekant ACD.



Som vist på figur 2 er et andet overvågningskamera (kamera 2) anbragt ved D.
Kamera 2 dækker området $DFBC$.
Trekant AED er ikke dækket af de to kameraer. I trekant AED er $\angle D = 14°$.

b) Bestem siden AE.

c) Hvor stort et areal bliver ikke dækket af de to kameraer?

Besvarelse:

Delopgave a)

Denne opgave omhandler et overvågningssystem. Der bestemmes for $|AC|$ vha. Pythagoras.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Hvor tallene fra figur 1 indsættes.

$$6.4^2 + 4.8^2 = |AC|^2 \Leftrightarrow$$
$$|AC| = \sqrt{6.4^2 + 4.8^2} \Leftrightarrow$$
$$|AC| = \sqrt{64} \Leftrightarrow$$
$$|AC| = 8$$

8m er længden af $|AC|$. Vinkel A bestemmes nu. Bemærk, at der er tale om en retvinklede trekant, så følgende formel anvendes.

$$\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{|CD|}{|AC|}\right)$$

Hvor tallene indsættes.

$$\angle A = \sin^{-1}\left(\frac{4.8}{8}\right) \Leftrightarrow$$
$$\angle A = 36.869^o$$

Dette er det ønskede.

Fortsættes næste side

Delopgave b)

Da man nu skal finde længdestykket $|AE|$, forudsættes det, at man kender en række punkter. I dette tilfælde fås en ny vinkel, nemlig $\angle D = 14^o$. Vinkel A blev bestemt før, så derfor kan man anvende sinusrelationerne ved at man kender vinkel E, som regnes på følgende metode:

$$180^o - \angle A - \angle D = 180^o - 36.869^o - 14^o = 129.131^o$$

Endelig kan man bestemme $|AE|$ vha. sinusrelationerne.

$$\frac{\sin(E)}{|AD|} = \frac{\sin(D)}{|AE|}$$

Hvor tallene indsættes.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(129.131^o)}{6.4} = \frac{\sin(14^o)}{|AE|} \Leftrightarrow \\
&\sin(129.131^o) \cdot |AE| = \sin(14^o) \cdot 6.4 \Leftrightarrow \\
&\frac{\sin(129.131^o) \cdot |AE|}{\sin(129.131^o)} = \frac{\sin(14^o) \cdot 6.4}{\sin(129.131^o)} \Leftrightarrow \\
&|AE| = \frac{\sin(14^o) \cdot 6.4}{\sin(129.131^o)} \Leftrightarrow \\
&|AE| = 1.99599
\end{aligned}$$

Dette er længden af $|AE|$, som er $1.99599m \approx 2m$

Delopgave c)

Da trekanten AED ikke dækkes af begge kameraerne, vil det sige, at det er det område, arealet skal bestemmes. Man kender vinkel A samt D. Ligeledes kendes længden $|AD|$. Arealformlen for vilkårlige trekanter anvendes.

$$T_{AED} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot |AD| \cdot \sin(\mathrm{D})$$

Da $|DE|$ er ukendt, regnes den vha. sinusrelationerne, da $|AE|$ allerede kendes.

$$\frac{\sin(D)}{|AE|} = \frac{\sin(A)}{|DE|}$$

Tallene indsættes.

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin(14^o)}{1.99599} = \frac{\sin(36.869^o)}{|DE|} \Leftrightarrow \\
&\sin(14^o) \cdot |DE| = 1.99599 \cdot \sin(36.869^o) \Leftrightarrow \\
&\frac{\sin(14^o) \cdot |DE|}{\sin(14^o)} = \frac{1.99599 \cdot \sin(36.869^o)}{\sin(14^o)} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

