ملخص التفاضل والتكامل

أولاً: التفاضل

تذكر أن:

$\frac{ء}{ءس}(\text{أ ثابت}) = \text{صفر}$ ، $\frac{ء}{ءس} س^{ن} = ن\, س^{ن-1}$ ، $\frac{ء}{ءس}[د(س)]^{ن} = ن[د(س)]^{ن-1} \times د'(س)$ (مشتقة ما بداخل القوس)

$\frac{ء}{ءس}\sqrt{د(س)} = \frac{د'(س)}{2\sqrt{د(س)}}$ ، $\frac{ء}{ءس}(د \pm ر) = د' \pm ر'$

قانون الضرب: الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول ، قانون القسمة: $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

اشتقاق الدوال المثلثية:

$\frac{ء}{ءس}$ حا(أس) = أ حتا أس	$\frac{ء}{ءس}$ قا أس = أ قا أس ظا أس
$\frac{ء}{ءس}$ حتا أس = ـ أ حا أس	$\frac{ء}{ءس}$ قتا أس = ـ أ قتا أس ظتا أس
$\frac{ء}{ءس}$ ظا أس = أ قا² أس	$\frac{ء}{ءس}$ ظتا أس = ـ أ قتا² أس

لاحظ أن $حا^3(2س-1) = [حا(2س-1)]^3$

* إذا كانت ص = دالة في ع ، ع = دالة في س ، فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$ (ثم عوض عن ع)

الإشتقاق الضمني: إذا كانت ص دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س:

فإن $\frac{ء}{ءس}(ص^{ن}) = ن\, ص^{ن-1} \frac{ءص}{ءس}$ ، مثال ص٥ = س ∴ $5ص^4 \frac{ءص}{ءس} = 1$

الإشتقاق البارامترى: إذا كانت ص = د(ن) ، س = د(ن)

فإن $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \div \frac{ءس}{ءن}$ (نوجد $\frac{ءص}{ءن}$ أولاً ثم نوجد $\frac{ءس}{ءن}$ ، ثم نقسم $\frac{ءص}{ءس} = ✓$)

تذكر: المماس أفقى ← // محور السينات (الميل = صفر) ، المماس رأسى ← // محور الصادات (الميل = $\frac{1}{\text{صفر}}$ غير معرف)

* لو قال أوجد مشتقة (س³+1 مثلاً) بالنسبة إلى (جاس-1 مثلاً) نفرض ص = الأول ، ع = الثاني ثم نوجد $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \div \frac{ءع}{ءس}$

ميل المماس للمنحنى = $\frac{ءص}{ءس}$ { المشتقة = نقطة / ميل / زاوية ميل / معادلة مماس / معادلة عمودى

معادلة المماس هى ص - ص₁ = م (س - س₁) ، ومعادلة العمودى هى ص - ص₁ = $\frac{-1}{م}$ (س - س₁)

المشتقات العليا للدالة: تسمى المشتقات بدءاً من المشتقة الثانية بالمشتقات العليا ويرمز لها "$\frac{ء^2ص}{ءس^2}$" أو ص'' وهكذا

لاحظ ⚠ $\frac{ء}{ءس}\left(\frac{ءص}{ءس}\right) = \frac{ء^2ص}{ءس^2}$ لكن $\neq \left(\frac{ءص}{ءس}\right)^2$ ودى تساوى $= \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءص}{ءس}$

* لو قال إذا كان (س³+ص³=1) مثلاً أثبت أن ...... نشوف أعلى مشتقة مطلوبة ايه ونجيبها ونرجع نعوض فى المطلوب

ولاحظ أنه يتم التعويض عن قيمة $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت غير موجودة فى المطلوب

لاحظ كمان فى مسألة المشتقة العليا للاشتقاق بارامترى لما تجيب $\frac{ءص}{ءس}$ وتشتق مرة أخرى لإيجاد المشتقة الثانية بنشتق بالنسبة لـ س ($\frac{ء}{ءس}$) فأصبح نشتق بالنسبة لغيره ($\frac{ءن}{ءس}$)

تذكر قواعد سبق دراستها:

حا²هـ + حتا²هـ = 1	قا²هـ - ظا²هـ = 1	قتا²هـ - ظتا²هـ = 1	ظاهـ = $\frac{حاهـ}{حتاهـ}$ ، قاهـ = $\frac{1}{حتاهـ}$	حا2أ = 2حاأ حتاأ
حا²هـ = 1 - حتا²هـ	ظا²هـ = قا²هـ - 1	ظتا²هـ = قتا²هـ - 1	ظتاهـ = $\frac{حتاهـ}{حاهـ}$ ، قتاهـ = $\frac{1}{حاهـ}$	حتا2أ = 1 - 2حا²أ
حتا²هـ = 1 - حا²هـ	قا²هـ = ظا²هـ + 1	قتا²هـ = ظتا²هـ + 1		ظا2أ = $\frac{2ظاأ}{1 - ظا²أ}$

