De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler.
Hver opgave afsluttes med symbolet ⋆ så læseren er klar over det. Dette gælder ikke underspøgsmålene fra opgaverne 7 op til 14. Bemærk endvidere, at vektorer ikke har pil, men er skrevet med fed. Eks. $\boldsymbol{p} = \vec{p}$

Opgave 1

a) Der er givet to vektorer. Vektor $\boldsymbol{a} = \binom{4}{5}$ og $\boldsymbol{b} = \binom{16}{k}$ og vi ønsker at bestemme k, sådan så $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er parallelle $(\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b})$

Vi bestemmer k ved at løse en ligning. For at vektorerne skal være parallelle skal determinanten af vektorerne være lig med 0. Dvs. $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ så er $\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}$

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 5 & k \end{pmatrix} = 0$$

Man har en ligning:

$$4 \cdot k - 5 \cdot 16 = 0 \Leftrightarrow 4k = 80 \Leftrightarrow k = \frac{80}{4} = 20$$

Dvs. for $k = 20$ har man, at vektorerne $\boldsymbol{a}$ og $\boldsymbol{b}$ er parallelle.

⋆

Opgave 2

a) På baggrund af betingelserne opstilles den lineære forskrift. Man har:

$$L(x) = -22000x + 334000$$

Hvor $a = -22000$ og $b = 334000$ er konstanterne og x (målt i år fra 1990) og $L(x)$ (målt i antal liter fra år 1990).

⋆

Opgave 3

a) Udtrykket reduceres.

$$(a + b)(a - b) + b(b + 2a)$$
$$= a^2 - b^2 + b^2 + 2ab$$
$$= a^2 + 2ab$$

Som er udtrykket på reduceret form. Bemærk, at tredje kvadratsætning blev anvendt.

⋆

Opgave 4

a) Funktionen f er givet ved

$$f(x) = x^2 \cdot \ln(x) + 5 \cdot x^4 + 1$$

Funktionen differentieres vha. produktreglen.

$$f'(x) = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2 \cdot x \cdot \ln(x) + 20 \cdot x^3 = x + 2 \cdot x \cdot \ln(x) + 20 \cdot x^3$$

Dernæst indsættes $x = 1$ i $f'(x)$.

$$f'(1) = 1 + 2 \cdot 1 \cdot \ln(1) + 20 \cdot 1^3 = 1 + 0 + 20 = 21$$

⋆

Opgave 5

a) Begge funktioner er givet.

$$f(x) = -x + 7$$
$$g(x) = x^2 + 1$$

Skæringspunkterne findes ved at løse ligningen $f(x) = g(x)$.

$$-x + 7 = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 + x - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

Dermed har man en andengradsligning. Det er muligt at se, at tallene 3 og -2 er løsningerne (overvej hvorfor) sådan så man har $(x + 3) \cdot (x - 2)$ dvs. rødderne er:

$$x = -3 \vee x = 2$$

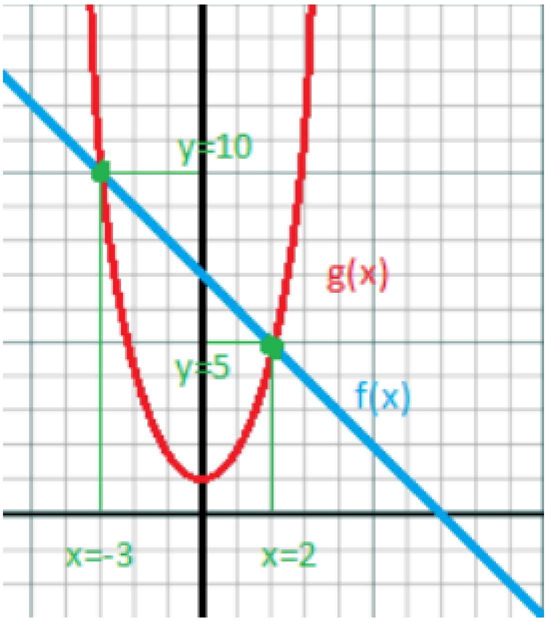
De tilhørerende y-koordinater kan man finde ved indsættelsen af ovenstående løsninger i $f(x)$ eller $g(x)$.

$$f(-3) = -(-3) + 7 = 10$$
$$g(2) = -2 + 7 = 5$$

Dvs. koordinatsættene er

$$\{x = -3; y = 10\} \wedge \{x = 2; y = 5\}$$

Funktionerne tegnes. (Her kan du bruge et sildeben til hjælp.)



