

# Différentes démonstrations de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

Essaidi Ali

28 août 2018

## Résumé

Le but de ce travail est de donner quelques démonstrations de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0, (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2) (y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

## 1 Démonstration à l'aide de l'inégalité $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ :

Soit  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$ . On a :

$$\forall a, b > 0, 0 \leq (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

donc :

$$\forall a, b > 0, ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

donc :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \frac{x_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}} \frac{y_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{x_k^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \frac{1}{2} \frac{y_k^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

d'où :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \frac{x_k y_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{x_k^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \frac{1}{2} \frac{y_k^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

On déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{x_k y_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}} &\leq \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2} \frac{x_k^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \frac{1}{2} \frac{y_k^2}{\sum_{i=1}^n y_i^2} \right) \\ &= \frac{1}{2 \sum_{i=1}^n x_i^2} \sum_{k=1}^n x_k^2 + \frac{1}{2 \sum_{i=1}^n y_i^2} \sum_{k=1}^n y_k^2 \\ &= \frac{1}{2 \sum_{k=1}^n x_k^2} \sum_{k=1}^n x_k^2 + \frac{1}{2 \sum_{k=1}^n y_k^2} \sum_{k=1}^n y_k^2 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^n \frac{x_k y_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}} = \frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}}$$

donc :

$$\frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}} \leq 1$$

donc :

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}$$

d'où :

$$\left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

## 2 Démonstration à l'aide des sommes doubles :

Soit  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$  donc :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i,j=1}^n (x_i y_j - x_j y_i)^2 \\ &= \sum_{i,j=1}^n (x_i^2 y_j^2 - 2x_i y_j x_j y_i + x_j^2 y_i^2) \\ &= \sum_{i,j=1}^n x_i^2 y_j^2 - 2 \sum_{i,j=1}^n x_i y_i x_j y_j + \sum_{i,j=1}^n x_j^2 y_i^2 \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n y_j^2 \right) - 2 \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \left( \sum_{j=1}^n x_j y_j \right) + \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - 2 \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) + \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \\ &= 2 \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - 2 \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \\ &= 2 \left( \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \right) \end{aligned}$$

donc :

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \geq 0$$

d'où

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \geq \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2$$

## 3 Démonstration à l'aide d'une somme télescopique :

Soit  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$ .

On sait que  $\forall x, y > 0, x + y \geq 2\sqrt{xy}$  donc  $\forall a, b, c, d > 0$  :

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd \geq ac + 2\sqrt{abcd} + bd = (\sqrt{ac} + \sqrt{bd})^2$$

donc

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$$

d'où :

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} - \sqrt{ac} \geq \sqrt{bd}$$

On déduit que  $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$  :

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2)(y_1^2 + \dots + y_{k+1}^2)} - \sqrt{(x_1^2 + \dots + x_k^2)(y_1^2 + \dots + y_k^2)} \geq \sqrt{x_{k+1}^2 y_{k+1}^2} = x_{k+1} y_{k+1} \\ &\sum_{k=1}^{n-1} \left( \sqrt{(x_1^2 + \dots + x_{k+1}^2)(y_1^2 + \dots + y_{k+1}^2)} - \sqrt{(x_1^2 + \dots + x_k^2)(y_1^2 + \dots + y_k^2)} \right) \geq \sum_{k=1}^{n-1} x_{k+1} y_{k+1} \end{aligned}$$

donc :

$$\sqrt{(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)} - \sqrt{x_1^2 y_1^2} \geq \sum_{k=2}^n x_k y_k$$

donc :

$$\sqrt{(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)} - x_1 y_1 \geq \sum_{k=2}^n x_k y_k$$

donc :

$$\sqrt{(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)} \geq x_1 y_1 + \sum_{k=2}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

d'où :

$$(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) \geq \left( \sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 = (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2$$

## 4 Démonstration par récurrence :

On va procéder par récurrence sur  $n$ . Soit  $n \geq 1$ . Soit  $x_1, y_1 > 0$ . On a  $(x_1 y_1)^2 = x_1^2 y_1^2 \leq x_1^2 y_1^2$  donc la relation est vraie pour  $n = 1$ .