تطبيقات هندسية على المشتقة :

* طرق معرفة ميل المماس : ① يمر بالنقطتين (س١، ص١) ، (س٢، ص٢) ∴ م = $\frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$

② يصنع زاوية هـ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات ∴ م = ظا هـ

③ // محور السينات ∴ م = صفر ④ // محور الصادات ∴ م = غير معرف (المقام = صفر)

⑤ // المستقيم أ س + ب ص + د = صفر ∴ م = ميل المستقيم = $\frac{-أ}{ب}$

⑥ ⊥ المستقيم أ س + ب ص + د = صفر ∴ م = − مقلوب ميل المستقيم = $\frac{ب}{أ}$

من الآخر : معادلة المماس $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ = م ومعادلة العمودي $\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{-1}{م}$

ملاحظات : - لمعرفة نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات ← نضع ص = صفر ونحسب قيم س

- لمعرفة نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات ← نضع س = صفر ونحسب قيم ص

- معادلة المنحنى (ص) $\underset{\text{تكامل}}{\overset{\text{تفاضل}}{\rightleftarrows}}$ ميل المماس ($\frac{ءص}{ءس}$) $\underset{\text{تكامل}}{\overset{\text{تفاضل}}{\rightleftarrows}}$ معدل تغير ميل المماس ($\frac{ء^2ص}{ءس^2}$)

- لو أعطى معادلة منحنى ونقطة أو ميل المماس = رقم : عوض هات النقطة الناقصة ← اشتق ضمنياً ← ساوي المشتقة بالميل ← أوجد المطلوب

- عند نقطة التماس المشترك لمنحنيان : يكون ميل المماس للمنحنيان متساوي والمشتقة واحدة

- لو سأل على مساحة مثلث ← اشتقاق (نقطة)

- لو قال أثبت أن المنحنيان متماسان ← اشتقاق (م١ = م٢)

- لو قال أثبت أن المنحنيان متقاطعان على التعامد ← م١ × م٢ = −١

المعدلات الزمنية المرتبطة : إذا كانت ص = د(س) ، س تتغير تبعاً لتغير الزمن ن ، فإن ص تتغير أيضاً لتغير الزمن ن ، أي أن ص دالة في الزمن ن ويكون $\frac{ءص}{ءن} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءس}{ءن}$ وتربط هذه العلاقة المعدل الزمني لتغير س بالمعدل الزمني لتغير ص ، ويكون المعدل موجباً إذا كان المتغير يزداد بتزايد الزمن ، ويكون سالباً إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن .

مثلاً : مشتقة (س٢ + ص٢) بالنسبة لـ ن = ٢س $\frac{ءس}{ءن}$ + ٢ص $\frac{ءص}{ءن}$

مشتقة س٣ص بالنسبة لـ ن = ٣س٢ص $\frac{ءس}{ءن}$ + س٣ $\frac{ءص}{ءن}$

خطوات الحل : ① تحديد المعطى والمطلوب مع الرسم إن أمكن . ② إيجاد علاقة رياضية تربط بين المتغيرات في المعطى والمطلوب . ③ اشتقاق طرفي العلاقة بالنسبة للزمن ④ التعويض بالمعطى لإيجاد المطلوب

$\frac{ءف}{ءن}$: السرعة (معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن)

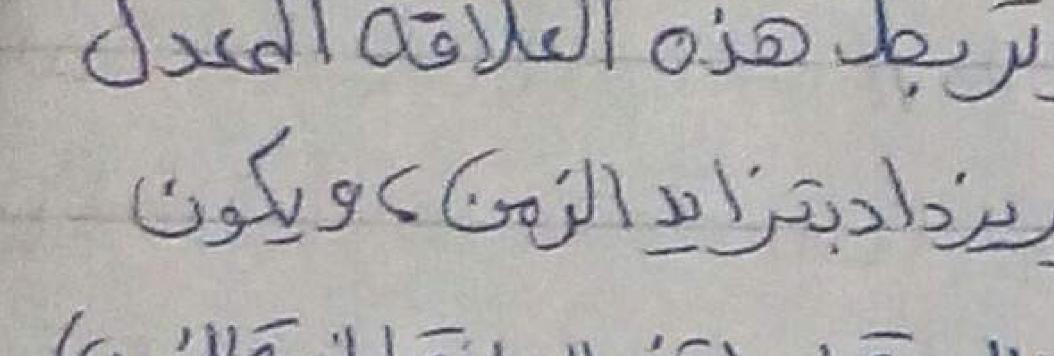
$\frac{ءح}{ءن}$ معدل تغير الحجم بالنسبة للزمن