★

Opgave 6

a) Der er givet en differentialligning som løser f.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - y^2}{x}, \qquad x > 0$$

Ligeledes går f igennem punktet $P(2;4)$, så det er muligt at bestemme tangenten.

$$x_0 = 2; f(x_0) = 4$$

Så $f'(x_0)$ findes via differentialligningen, dvs.:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 4^2}{2} = \frac{4 - 16}{2} = -6$$

Så tangenten er:

$$y = -6 \cdot (x - 2) + 4$$

Eller:

$$y = -6x + 16$$

★

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler.
Samme afslutning med ⋆ gælder også i denne delprøve. Ligeledes gælder det samme også med angivelse af vektorer.

Opgave 7

a) Der er givet to tabeller ifm. hærdningsprocessen for beton. Der anvendes eksponentiel regression i WordMat.

1	14.9
2	15.8
3	16.9
4	18.4
5	20.3

Eksponentiel regression udført vha. CAS-værktøjet WordMat: $R^2 = 0.988744$

$$f(t) = 13.61365 \cdot 1.080135^t, \qquad 0 \leq t \leq 10$$

Dermed blev tallene a og b bestemt som følger:

$$a = 1.081035; b = 13.61365$$

b) $t = 6$ indsættes i $f(t)$ så:

$$f(6) = 13.61365 \cdot 1.080135^6 = 21.619$$

Så efter 6 timer er temperaturen $21.619^o C$.

c) Ligningen $f(t) = 25$ løses.

$$13.61365 \cdot 1.080135^t = 25 \Leftrightarrow$$
$$1.080135^t = \frac{25}{13.61365} \Leftrightarrow$$
$$t \cdot \ln(1.080135) = \ln\left(\frac{25}{13.61365}\right) \Leftrightarrow$$
$$t = \frac{\ln\left(\frac{25}{13.61365}\right)}{\ln(1.080135)} \approx 7.884$$

Efter 7.8 timer, er temperaturen ca. $25^o C$.

Tallet a omregnes til r og konklusionen er så, at hvor hver time der går efter støbning, så vokser temperaturen med 8% pr. time.

⋆

Opgave 8

a) Funktionen $f(x) = x^3 - 7x^2 + 8x + 16$ er givet. Man ønsker nulpunkterne.

$$f(x) = 0$$

Så ligningen er:

$$x^3 - 7x^2 + 8x + 16 = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = -1 \quad \vee \quad x = 4$$

Hermed har man fået løsningerne.

b) Monotoniforholdene bestemmes. Ligningen $f'(x) = 0$ løses. Først differentieres funktionen.

$$f'(x) = 3x^2 - 14x + 8$$

Dernæst løses ligningen, dvs. en andengradsligning:

$$3x^2 - 14x + 8 = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = \frac{2}{3} \quad \vee \quad x = 4$$

Dermed er løsningerne for den afledede fundet. Den dobbelte afledede regnes.

$$f''(x) = 6x - 14$$

Deri indsættes rødderne fra $f'(x) = 0$.

$$f''\left(\frac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 14 = -10, \qquad -10 < 0 \quad \textit{lokalt maksimum}$$

$$f''(4) = 6 \cdot 4 - 14 = 10, \qquad 10 > 0 \quad \textit{lokalt minimum}$$

Dvs. funktionen er:

Voksende i intervallet $]-\infty; \frac{2}{3}]$ og $[4; \infty[$ samt aftagende i intervallet $\left[\frac{2}{3}; 4\right]$.

