Anvendelse af løsningerne læses på hjemmesiden
www.matematikhfsvar.page.tl
Sættet løses med begrænset tekst og konklusion.
Formålet er jo, at man kan se metoden, og ikke skrive af!

Matematik A
August 2010
Delprøve 1

Opgave 1 - Vektorer

$\vec{a} \parallel \vec{b}$,

$\vec{a} = \langle 2, 2t-3 \rangle; \vec{b} = \langle 4, 7t-5 \rangle$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2t-3 \end{bmatrix}$$
$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7t-5 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1.1)}$$

$\vec{a} \parallel \vec{b} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2t-3 & 7t-5 \end{vmatrix} = 2\cdot(7t-5) - (2t-3)\cdot 4.$

$2\cdot(7t-5) - (2t-3)\cdot 4 = 0 \Leftrightarrow 14t - 10 - (8t-12) = 0 \Leftrightarrow 6t+2 = 0 \Leftrightarrow 6t = -2 \Leftrightarrow \underline{\underline{t = \frac{-1}{3}}}$

Opgave 2 - Parabel

$y = x^2 - 6x + 19$

Differentier parablen og find nulpunkterne.

$y' = 2x - 6$

$2x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$

Indsæt i parablen.

$y = 3^2 - 6\cdot 3 + 19 = 9 - 18 + 19 = -9 + 19 = 10$

$\underline{\underline{\text{Toppunktet er } T = (3, 10)}}.$

Opgave 3 - Formler

d isoleres.

$$R = \frac{4 \cdot p}{\pi \cdot d^2} \cdot l \Rightarrow R = \frac{4 \cdot p \cdot l}{\pi \cdot d^2} \Rightarrow R \cdot \pi \cdot d^2 = \left(\frac{4 \cdot p \cdot l}{\pi \cdot d^2} \right) \cdot \pi \cdot d^2 \Rightarrow R \cdot \pi \cdot d^2 = 4 \cdot p \cdot l \Rightarrow \frac{R \cdot \pi \cdot d^2}{R \cdot \pi} = \frac{4 \cdot p \cdot l}{R \cdot \pi}$$

$$\Rightarrow d^2 = \frac{4 \cdot p \cdot l}{R \cdot \pi} \Rightarrow \underline{\underline{d = \pm \sqrt{\frac{4 \cdot p \cdot l}{R \cdot \pi}}}}$$

Bemærk, at man normalt betegner d som værende '*distance*' på engelsk. Dvs. afstanden. Men alligevel medtages den evt. negative værdi.

Opgave 4 - Integralregning

Integralet

$$A = \int_0^2 \left(3\,x^2 - 10\,x\right)\,\mathrm{d}x = \left[x^3 - 5\,x^2\right]_0^2 = \left(2^3 - 5 \cdot 2^2\right) - \left(0^3 - 5 \cdot 0^2\right) = 8 - 20 - 0 = \underline{\underline{-12}}$$

Opgave 5 - Differentialligninger

$$y' = \frac{y}{x} + 1, f(x) = x \cdot \ln(x)$$

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \ln(x) = 1 + \ln(x)$$

$$1 + \ln(x) = \frac{x \cdot \ln(x)}{x} + 1 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = \ln(x) + 1$$

<u>Begge er identiske og derved er *f* løsningen til differentialligningen.</u>

Opgave 6 - Rumgeometri

$$dist(K, \alpha) = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) - 13|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|2 - 3 - 4 - 13|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{|-18|}{\sqrt{9}} = \frac{18}{3} = 6$$

Radius $r = 6$, dvs. <u>α tangerer K.</u>

Matematik A
August 2010
Delprøve 2

Opgave 7 - Geometri

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a

Cosinusrelationerne

$a := 7.1 :; b := 8.5 :; c := 5.9 :$

$$\angle A = invCos\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2\cdot b\cdot c}\right)$$

$$\angle(A) = 55.61120826 \qquad (7.1.1)$$

$$\angle B = invCos\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2\cdot a\cdot c}\right)$$

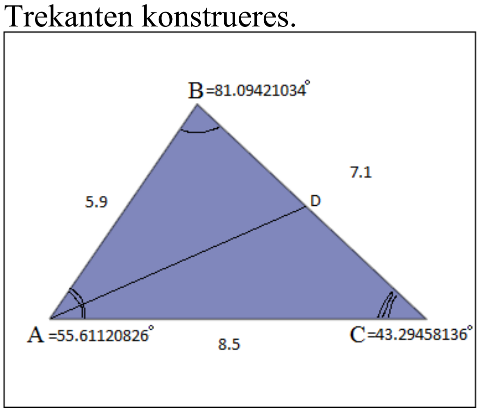
$$\angle(B) = 81.09421034 \qquad (7.1.2)$$

Vinkel A og B er $\underline{\underline{\angle A = 55.61120826^o \; og \; \angle B = 81.09421034^o}}$

Delopgave b

restart

Trekanten konstrueres.