$\frac{ءنق}{ءن}$ معدل تغير نصف القطر بالنسبة للزمن

$\frac{ءس}{ءن}$ معدل تغير س بالنسبة للزمن ، أو سرعة الجسم في اتجاه المحور السيني

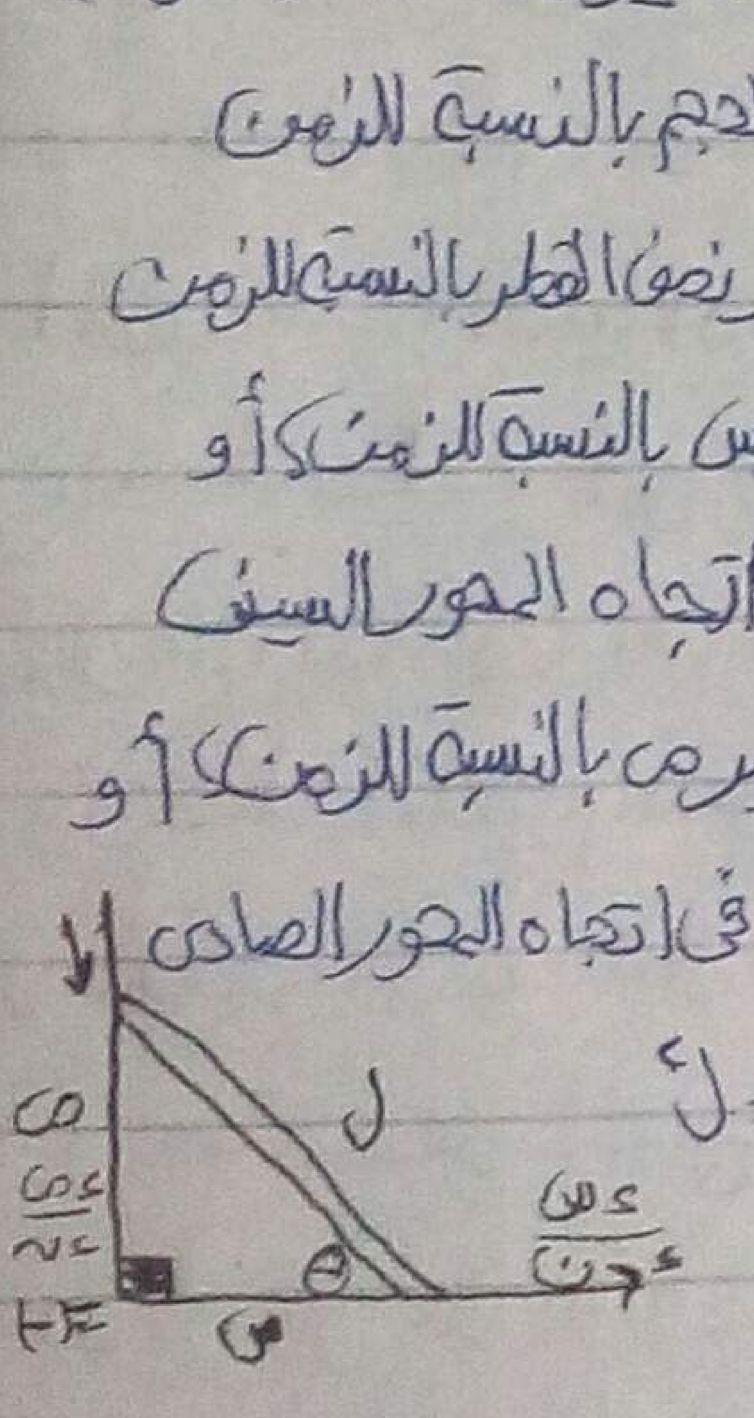
$\frac{ءص}{ءن}$ معدل تغير ص بالنسبة للزمن ، أو سرعة الجسم في اتجاه المحور الصادي

* العلاقة الرياضية يمكن أن تكون محيط / مساحة / حجم / نظرية فيثاغورث / تشابه / في السؤال علاقة معطاه



أفكار المسائل : ① السلم (ينزلق لأسفل ← مبتعداً ← (−)) ; تحل بفيثاغورث س٢ + ص٢ = ل٢