<u>(Prøv at overbevis dig selv om, at det passer ved at tegne et monotoniskema).</u>

c) Rumfanget bestemmes.

$$M = \pi \cdot \int_{-1}^{4} f(x)^2\,dx = \pi \cdot \int_{-1}^{4} (x^3 - 7x^2 + 8x + 16)^2\,dx$$

$$= \pi \cdot \int_{-1}^{4} x^6 - 14x^5 + 65x^4 - 80x^3 - 160x^2 + 256x + 256\,dx$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{1}{7}x^7 - \frac{7}{3}x^6 + 13x^5 - 20x^4 - \frac{160}{3}x^3 + 128x^2 + 256x\right]_{-1}^{4}$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{7} \cdot 4^7 - \frac{7}{3} \cdot 4^6 + 13 \cdot 4^5 - 20 \cdot 4^4 - \frac{160}{3} \cdot 4^3 + 128 \cdot 4^2 + 256 \cdot 4 - \left(\frac{1}{7} \cdot (-1)^7 - \frac{7}{3} \cdot (-1)^6 + 13 \cdot (-1)^5 - 20 \cdot (-1)^4 - \frac{160}{3} \cdot (-1)^3 + 128 \cdot (-1)^2 + 256 \cdot (-1)\right)\right) = 2337.494$$

Selvfølgelig kunne man godt have sparet disse lange udregninger, men flere af hjemmesidens besøgende ønsker at der vises udregninger, sådan så man kan se hvad der reelt set sker. Rumfanget M blev altså bestemt til 2337.494.

★

Opgave 9

a) Der er givet ligningen for cirklen:
C har ligningen:

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 5^2$$

Ligningen for linjen er:
l har ligningen:

$$4x - 3y + k = 0$$

I spgm. a) antager man, at $k = 23$, så skæringspunkterne mellem cirklen og ligningen er:

$$4x - 3y + 23 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{23}{3}$$

Heri indsættes det i y i ligningen for cirklen.

$$(x+2)^2 + \left(\left(\frac{4}{3}x + \frac{23}{3}\right) - 5\right)^2 = 5^2$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = -5 \quad \vee \quad x = 1$$

Disse rødder indsættes i linjen l:

$$y = \frac{4}{3} \cdot (-5) + \frac{23}{3} = 1$$

$$y = \frac{4}{3} \cdot 1 + \frac{23}{3} = 9$$

Hermed er koordinatsættene:

$$\{x = 1; y = 9\} \wedge \{x = -5; y = 1\}$$

b) Her benyttes dist formlen for at bestemme k.

$$dist(C, l) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Heri indsættes linjen og cirklen (som sættes lig med radius (overvej hvorfor)):

$$\frac{|4 \cdot (-2) + (-3) \cdot 5 + k|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 5 \Leftrightarrow \frac{|-23 + k|}{5} = 5 \Leftrightarrow k = \begin{cases} -2 \\ 48 \end{cases}$$

Dvs. hermed har man k, sådan så linjerne er tangent til cirklen. Ligningerne er:

$$4x - 3y - 2 = 0 \wedge 4x - 3y + 48 = 0$$

★

Opgave 10

a) Differentialligningen er givet ved:
$$M'(t) = 0.195 \cdot e^{-0.0426 \cdot t} \cdot M(t)$$
Væksthastigheden efter 5 dage bestemmes.
$$M'(t) = 0.195 \cdot e^{-0.0426 \cdot 5} \cdot 0.125 = 0.01969$$
Så for hvert døgn der går fra kyllingen er 5 dage gammel, stiger dens vægt med $0.02kg$

b) I Maple anvendes $dsolve$.
$$evalf[5](\,dsolve(\{M'(t) = 0.195 \cdot e^{-0.0426 \cdot t} \cdot M(t), M(5) = 0.125\}, M(t)))$$
$$M(t) = 5.0530\, e^{-4.5775\, e^{-0.042600\, t}}$$
Hermed er forskriften givet. Kyllingens alder bestemmes, når den vejer $2kg$.
$$M(t) = 2$$
Så ligningen er:
$$5.0530 \cdot e^{-4.5775 \cdot e^{-0.042600 \cdot t}} = 2$$
$\Updownarrow$ *Ligningen løses for t vha. CAS-værktøjet WordMat.*
$$t = 37.49138$$
Efter ca. 37.5 dage, vejer kyllingen $2kg$.