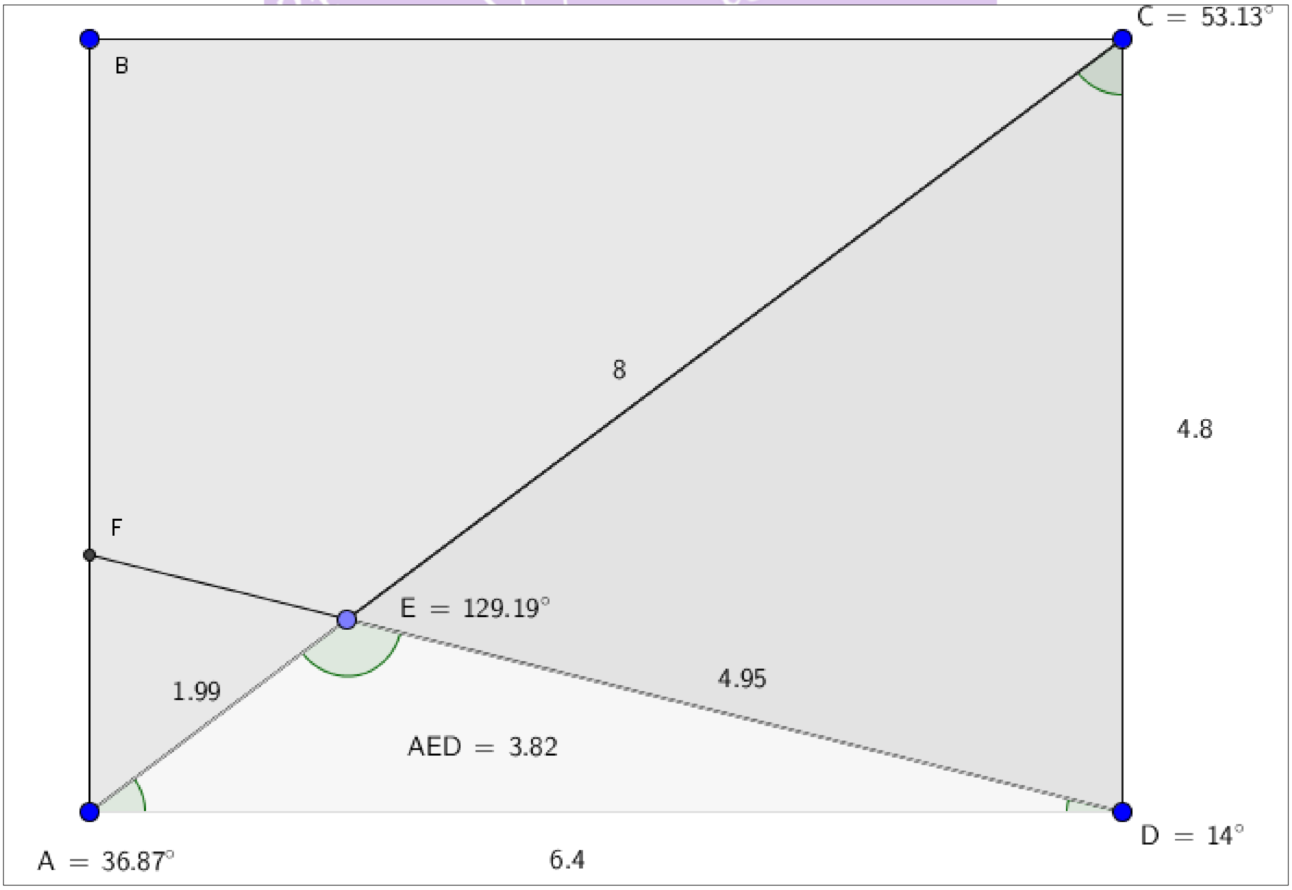
Fortsættes næste side

$$|DE| = \frac{1.99599 \cdot \sin(36.869^o)}{\sin(14^o)} \Leftrightarrow$$
$$|DE| = 4.95022$$

Endelig kan arealet beregnes.

$$T_{AED} = \frac{1}{2} \cdot 4.95022 \cdot 6.4 \cdot \sin(14^o) \Leftrightarrow$$
$$T_{AED} = 3.8322$$

Arealet blev bestemt til $3.8322m^2$. Dette er det ønskede.



Opgave 10 - Potensfunktioner:

Undersøgelser har vist, at det årlige antal bilulykker med personskade på en bestemt vejstrækning kan beregnes af formlen

$$f(x) = 0.0025 \cdot x^2.$$

Her betyder x den tilladte hastighed (målt i km/t), og $f(x)$ betyder det årlige antal bilulykker med personskade på vejstrækningen.

a) Bestem det årlige antal bilulykker med personskade på vejstrækningen, hvis den tilladte hastighed er 80 km/t.

Man overvejer at tillade en højere hastighed på vejstrækningen.

b) Hvor mange procent vil antallet af bilulykker med personskade stige, hvis man sætter den tilladte hastighed op med 12,5 %?

Besvarelse:

Delopgave a)

Funktionen for f er angivet:

$$f(x) = 0.0025 \cdot x^2$$

Da er x hastigheden (km/t) og $f(x)$ er årlig antal bilulykker. Der regnes nu for årlige antal bilskader ved en hastighed på $80 km/t$.

$$f(80) = 0.0025 \cdot 80^2 = 16$$

Så ved en hastighed på $80 km/t$

Delopgave b)

Ved at øge fartgrænsen med 12.5%, kan dette skrives som r_x. Formlen for dette er:

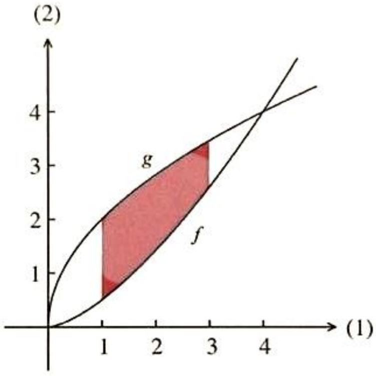
$$r_y = ((1 + r_x)^a - 1) \cdot 100\%$$

Hvor tallet r_x indsættes.

$$r_y = \left(\left(1 + \left(\frac{12.5}{100}\right)\right)^2 - 1\right) \cdot 100 = 26.5625\%$$

Så ved at øge hastigheden 12.5%, øges personskaderne med 26.5625%

Opgave 11 - Integralregning:



Der er givet funktionerne $f(x) = 0{,}5 \cdot x^{1,5}$ og $g(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$.

a) Bestem arealet af det område, der afgrænses mellem graferne for f og g i intervallet $[1;3]$.

Besvarelse:

Delopgave a)

Der er givet to funktioner:

$$f(x) = 0.5x^{1.5}\ og\ g(x) = 2 \cdot \sqrt{x}$$

Dette udregnes således, ved at der er punkter der afgrænser et område i $[1;3]$.

$$T = \int_1^3 \left(g(x) - f(x)\right) dx$$

Her indsættes funktionerne.

$$A = \int_1^3 \left(2 \cdot \sqrt{x} - 0.5x^{1.5}\right) dx \Leftrightarrow \left[-0.06666666667 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot (3 \cdot x - 20)\right]_1^3$$

Da indsættes hhv. 3 og 1 i den integrerede funktion.

$$A = \left[-0.06666666667 \cdot 3^{\frac{3}{2}} \cdot (3 \cdot 3 - 20)\right] - \left[-0.06666666667 \cdot 1^{\frac{3}{2}} \cdot (3 \cdot 1 - 20)\right] = 2.67717$$

Så arealet af $g(x)$ og $f(x)$, der bliver afgrænset mellem 1 og 3 er 2.67717.

Opgave 12 - Differentialregning:

En sodavand tages ud af køleskabet. Sodavandens temperatur $f(t)$, målt i °C, er givet ved

$$f(t) = -15 \cdot e^{-0{,}12 \cdot t} + 20,$$

når der er gået t minutter, efter at sodavanden blev taget ud af køleskabet.

a) Bestem sodavandens temperatur efter 5 minutter.

b) Bestem den hastighed, som sodavandens temperatur vokser med efter 5 minutter.

Besvarelse:

Delopgave a)

Der bliver angivet en funktion for en sodavands temperatur efter et t antal tid.

$$f(t) = -15 \cdot e^{-0.12 \cdot t} + 20$$

Ved indsættelse af 5 i t fås sodavandens temperatur.

$$f(5) = -15 \cdot e^{-0.12 \cdot 5} + 20 = 11.76782546 \quad {}^{o}C$$

Delopgave b)

Da man skal bestemme hastigheden af temperaturen, kræves det, at man differentierer f. Dette gøres vha. Maple 2015.

$$f'(t)$$

$$1.80\, e^{-0.12\, t}$$

Dette er $f'(t) = 1.80 \cdot e^{-0.12 \cdot t}$

Når man indsætter tallet 5 i f' fås følgende:

$$f'(5) = 1.80 \cdot e^{-0.12 \cdot 5} = 0.9878609450$$

Temperaturen stiger med en hastighed på 0.9878609450 grader pr. minut, 5 minutter efter at sodavanden er taget ud af køleskabet.

Opgave 13:

Når der produceres x ton af en bestemt vare, er omkostningerne pr. ton (målt i kr.) givet ved

$$f(x) = x^2 - 30x + 400 + \frac{500}{x}\text{, hvor } 5 < x < 25 .$$

a) Bestem $f(8)$, og tegn grafen for f.

b) Hvor mange ton kan der produceres, hvis omkostningerne pr. ton skal være under 250 kr.?

c) Bestem ved hjælp af $f'(x)$ det antal ton, der giver de mindste omkostninger pr. ton.