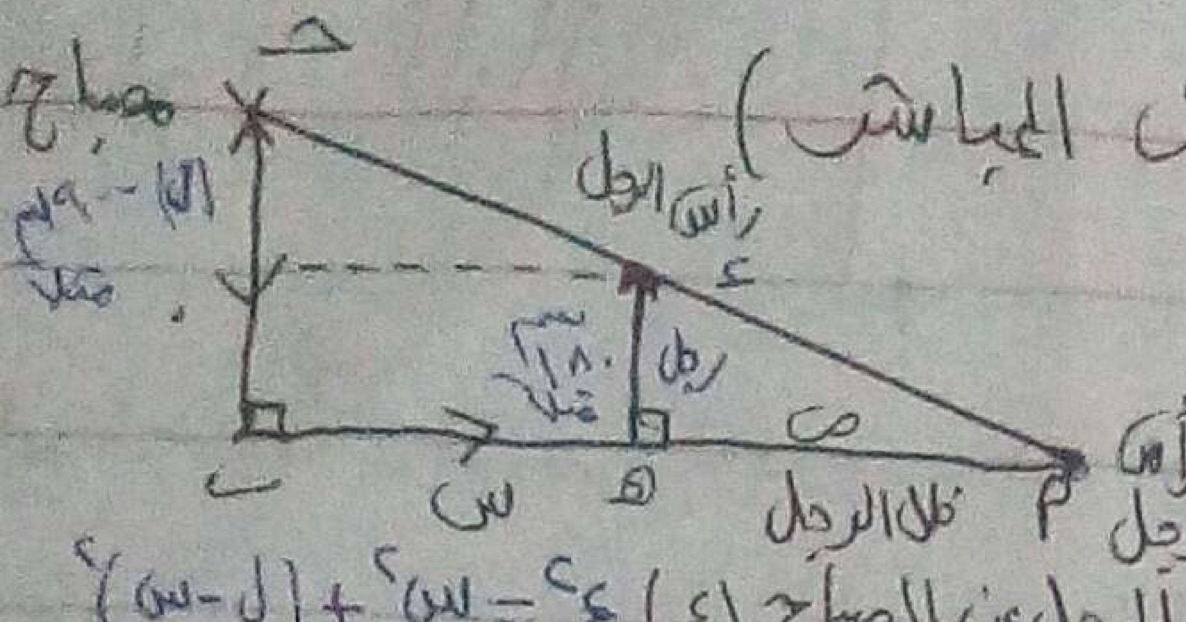
وإذا طلب الزاوية θ ← جا θ = $\frac{ص}{ل}$ / جتا θ = $\frac{س}{ل}$ / ظا هـ = $\frac{\text{مقابل (ص)}}{\text{مجاور (س)}}$ واشتق وكمل



② الطريقين : تحل بقانون جتا ، ويكون المسافة الكلية = المسافة الابتدائية + السرعة × الزمن

(س = س٠ + $\frac{ءس}{ءن}$ × ن) ، نفرض أن السيارة الأولى تحركت مسافة أ ب = س كم ، والثانية تحركت مسافة أ د = ص كم ، وأن المسافة بين السيارتين ف كم ف٢ = س٢ + ص٢ − ٢ س ص جتا θ

٣) تحرك نقطة على المنحنى: اشتق وعوض بالنقطة لإيجاد $\frac{دص}{دن}$ (التعويض المباشر)



٤) الرجل والمصباح (التشابه): في Δ أ ب جـ ∵ د هـ // ب جـ

∴ $\frac{أ هـ}{أ ب} = \frac{د هـ}{جـ ب}$ ∴ $\frac{ص}{ص + س} = \frac{١٨٠}{٩٠٠} = \frac{١}{٥}$ ∴ ٥ص = ص + س ∴ | العلاقة: س = ٤ص |

$\frac{دس}{دن}$: سرعة الرجل ، $\frac{دص}{دن}$ = استطالة الظل ، سرعة ظل الرجل = $\frac{دس}{دن} + \frac{دص}{دن}$ ، بعد رأس الرجل عن المصباح (ى) ع² = س² + (ل - س)²

٥) الأشكال الهندسية: أهم حاجة تحديد نوع الشكل وإيه المطلوب (محيط / مساحة / حجم)

الشكل	المحيط	المساحة
المثلث	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{١}{٢}$ × ل × ع أو $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين × جا الزاوية بينهما
المثلث متساوي الأضلاع	//	$\frac{١}{٢}$ ل² جا ٦٠° = $\frac{ل^٢ \sqrt{٣}}{٤}$ ، ل = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$
المربع	٤ ل	ل² = $\frac{١}{٢}$ ق² (مربع القطر) ، طول القطر = ل $\sqrt{٢}$
المستطيل	٢(س + ص)	س × ص ، أ هـ = $\frac{أ ب × أ د}{ب د}$
المعين	٤ ل	ل × ع = $\frac{١}{٢}$ × ق₁ × ق₂
متوازي الأضلاع	٢(ل₁ + ل₂)	ل₁ × ع = ل₂ × ع = ل₁ × ل₂ × جا θ
شبه المنحرف	مجموع أطوال أضلاعه	$\frac{١}{٢}$ (ل₁ + ل₂) × ع = القاعدة المتوسطة × الارتفاع
الدائرة	٢ ط نق	ط نق²
القطاع الدائري	٢نق + ل	$\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ نق² هـ
القطعة الدائرية		$\frac{١}{٢}$ نق² (هـ - جا هـ)
المضلع المنتظم		$\frac{ن ل^٢}{٤}$ ظتا $\frac{ن - ٢}{ن}$ × ٩٠° حيث ن عدد أضلاعه ، ل طول ضلعه
السداسي المنتظم	٦ ل	$\frac{٣}{٢}$ ل² $\sqrt{٣}$ ، طول القطر = ٢ل ، أ جـ = ل $\sqrt{٣}$ ، قياس θ = ١٢٠°