★

Opgave 11

a) Der ønskes en linje på parameterform. Punktet er $P(1,0,-2)$ og som er parallelt med vektoren:
$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Parameterfremstillingen for l er:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Normalvektoren er:
$$\boldsymbol{n_l} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{n_{xy}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
Vinklen bestemmes mellem $\boldsymbol{n_l}$ og $\boldsymbol{n_{xy}}$:
$$v = \arccos\left(\frac{1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}\right) = 35.264^o$$
Denne vinkel gælder for n_l og n_{xy} og da n_{xy} er parallelt med z-aksen, så er
$$v_{spids} = 90^o - v = 90^o - 35.264^o = 54.736^o$$

b) Linjen for m er:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Man ønsker at vide skæringspunktet mellem l og m, så der løses to ligninger med to ubekendte:

$$2s = t$$
$$3s = -2 + 2t$$

I CAS løses problemet og man får:

$$\{s = 2; t = 4\}$$

Da man har $s = 2$, så indsættes det i m:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 2k \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Og her er l:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Her løses ligningen (der er valgt fra x-koordinaterne i begge parameterfremstillinger):

$$5 = 4 + 2k \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$$

Denne værdi af k bruges i m og $s = 2$, man får:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Dvs. koordinatsættet for skæringspunkterne er:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

For $k = \frac{1}{2}$.

★

<u>(Vi valgte jo x-koordinaterne i begge parameterfremstillinger, kunne man vælge andre?)</u>

Opgave 12

a) Tabellen indskrives i Word:

	Kvinder	***Mænd***	***I alt***
Ja	X	X	1239/88.5%
Nej	X	X	161/11.5%
I alt	760	640	1400/100%

Hermed er der indskrevet i tabellen som ønsket.

b) Nulhypotesen er:

$$H_0 = Der\ er\ uafhængighed\ mellem\ mand\ og\ kvinde\ og\ hvilken\ søvn\ man\ får.$$

Man har fået angivet procentandelen i den lodrette sidste kolonne. Man omregner den vha. procentregning fra matematik C.

$$ja = \frac{1400 \cdot 88.5}{100} = 1239; nej = \frac{1400 \cdot 11.5}{100} = 161$$

De forventede værdier bestemmes. Formlen er:

$$\frac{vandret\ sum}{sum\ i\ alt} \cdot lodret\ sum$$

I Maple udregnes hele pivtøjet:

$$evalf[3]\left(Ja_{kvinder} = \frac{1239}{1400} \cdot 760\right); evalf[2]\left(Nej_{kvinder} = \frac{161}{1400} \cdot 760\right); evalf[3]\left(Ja_{mænd} = \frac{1239}{1400} \cdot 640\right); evalf[2]\left(Nej_{mænd} = \frac{161}{1400} \cdot 640\right)$$

$$Ja_{kvinder} = 673.$$

$$Nej_{kvinder} = 87.$$

$$Ja_{mænd} = 566.$$

$$Nej_{mænd} = 74.$$

Hermed kan man lave en tabel over de forventede værdier:

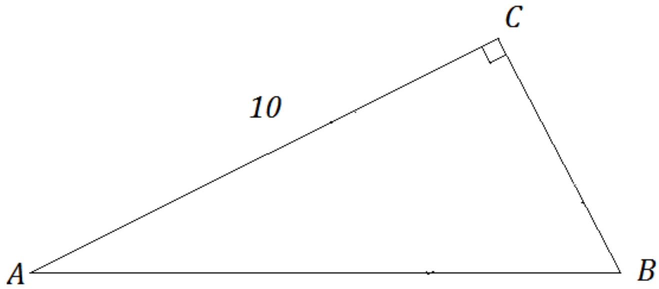
	Kvinder	***Mænd***	***I alt***
Ja	673	566	1239/88.5%
Nej	87	74	161/11.5%
I alt	760	640	1400/100%

Dermed må man antage, at hypotesen H_0 er sand, der er uafhængighed mellem personers søvn samt om man er mand eller kvinde.

★

Opgave 13

a) Først og fremmest tegnes trekanten ind.



Her er $|AC| = 10$, $\angle A = 30^o$ og $\angle C = 90^o$
Alle sidelængder bestemmes samt vinkler.