Længden bestemmes. Først findes vinkel D.

$$\angle D = 180 - \frac{55.61120826}{2} - 43.29458136$$

$$\angle(D) = 108.8998145 \qquad (7.2.1)$$

Så anvendes sinusrelationerne.

$$\frac{Sin(A)}{a} = \frac{Sin(D)}{d} \Leftrightarrow a = \frac{Sin(A)\cdot d}{Sin(D)},$$

$$a = \frac{Sin(43.29458136)\cdot 8.5}{Sin(108.8998145)}$$

$$a = 6.161034439 \tag{7.2.2}$$

Så har man vinkelhalveringslinjen $\underline{\underline{a = 6.161034439}}$

Opgave 8 - Eksponentielle funktioner

restart

$with(Gym):$

$x_1 := 3 ;; x_2 := 6 ;; y_1 := 864 ;; y_2 := 1493 :$

Delopgave a

$a := \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$

$$\frac{1}{864}\, 1493^{1/3}\, 864^{2/3} \tag{8.1.1}$$

$b := \frac{y_1}{a^{x_1}}$

$$\frac{746496}{1493} \tag{8.1.2}$$

$f(x) = b \cdot a^x$

$$f(x) = \frac{746496}{1493} \left(\frac{1}{864}\, 1493^{1/3}\, 864^{2/3} \right)^x \tag{8.1.3}$$

Forskriften er så $\underline{\underline{f(x) = 500.00\ 1.2000^x}}$

Delopgave b

$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{1}{864}\, 1493^{1/3}\, 864^{2/3} \right)} \tag{8.2.1}$$

Fordoblingskonstanten er så $\underline{\underline{T_2 = 3.8018}}$

Opgave 9 - Rumgeometri

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a

Retningsvektorerne anvendes til bestemmelse af vinklerne mellem *l* og *m*.

$\vec{r}_l := \langle -3, 1, 2\rangle$:

$\vec{r}_m := \langle 3, 2, 5\rangle$:

$V = vinkel(\vec{r}_l, \vec{r}_m)$

$$V = 82.52656513 \tag{9.1.1}$$

Alternativt

$V = invCos\left(\frac{\vec{r}_l . \vec{r}_m}{len(\vec{r}_l) \cdot len(\vec{r}_m)}\right)$

$$V = 82.52656513 \tag{9.1.2}$$

Man får vinklen $\underline{\underline{V = 82.52656513^o}}$

Delopgave b

restart
with(*Gym*) :
Parameterfremstillingerne er

$l := \langle x, y, z\rangle = \langle 0, 1, 6\rangle + t \cdot \langle -3, 1, 2\rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\,t \\ 1 + t \\ 6 + 2\,t \end{bmatrix} \tag{9.2.1}$$

$m := \langle x, y, z\rangle = \langle 9, 1, 7\rangle + s \cdot \langle 3, 2, 5\rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 + 3\,s \\ 1 + 2\,s \\ 7 + 5\,s \end{bmatrix} \tag{9.2.2}$$

Man kan løse to ligninger med to ubekendte ELLER avende kommandoen nedenfor:

$solve(\{-3\,t = 9 + 3\,s, 1 + t = 1 + 2\,s\})$

$$\{s = -1, t = -2\} \tag{9.2.3}$$

Værdierne indsættes.

$\langle x, y, z\rangle = \langle 0, 1, 6\rangle + (-2) \cdot \langle -3, 1, 2\rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{9.2.4}$$

$\langle x, y, z\rangle = \langle 9, 1, 7\rangle + (-1) \cdot \langle 3, 2, 5\rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (9.2.5)$$

Koordinatsættet til $\underline{\underline{P = (6, -1, 2)}}$

Man KAN også løse den pr. håndkraft.

$-3\,t = 9 + 3\,s$

$$-3\,t = 9 + 3\,s \quad (9.2.6)$$

$1 + t = 1 + 2\,s$

$$1 + t = 1 + 2\,s \quad (9.2.7)$$

Isoler s

$-3\,t = 9 + 3\,s \Leftrightarrow -3\,t - 9 = 3\,s \Leftrightarrow s = -t - 3$

Indsæt det nu i (9.2.7).

$1 + t = 1 + 2\cdot(-t - 3) \Leftrightarrow 1 + t = 1 - 2\,t - 6 \Leftrightarrow 1 + t = -2\,t - 5 \Leftrightarrow t = -6 - 2\,t \Leftrightarrow 3\,t = -6 \Leftrightarrow t = -2$

Indsæt det tilbage i (9.2.6)

$-3\cdot(-2) = 9 + 3\,s \Leftrightarrow 6 = 9 + 3\,s \Leftrightarrow -3 = 3\,s \Leftrightarrow s = -1$

Hermed har man sine værdier.