الشكل	المساحة الجانبية	المساحة الكلية	الحجم
المكعب	٤ ل²	٦ ل²	ل³
متوازي المستطيلات	٢(س + ص) × ع	٢(س ص + ص ع + ع س)	س × ص × ع ، مربع طول قطره = س² + ص² + ع²
الأسطوانة الدائرية القائمة	٢ ط نق ع	٢ط نق ع + ٢ط نق² = ٢ط نق (ع + نق)	ط نق² ع
الكرة	—	٤ ط نق²	$\frac{٤}{٣}$ ط نق³
المخروط	ط نق ل	ط نق ل + ط نق²	$\frac{١}{٣}$ ط نق² ع
الهرم	$\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي	المساحة الجانبية + مساحة القاعدة	$\frac{١}{٢}$ مساحة القاعدة × الارتفاع
المنشور	محيط القاعدة × الارتفاع	المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين	مساحة القاعدة × الارتفاع

لاحظ: حجم الجزء المحصور بين كرتين متحدتي المركز = $\frac{٤}{٣}$ ط (نق₂³ - نق₁³)

ومساحة // // // دائرتين // = ط (نق₂² - نق₁²)

سلوك الدالة

- د'(س) = صفر : ① نقط حرجة (س ، ص) ② فترات تزايد وتناقص ③ قيم عظمى محلية وقيم صغرى محلية
- د''(س) = صفر : ① نقط انقلاب (س ، ص) ② فترات تحدب لأعلى ولأسفل

الخطوات : ١) نشتق مرة ، نجيب س ونعوض في الدالة لإيجاد ص ← (س ، ص) هي النقط الحرجة ، لإيجاد فترات التزايد والتناقص نبحث اشارة المشتقة الأولى قبل وبعد نقط الحرجة (السينات) ، تكون تزايد عند القمة وتناقصية عند القاع

٢) نشتق مرة ثانية ، نجيب س ، نعوض في الدالة لإيجاد ص فتكون النقطة (س ، ص) يحتمل أن تكون نقطة انقلاب ، نبحث الإشارة للمشتقة الثانية ، يكون الاشارة (+) تحدب لأعلى و الإشارة (-) تحدب لأعلى

طريقة أخرى لإيجاد النقط الحرجة :
- د'(س) = صفر وتكون غير قابلة للاشتقاق عند س = ٩
- (لما تكون الدالة معرفة على جزئين) د'(٩)$^+$ = د'(٩)$^-$ لكن لو قابلة للاشتقاق : لا يوجد نقطة حرجة عند س = ٩

القيم العظمى والصغرى المطلقة [٩ ، ب] : نوجد النقط الحرجة س، ، س، ∈ [٩ ، ب] ونعمل جدول لإيجاد قيم ص

س	٩	س،	س،	ب
ص				

إيجاد القيم العظمى والصغرى المحلية باستخدام المشتقة الثانية : أوجد المشتقة الأولى ومنها النقط الحرجة ثم أوجد المشتقة الثانية وعوض في المشتقة الثانية بالنقط الحرجة : > صفر ← قيمة صغرى محلية ، < صفر ← قيمة عظمى محلية

لاحظ : د''(٩) = { > صفر ← صغرى ، < صفر ← عظمى }

تذكر : ① الربح = ثمن البيع - ثمن التكلفة

② المسافة بين نقطتين (س، ، ص،) ، (س٢ ، ص٢)

ف = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

تطبيقات سلوك الدالة :

١) نوجد علاقة بين متغيرين س ، ص ② نوجد د(س) التي يقول عنها أكبر ما يمكن أو أقل ما يمكن

٣ نعوض من العلاقة ① في الدالة ② ④ نوجد د'(س) = صفر لإيجاد النقط الحرجة

⑤ نوجد د''(س) { > صفر صغرى ، < صفر عظمى } ⑥ نعوض في ① أو ② لإيجاد س ، ص

لاحظ في مسألة المماس : النقطة الحرجة نعوض بها في د(س) الدالة ، د'(س) المشتقة الأولى = ٠ ، ونقطة الانقلاب نعوض بها في د(س) الدالة ، د''(س) المشتقة الثانية = صفر

الدالة الأسية واللوغاريتمية : هـ العدد النيبيري = ٢,٧١٨

* $\underset{س \leftarrow \infty}{نها} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س}$ = هـ ، ومنها $\underset{س \leftarrow 0}{نها} (1 + س)^{\frac{1}{س}}$ = هـ ، $\underset{س \leftarrow 0}{نها}$ هـ^{س} = ١