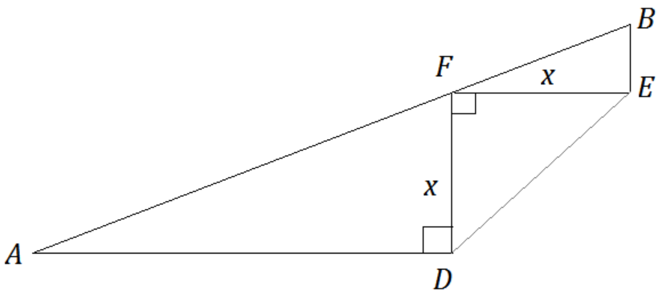
$$\angle B = 180^o - \angle A - \angle C = 180^o - 30^o - 90^o = 60^o$$

Dernæst bestemmes længderne $|AB|$ og $|BC|$:

$$|AB| = \frac{\sin(90) \cdot 10}{\sin(60)} = 11.547$$

$$|BC| = \frac{\sin(30) \cdot 10}{\sin(60)} = 5.773$$

b) Her ønskes $|DF|$. Tegningen tegnes forny.



Da opstilles en ligning, man har:

$$\frac{|EF|}{|AC| - |EF|} = \frac{|BC| - |BE|}{|DF|}$$

Indsættes tallene fås:

$$\frac{x}{10 - x} = \frac{5.773 - x}{x} \Leftrightarrow x^2 = x^2 - 15.773x + 57.730 \Leftrightarrow 15.773x = 57.730 \Leftrightarrow x = \frac{57.730}{15.773} = 3.66005199$$

Dvs. den søgte afstand $|DF| = 3.66$

(Prøv at overbevis dig om, at det passer).

★

Opgave 14

a) Der er givet en funktion $f(x) = -x^2 + 4$
Ligningen løses, dvs. $f(x) = 0$, så
$$-x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$
Arealet af M er:
$$M = \int_0^2 -x^2 + 4\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x\right]_0^2 = -\frac{1}{3}\cdot 2^3 + 4\cdot 2 = \frac{16}{3}$$

b) Den givende funktion differentieres.
$$T'(a) = a^2 + 4 - \frac{(a^2+4)^2}{4a^2}$$
Ligningen $T'(a) = 0$ løses.
$$a^2 + 4 - \frac{(a^2+4)^2}{4a^2} = 0$$
$\Updownarrow$ *Ligningen løses for a vha. CAS-værktøjet WordMat.*
$$a = -1.154701 \quad \vee \quad a = 1.154701$$
Den dobbelte afledede tages. Bemærk, at man ikke bruger den negative a-værdi. I Maple bliver det udført:

$T'(a)$
$$a^2 + 4 - \frac{1}{4}\frac{(a^2+4)^2}{a^2}$$

$T''(1.154701)$
$$6.928197690$$

Da $6.92 > 0$ er der et lokalt minimum, dvs. $a = 1.154701$ er den værdi der giver det minimale areal i trekanten OQR.

c) Man bruger tangentligningen.
$$t = f'(a)(x-a) + f(a)$$
Så:
$$t = -2\cdot a\cdot(x-a) - a^2 + 4 = a^2 - 2ax + 4$$
For koordinatet for x ved Q har man:
$$a^2 - 2ax + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a^2+4}{2a}$$
For koordinatet for y ved R har man:
$$a^2 - 2a\cdot 0 + 4 = y \Leftrightarrow y = a^2 + 4$$
Koordinatsættet til Q og R er:
$$\left\{x = \frac{a^2+4}{2a}; y = 0\right\} \wedge \{x = 0; y = a^2 + 4\}$$

Opgaven fortsætter på næste side

Endelig udnyttes arealformlen for en retvinklet trekant.

$$T(a) = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$$

Man har at $h = a^2 + 4$ og $g = \frac{a^2+4}{2a}$ så:

$$T(a) = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + 4) \cdot \left(\frac{a^2 + 4}{2a}\right) = \frac{(a^2 + 4)^2}{4a}$$

Dermed passer pengene og den søgte formel er dermed argumenteret.

★