S5 Étude de la propagation dans une fibre optique

Devoir à la maison n°3

On considère une fibre optique constituée de deux cylindres concentriques de section circulaire (cf. fig **1**), et constitués l'un et l'autre de matériau isolant (la silice).
L'indice de réfraction de la partie centrale, appelée cœur, est noté n_C (cet indice n'est pas nécessairement uniforme : sa valeur peut être différente en fonction de la distance r à l'axe de la fibre) ; l'indice de la partie périphérique, appelée gaine, est noté n_G , avec $n_C > n_G$; l'indice de gaine est quand à lui uniforme.
Le milieu extérieur est l'air, assimilé au vide est donc d'indice $n_{air} = 1$. On notera f la fréquence des ondes lumineuses et c leur vitesse dans le vide.
Pour les applications numériques on prendra n_C=1,456 et n_G=1,410 dans les deux parties.

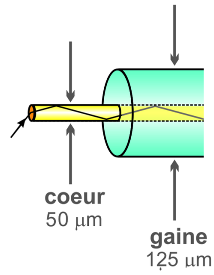

Figure **1** – Schéma d'une fibre optique

Fibre optique à saut d'indice

Dans une fibre à saut d'indice, le cœur (de rayon a) et la gaine sont des milieux homogènes : n_C et n_G sont uniformes. On note z la direction générale de propagation (cf. fig **2**)

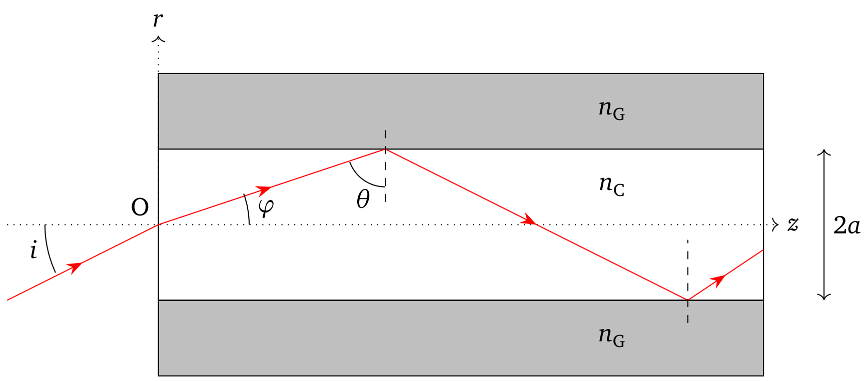

Figure **2** – Représentation du trajet d'un faisceau lumineux dans une couche d'épaisseur Δr.

(1) Montrer que le rayon lumineux est guidé dans le cœur (c'est-à-dire qu'il n'en sort pas) si θ est supérieur à une certaine valeur, θ_L, que l'on exprimera en fonction de n_C et de n_G.

(2) Calculer la valeur de θ_L avec les valeurs numériques données en introduction.

(3) On note i l'angle d'entrée du rayon à l'extérieur de la fibre. Exprimer, en fonction de n_G et n_C, la valeur maximale de i (notée i_{max}) pour que le guidage soit assuré dans la fibre. Calculer $\sin(i_{max})$ (grandeur appelée **ouverture numérique**).

(4) Soit L la longueur de la fibre. Exprimer la différence Δt de temps de parcours de l'entrée à la sortie, entre le trajet de durée minimale ($i = 0$) et le trajet maximal ($\theta = \theta_L$). Donner l'expression de Δt en fonction seulement de L, n_C, n_G et c.

(5) On convient que le débit maximal de la fibre, R^{saut}, est l'inverse de Δt . Calculer R^{saut} (valeur en bits par seconde), en prenant $L = 100\,\text{m}$.

Fibre à gradient d'indice

Dans les fibres optiques utilisées en télécommunications, un message est constitué d'une succession de signaux (on dit quelquefois impulsions) binaires (présence [0] ou absence [1]).

Divers phénomènes distordent les impulsions qui se propagent, ce qui entrave la reconstitution de l'information. On améliore la situation en utilisant une fibre dite à gradient d'indice. L'indice de réfraction est **continu** à l'intérieur de ce genre de fibre ; il varie dans le cœur avec la distance r à l'axe Oz et il est constant dans la gaine (quand $r > a$), avec la valeur n_G. L'indice dans le cœur, est modélisé, pour $0 \geq r \geq a$ par

$$n(r) = n_C\sqrt{1 - \frac{n_C^2 - n_G^2}{n_C^2} F\left(\frac{r}{a}\right)} \text{ où } F \text{ est monotone croissante sur } [0,1] \text{ et } F(0) = 0.$$

(6) Que doit valoir $F(1)$? On propose de choisir une fonction polynomiale d'ordre 2 pour F, qui doit être paire ($F(-1) = F(1)$). Quelle est alors l'unique choix possible pour $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$?

(7) Réécrire alors $n(r)$.

On va simplifier l'étude en s'intéressant à la partie supérieure de la fibre ($r > 0$). On décompose le cœur entre $r = 0$ et $r = a$ en une succession de N petites couches $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{N-1}$, toutes d'épaisseur $\Delta r \ll a = N\Delta r$.