لاحظ : ① $\underset{س \leftarrow \infty}{نها} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{٩س}$ = هـ^{٩} ② $\underset{س \leftarrow \infty}{نها} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س + ٩}$ = هـ ③ $\underset{س \leftarrow \infty}{نها} \left(1 + \frac{٩}{س}\right)^{س}$ = هـ^{٩} ★

- لو مضروبين : $\left(1 + \frac{1}{س}\right)^{٥س}$ ← أس الأس $\left((1 + \frac{1}{س})^{س}\right)^{٥}$ ، $\left(1 + \frac{1}{س}\right)^{\frac{س}{٥}}$ ← $\left((1 + \frac{1}{س})^{س}\right)^{\frac{1}{٥}}$

- لو جمع : $\left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س + ٢}$ ← نقسمهم ضرب : $\underset{س \leftarrow \infty}{نها} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س}$ × $\underset{س \leftarrow \infty}{نها} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{٢}$ ، - لو قسمة ← يرجعوا طرح

لاحظ استخدام التجزيء : $\underset{س \leftarrow \infty}{نها} \left(\frac{س + ٣}{س - ٢}\right)^{س + ٨}$ = $\underset{س \leftarrow \infty}{نها} \left(\frac{س - ٢ + ٥}{س - ٢}\right)^{س + ٨}$ = $\underset{س \leftarrow \infty}{نها} \left(1 + \frac{٥}{س - ٢}\right)^{س + ٨}$

لاحظ لو الصعب جوه $\frac{٥}{س - ٢}$ ، نفرضه = ص ، عند س = ∞ ∴ ص = صفر وهات قيمة س وعوض في نها ص ← ٠

* $\underset{س \leftarrow 0}{نها} \frac{٩^{س} - 1}{س}$ = لو$_{هـ}$ ٩ ، ومنها $\underset{س \leftarrow 0}{نها} \frac{هـ^{س} - 1}{س}$ = لو$_{هـ}$ هـ = ١ | لو$_{٩}$ ٩ = ١

* $\underset{س \leftarrow 0}{نها} \frac{لو_{٩} (1 + س)}{س}$ = لو$_{٩}$ هـ ، ومنها $\underset{س \leftarrow 0}{نها} \frac{لو_{هـ} (1 + س)}{س}$ = لو$_{هـ}$ هـ = ١ | لو$_{٩}$ ١ = صفر

مشتقة الدالة الأسية واللوغاريتمية: $\frac{د}{دس} أ^{س} = أ^{س} \times \text{لو}_{هـ} أ \times$ مشتقة س

$\frac{د}{دس} هـ^{س} = هـ^{س}$ ، $\frac{د}{دس} هـ^{ع} = هـ^{ع} \times \frac{دع}{دس}$

$\frac{د}{دس} \text{لو}_{أ} س = \frac{1}{س} \times \text{لو}_{أ} هـ$ ، $\frac{د}{دس} \text{لو}_{هـ} س = \frac{1}{س} \times \text{لو}_{هـ} هـ = \frac{1}{س}$

$\frac{د}{دس} \text{لو}_{أ} ع = \frac{1}{ع} \times \text{لو}_{أ} هـ \times \frac{دع}{دس}$ ، $\frac{د}{دس} \text{لو}_{هـ} ع = \frac{1}{ع} \times \text{لو}_{هـ} هـ \times \frac{دع}{دس} = \frac{1}{ع} \times \frac{دع}{دس}$

لاحظ:

إذا كان ص = $\text{لو}_{هـ} |د(س)|$ فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{د'(س)}{د(س)}$

إذا كان ص = $\text{لو}_{أ} |د(س)|$ فإن $\frac{دص}{دس} = \frac{د'(س)}{د(س)} \times \text{لو}_{أ} هـ$

ثانياً: التكامل: تذكر قواعد التكامل

$\int أ \, دس = أس + ث$ (أ ثابت) ، $\int س^{ن} \, دس = \frac{س^{ن+1}}{ن+1} + ث$ [زود على الأس واحد واقسم على الأس الجديد.]

$\int (أس+ب)^{ن} \, دس = \frac{(أس+ب)^{ن+1}}{\underbrace{أ}_{\text{معامل س}}(ن+1)} + ث$ ، $\int (د(س))^{ن} \cdot د'(س) \, دس = \frac{(د(س))^{ن+1}}{ن+1} + ث$

تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية:

$\int هـ^{س} \, دس = هـ^{س} + ث$ ، $\int هـ^{كس+ب} \, دس = \frac{هـ^{كس+ب}}{ك} + ث$

$\int هـ^{د(س)} \cdot د'(س) \, دس = هـ^{د(س)} + ث$ ، $\int هـ^{أس} \, دس = \frac{هـ^{أس}}{أ} + ث$

$\int أ^{س} \, دس = \frac{أ^{س}}{\text{لو}_{هـ} أ} + ث$ ، $\int أ^{كس+ب} \, دس = \frac{أ^{كس+ب}}{ك \, \text{لو}_{هـ} أ} + ث$