Soit  $n \geq 1, x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_{n+1} > 0$  et supposons la relation vraie pour  $n$  donc :

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

On a :

$$\begin{aligned} (x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2)(x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2) &= ((x_1^2 + \dots + x_n^2) + x_{n+1}^2)((x_1^2 + \dots + y_n^2) + y_{n+1}^2) \\ &= (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) + x_{n+1}^2(y_1^2 + \dots + y_n^2) \\ &\quad + y_{n+1}^2(x_1^2 + \dots + x_n^2) + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 \end{aligned}$$

Or par hypothèse de récurrence :

$$(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2$$

donc :

$$(x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2)(x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2) \geq (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 + x_{n+1}^2(y_1^2 + \dots + y_n^2) + y_{n+1}^2(x_1^2 + \dots + x_n^2) + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2$$

D'autre part, on sait que  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \geq 2ab$ , donc :

$$x_{n+1}^2(y_1^2 + \dots + y_n^2) + y_{n+1}^2(x_1^2 + \dots + x_n^2) \geq 2x_{n+1}y_{n+1}\sqrt{(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)}$$

Par hypothèse de récurrence :

$$(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2$$

donc :

$$x_{n+1}^2(y_1^2 + \dots + y_n^2) + y_{n+1}^2(x_1^2 + \dots + x_n^2) \geq 2x_{n+1}y_{n+1}(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)$$

d'où :

$$\begin{aligned} (x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2)(x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2) &\geq (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 + 2x_{n+1}y_{n+1}(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) + x_{n+1}^2 y_{n+1}^2 \\ &= (x_1 y_1 + \dots + x_{n+1} y_{n+1})^2 \end{aligned}$$

On déduit que la relation reste vraie pour  $n + 1$  donc, d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0, (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

## 5 Démonstration à l'aide de la convexité :

Soit  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0$  et on pose  $A = \sum_{k=1}^n x_k^2$ .

La fonction  $f(x) = x^2$  est convexe sur  $\mathbb{R}$  et  $\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{A} = 1$  donc, d'après l'inégalité de Jensen :

$$f\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{A} \frac{y_k}{x_k}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{A} f\left(\frac{y_k}{x_k}\right)$$

donc :

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{A} \frac{y_k}{x_k}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2}{A} \left(\frac{y_k}{x_k}\right)^2$$

donc :

$$\frac{1}{A^2} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leq \frac{1}{A} \sum_{k=1}^n y_k^2$$

d'où :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leq A \sum_{k=1}^n y_k^2 = \sum_{k=1}^n y_k^2 \sum_{k=1}^n x_k^2$$

## 6 Démonstration à l'aide du produit scalaire :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et on considère l'espace  $\mathbb{R}^n$  muni du produit scalaire  $\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$  et de la norme euclidienne associée  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ .  
Soit  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n > 0, x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ .

### 6.1 Première démonstration :

On a :

$$0 \leq \|(\|y\|x - \|x\|y)\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|x\|^2\|y\|^2 = 2\|x\|\|y\|(\|y\|\|x\| - \langle x, y \rangle)$$

donc :

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\|\|y\|$$

donc :

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$

d'où :

$$(x_1y_1 + \dots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

### 6.2 Deuxième démonstration :

On considère la fonction  $f(t) = \|tx - y\|^2$  donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = t^2\|x\|^2 - 2t\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

donc  $f$  est une fonction polynomiale du second degré car  $\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$  puisque  $x_1, \dots, x_n > 0$ .

Or  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \|tx - y\|^2 \geq 0$  donc le discriminant  $\Delta$  de  $f$  est négatif d'où :

$$\Delta = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 = 4(\langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2) \geq 0$$

On déduit que :

$$\langle x, y \rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \geq 0$$

donc :

$$(x_1y_1 + \dots + x_ny_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