La couche Σ_0 se situe entre $r_0 = 0$ et $r_1 = \Delta r$, la couche Σ_1 se situe entre $r_1 = \Delta r$ et $r_2 = 2\Delta r\ldots$

On suppose que dans chaque couche Σ_k l'indice optique est homogène et vaut $n_k = n(r_k)$.

On étudie la propagation d'un rayon entre deux couches successives en supposant qu'il reste toujours dans un même plan. On peut donc représenter ces couches par des rectangles successifs (cf. fig **3**).

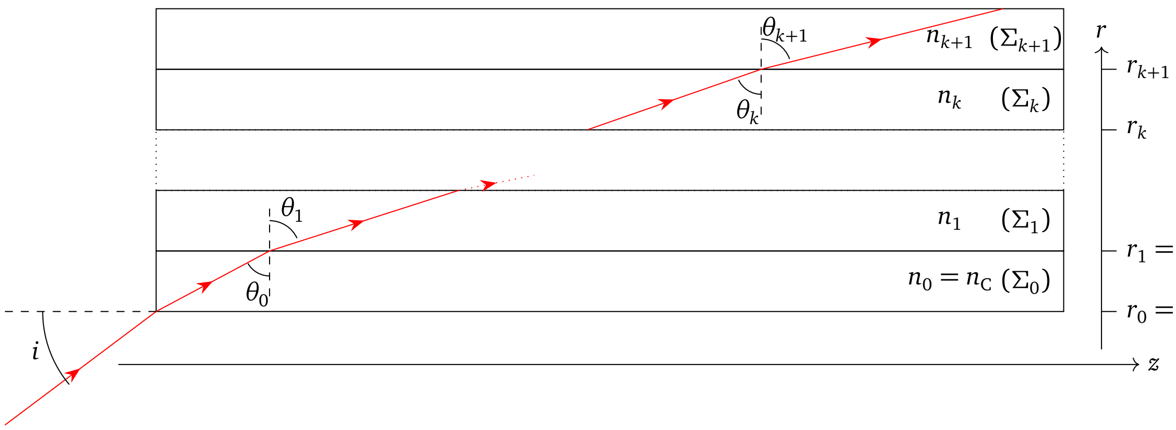

Figure **3** – Représentation du trajet d'un faisceau lumineux dans une couche d'épaisseur Δr.

(8) Un rayon arrive avec un angle θ_k à l'interface entre Σ_k et Σ_{k+1} (cf. fig **3**). Il est réfracté avec un angle θ_{k+1} dans la couche suivante. Quelle relation lie θ_k et θ_{k+1} ?

(9) En déduire que pour tout k, $U_k = n_k \sin(\theta_k)$ est constante. Donner sa valeur U en fonction de i et n_C.

(10) Dans la couche Σ_k, de quelle distance Δz_k le rayon lumineux a-t-il progressé latéralement dans la fibre (c'est-à-dire selon l'axe z) ?

(11) Montrer que $\left(\dfrac{\Delta r}{\Delta z_k}\right)^2 = \dfrac{n_k^2}{U^2} - 1$.

(12) Exprimer le temps de parcours Δt_k du rayon dans une couche Σ_k, en fonction de $\Delta r, c, U$ et n_k.

Lorsque $N \to \infty$, on peut réécrire la formule trouvée en **(11)** en une équation différentielle portant sur la fonction $r(z)$ traduisant la position r en fonction de z du rayon lumineux. Voici cette équation :

$$\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2 = \frac{n(r)^2}{U^2} - 1$$

(13) Donner en fonction notamment de U, la valeur maximale de r, $r_{\max}$ atteinte par le rayon lumineux.

(14) Pour que le rayon reste dans le cœur, quelle valeur limite doit valoir $r_{\max}$? En déduire **l'ouverture numérique** de cette fibre.

(15) La distance parcourue par le rayon dans la fibre sera maximale pour cette valeur de $r_{\max}$. Que vaut U dans ce cas-là ? Réécrire l'équation différentielle dans ce cas, en faisant intervenir r et sa dérivée par rapport à z.

(16) Chercher une solution de la forme $r(z) = a\sin(Cz)$. Déterminer C (supposé positif) dans ce cas. Représenter alors le trajet lumineux dans la fibre optique.

(17) Au bout de quelle distance latérale λ le rayon a-t-il parcouru le même "motif" dans la fibre ? En déduire le nombre de motifs M dans la fibre de longueur L.

(18) Le temps T de parcours par le rayon dans un motif est donné par l'intégrale : $T = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{z=0}^{\lambda} n(r)\sqrt{\left[\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}z}\right)^2 + 1\right]}\mathrm{d}z$

Justifier la forme de cette intégrale. En déduire le temps de parcours $\Delta t_{\max}$ (alors maximal, car la distance parcourue est maximale) du rayon lumineux dans toute la fibre de longueur L.

(19) Donner alors la différence $\Delta t'$ de temps de parcours de l'entrée à la sortie entre le trajet de durée minimale et maximale. En déduire la valeur du rapport entre débits maximaux de la fibre à gradient d'indice et de celle à saut d'indice $\dfrac{R^{\text{grad}}}{R^{\text{saut}}}$. Commenter.