$\int أ^{د(س)} \cdot د'(س) \, دس = \frac{أ^{د(س)}}{\text{لو}_{هـ} أ} + ث$ ، قواعد أخرى: $\int \frac{أ}{س} \, دس = أ \, \text{لو}_{هـ} |س| + ث$ ، (س $\neq 0$)

$\int \frac{1}{س} \, دس = \text{لو}_{هـ} |س| + ث$ ، $\int \frac{د'(س)}{د(س)} \, دس = \text{لو}_{هـ} |د(س)| + ث$

$\int \frac{د'(س)}{\sqrt{د(س)}} \, دس = 2\sqrt{د(س)} + ث$ ، خواص التكامل غير المحدد:

① $\int أ \, د(س) \, دس = أ \int د(س) \, دس$ (أ $\neq 1$) ② $\int [د(س) \pm ر(س)] \, دس = \int د(س) \, دس \pm \int ر(س) \, دس$

③ $\frac{د}{دس} \int د(س) \, دس = د(س)$ ④ $\int \frac{د}{دس} [د(س)] \, دس = د(س) + ث$

⑤ $\int د(س) \, دس - \int د(س) \, دس =$ ثابت وليس بالضرورة صفر

تكامل الدوال المثلثية:

① $\int \text{جا}(أس+ب) \, دس = -\frac{1}{أ} \text{جتا}(أس+ب) + ث$

② $\int \text{جتا}(أس+ب) \, دس = \frac{1}{أ} \text{جا}(أس+ب) + ث$

③ $\int \text{قا}^2(أس+ب) \, دس = \frac{1}{أ} \text{ظا}(أس+ب) + ث$ ولاحظ أن:

$\int \text{قتا}^2 س \, دس = -\text{ظتا} س + ث$ ، $\int \text{قا} س \, \text{ظا} س \, دس = \text{قا} س + ث$ ، $\int \text{قتا} س \, \text{ظتا} س \, دس = -\text{قتا} س + ث$

تحويلات هامة: ① $\text{جا}^2 س = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{جتا} 2س$ (لو مفيش تمام) $= 1 - \text{جتا}^2 س$ (لو في تمام)

② $\text{جتا}^2 س = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{جتا} 2س$ // $= 1 - \text{جا}^2 س$ //

جاجتا ، جمعهم ، طرحهم ، قسمتهم ، ضربهم التحويلات ؟

③ $\text{جا}^2 س + \text{جتا}^2 س = 1$ ④ $\text{جتا}^2 س - \text{جا}^2 س = \text{جتا} 2س$ ⑤ $\text{ظا}^2 س = \text{قا}^2 س - 1$

⑥ $\text{جا} س \, \text{جتا} س = \frac{1}{2} \text{جا} 2س$ ، ومن ثم يكون:

① ∫ ظاس ءس = ∫ (جاس / جتاس) ءس = − ∫ (−جاس / جتاس) ءس = $\boxed{\text{− لوهـ |جتاس| + ث = لوهـ |قاس| + ث}}$ [البسط تفاضل المقام]

② ∫ ظتاس ءس = ∫ (جتاس / جاس) ءس = $\boxed{\text{لوهـ |جاس| + ث}}$

③ ∫ قاس ءس = ∫ قاس (قاس + ظاس) / (قاس + ظاس) [بالضرب بسط ومقام في (قاس + ظاس)]

= ∫ (قا²س + قاس ظاس) / (قاس + ظاس) ءس = $\boxed{\text{لوهـ |قاس + ظاس| + ث}}$

④ ∫ قتاس ءس = ∫ قتاس (قتاس + ظتاس) / (قتاس + ظتاس) [بالضرب بسط ومقام في (قتاس + ظتاس)]

= ∫ (قتا²س + قتاس ظتاس) / (قتاس + ظتاس) ءس = − ∫ (− قتا²س − قتاس ظتاس) / (قتاس + ظتاس) ءس

= $\boxed{\text{− لوهـ |قتاس + ظتاس| + ث}}$

طرق التكامل:

① بالتعويض: * إذا كان التكامل المعطى على صورة ∫ د(ر(س)) ر'(س) ءس نستخدم التعويض ر(س) = ع

أي أن التكامل بالتعويض هو أحد طرق إيجاد التكامل، وبه يحول التكامل المعطى إلى تكامل قياسي معروف، وغالباً يستخدم في الجذور.