Besvarelse:

Delopgave a)

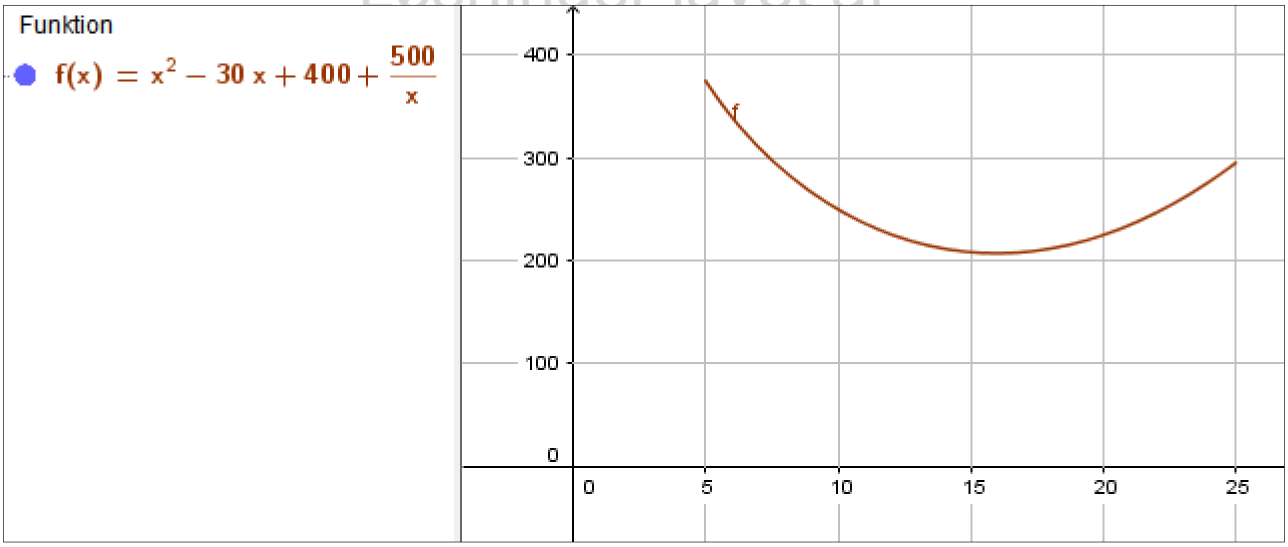
En funktion for et bestemt ton er givet ved:

$$f(x) = x^2 - 30x + 400 + \frac{500}{x}, \qquad 5 < x < 25$$

Der bestemmes for $f(8)$ ved indsættelse af 8 på x's plads.

$$f(8) = 8^2 - 30 \cdot 8 + 400 + \frac{500}{8} = 286.5$$

Så ved indsættelse af 8 fås omkostningerne til at være $286.5kr$. I CAS programmet GeoGebra tegnes funktionen:



Fortsættes næste side

Delopgave b)

Ved at skulle finde ud af hvor meget der skal produceres, sættes $f(x) = 250$. Udregning af dette foretages vha. Maple 2015.

$f(x) = 250$

$$x^2 - 30x + 400 + \frac{500}{x} = 250$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}} \quad [[x = 10], [x = 10 - 5\sqrt{6}], [x = 10 + 5\sqrt{6}]]$$

Så der skal produceres mellem 10 og 22.25 tons for at prisen er under 250kr.

Delopgave c)

Her skal man differentiere $f(x)$ og bestemme det antal ton, der giver de mindste omkostninger. Dette gøres vha. Maple 2015.

$f(x) := x^2 - 30x + 400 + \frac{500}{x}$

$$x \to x^2 - 30x + 400 + \frac{500}{x}$$

$f'(x)$

$$2x - 30 - \frac{500}{x^2}$$

For at bestemme det mindste sted, sættes $f'(x) = 0$, så dette udregnes vha. CAS.

$f'(x) = 0$

$$2x - 30 - \frac{500}{x^2} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{solve}} \quad 15.97911673$$

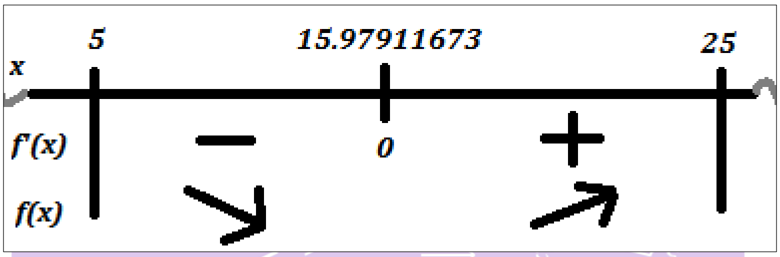
Her findes tal der kan anvendes ift. at se, hvornår $f(x)$ er voksende og aftagende. Der vælges tallene 14 og 18.

$$f'(14) = 2x - 30 - \frac{500}{x^2} = -4.5510$$

$$f'(18) = 2x - 30 - \frac{500}{x^2} = 4.4568$$

Fortsættes næste side

Der tegnes en monotonilinje over det ovenstående.



Funktionen f er aftagende i $[5; 15.97]$
Funktionen f er voksende i intervallet $[15.97; 25]$

Så for at der skal være mindst omkostninger, skal der produceres ca. 16 tons. Prisen vil derfor være 207.2495105kr da man indsætter 15.97911673 i $f(x)$. Dette er det ønskede.