* إذا احتوى التكامل المعطى على الجذر النوني لدالة أي $\sqrt[n]{\text{ر(س)}}$ نستخدم التعويض ر(س) = ع^{n} أو ر(س) = ع

* في بعض المسائل نستخدم تعويض مناسب لها حتى يتم تبسيط التكامل وكتابته على الصورة القياسية (حسب المسألة)

② بالتجزيء: ∫ ع ءص = ص ع − ∫ ص ءع

أي أن ∫ لحاصل ضرب دالتين = الدالة الأولى × تكامل الثانية − ∫ تكامل الثانية × تفاضل الأولى ءع

ع تفاضل ، ءص تكامل ص

تفاضل الدالة: إذا كانت ص دالة في س، فإن الرمز ءص/ءس يعبر عن المشتقة الأولى للدالة، ويعبر الرمز ءص عن تفاضل الدالة ص حيث ءص = (ءص/ءس) . ∆س أي أن ءص = د'(س) . ءس

التكامل المحدد: إذا كانت الدالة د متصلة على الفترة [أ، ب] وكانت ت أي مشتقة عكسية للدالة د على نفس الفترة، فإن: $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ د(س) ءس = ت(ب) − ت(أ)

خواص التكامل المحدد:

[1] إذا كانت د دالة متصلة على [أ، ب]، حـ ∈]أ، ب[فإن:

$\int_{\text{ب}}^{\text{أ}}$ د(س) ءس = − $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ د(س) ءس ، $\int_{\text{أ}}^{\text{أ}}$ د(س) ءس = صفر

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ د(س) ءس = $\int_{\text{أ}}^{\text{حـ}}$ د(س) ءس + $\int_{\text{حـ}}^{\text{ب}}$ د(س) ءس

[2] إذا كانت الدالة د متصلة وفردية على الفترة [−أ، أ] فإن $\int_{\text{−أ}}^{\text{أ}}$ د(س) ءس = صفر

[3] " " " " " وزوجية " " " " " $\int_{\text{−أ}}^{\text{أ}}$ د(س) ءس = 2 $\int_{0}^{\text{أ}}$ د(س) ءس

[4] إذا كانت د، ر دالتين متصلتين على الفترة [أ، ب] فإن:

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ [د(س) ± ر(س)] ءس = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ د(س) ءس ± $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ر(س) ءس

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ ك . د(س) ءس = ك $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ د(س) ءس (ك ∈ ح)

- تكون الدالة زوجية إذا كان د(−س) = د(س)

- تكون الدالة فردية إذا كان د(−س) = − د(س)

التكامل المحدد والمساحات في المستوى :

① مساحة منطقة محددة بمنحنى الدالة د ومحور السينات في الفترة [أ ، ب]

نوجد نقط تقاطع المنحنى مع المحور بوضع ص = صفر ، ثم نبحث اشارة الدالة لبيان المساحات أعلى محور السينات وأسفله ، فإذا كان :

$د(س) \geq ٠$ (أعلى محور السينات) فإن $م = \int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس$

$د(س) \leq ٠$ (أسفل محور السينات) فإن $م = -\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس = \left|\int_{أ}^{ب} د(س)\, ءس\right|$

وإذا كانت د(س) لها أكثر من مساحة فإن $م = \left|\int_{أ}^{جـ} د(س)\, ءس\right| + \int_{جـ}^{ء} د(س)\, ءس + \left|\int_{ء}^{ب} د(س)\, ءس\right|$

② مساحة المنطقة المستوية المحصورة بين منحنيين :

نوجد نقط تقاطع المنحنيين بتساوي المعادلتين ، ثم لمعرفة الدالة الأكبر في كل فترة نوجد نقطة في كل فترة نعوض بها في كل دالة فتكون المساحة $م = \int_{أ}^{ب} [د(س) - ر(س)]\, ءس$

ويمكن الاستغناء عن معرفة ذلك بوضع علامة القيمة المطلقة $م = \left|\int_{أ}^{ب} (\text{أي دالة} - \text{الدالة الأخرى})\, ءس\right|$

وإذا كان يتقاطعان في نقطة فإن $م = \int_{أ}^{جـ} [د(س) - ر(س)]\, ءس + \int_{جـ}^{ب} [ر(س) - د(س)]\, ءس$

لاحظ : عندما تنحصر منطقة بين منحنيين متقاطعين فإن حدود التكامل بالنسبة إلى س هي الإحداثيات السينية لنقط التقاطع والتي نوجدها بحل معادلتي المنحنيين جبريًا

حجوم الأجسام الدورانية :

المجسم الدوراني : المجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول مستقيم ثابت في مستويها يسمى (محور الدوران) ، ويكون حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة مستوية حول محور

- السينات : $ح = \pi \int_{أ}^{ب} ص^2\, ءس = \pi \int_{أ}^{ب} [د(س)]^2\, ءس$
- الصادات : $ح = \pi \int_{أ}^{ب} س^2\, ءص = \pi \int_{أ}^{ب} [د(ص)]^2\, ءص$
- حجم الجسم الناشئ من دوران منطقة محددة بمنحنيين :

$ح = \pi \int_{أ}^{ب} (ص_1^2 - ص_2^2)\, ءس = \pi \int_{أ}^{ب} \left[(د(س))^2 - (ر(س))^2\right] ءس$