$\{s = -1, t = -2\}$

$$\{s = -1, t = -2\} \quad (9.2.8)$$

Delopgave c

Planen kan bestemmes ved at krydse de to retningsvektorer.

$\vec{r}_l := \langle -3, 1, 2 \rangle :$

$\vec{r}_m := \langle 3, 2, 5 \rangle :$

$linalg[crossprod]\left(\vec{r}_l, \vec{r}_m\right)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 21 & -9 \end{bmatrix} \quad (9.3.1)$$

Man kan så efterfølgende vælge et punkt fra en af parameterfremstillingerne. Der vælges fra l.
Planens ligning er så

$\alpha := 1\,(x - 0) + 21\,(y - 1) - 9\,(z - 6) = 0$

$$x + 33 + 21\,y - 9\,z = 0 \quad (9.3.2)$$

Hermed er planen fundet, som udspændes af l og m, så planen er $\underline{\underline{\alpha = x + 33 + 21\,y - 9\,z = 0}}$

Opgave 10 - Eksponentielle modeller

restart

with(*Gym*) :

Delopgave a

$b = 10.4$, $r = 24.6$ %, $a = ?$

$a = 1 + \left(\frac{24.6}{100}\right)$

$$a = 1.246000000 \quad (10.1.1)$$

Så er forskriften

$f(x) := 10.4 \cdot 1.246^x$

$$x \rightarrow 10.4\ 1.246^x \quad (10.1.2)$$

$f(7)$

$$48.49083198 \quad (10.1.3)$$

Dvs. i år 2007 er vindenergien 48.49083 GW

Delopgave b

Man kan anvende formlen fra MAT C kapitel 3; $K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$, så er

$fsolve\left(94.1 = 10.4 \cdot (1 + r)^7\right)$

$$0.3697802425 \quad (10.2.1)$$

Ganges med 100%

$r\% = 0.3697802425 \cdot 100$

$$r\% = 36.97802425 \quad (10.2.2)$$

Så den årlige vækstrate er bestemt til 36.978 %

Opgave 11 - Funktioner

restart

with(*Gym*) :

Delopgave a

$f(x) := x^4 - 3\,x^2 - 4$

$$x \rightarrow x^4 - 3\,x^2 - 4 \quad (11.1.1)$$

Ligningen med punktet bestemmes. $P = (2, f(2))$.

$y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$

Tangenten er $y = 20\,x - 40$

Delopgave b

Den afledede og den dobbelte afledede kan forælle om grafens forløb.

$f'(x) = 0$

$$4\,x^3 - 6\,x = 0 \quad (11.2.1)$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[[x = 0], \left[x = \frac{1}{2}\sqrt{6}\right], \left[x = -\frac{1}{2}\sqrt{6}\right]\right] \quad (11.2.2)$$

$f''\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$

$$12 \quad (11.2.3)$$

$12 > 0$, *lokal* min.

$f''(0)$

$$-6 \quad (11.2.4)$$

$-6 < 0$, *lokal* max.

$f''\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)$

$$12 \quad (11.2.5)$$

$12 > 0$, *lokal* min.

f er:

$$\underline{\underline{\text{aftagende i intervallet } \left]-\infty; -\frac{1}{2}\sqrt{6}\right] \text{ og } \left[0; \frac{1}{2}\sqrt{6}\right] \text{ samt voksende i intevallet } \left[-\frac{1}{2}\sqrt{6}; 0\right] \text{ og } \left[\frac{1}{2}\sqrt{\right.}}}$$

Opgave 12 - Statistik

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a

Kvartilsættene aflæses.
Skole 1
$Start := 64$
$Nedre := 68$
$Median := 71$
$Øvre := 74$
$Top := 76$
Skole 2
$Start := 60$
$Nedre := 65$
$Median := 68$
$Øvre := 70$
$Top := 80$

Det ses, at 25 % eller mindre af eleverne i skole 1 vejer 68kg, hvor skole 2 viser en vægt på 65, så en anelse mindre. I skole 2 er medianen, dvs. 50% eller mindre af eleverne den samme vægt som eleverne på skole 1, der er det så 25% eller mindre. På skole 2 er 75% eller mindre har eleverne en vægt på 70kg eller mindre. Det tilsvarende for skole 1 er 74kg.

Generelt set, er skole 2 bredt fordelt, hvor skole 1 er mere koncenteret ift. vægtfordelingen.

Opgave 13 - Plangeometri

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a

Cirklen

$x^2 + 2x + y^2 - 6y = 15$

Linjen

$x - 2y + 2 = 0$

Koordinatsættet findes. Først isoler y i linjen.

$x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow -2y = -2 - x \Leftrightarrow y = \frac{-2 - x}{-2} \Leftrightarrow y = \frac{x}{2} + 1$

Indsættes i cirklen.

$x^2 + 2x + \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2 - 6 \cdot \left(\frac{x}{2} + 1\right) = 15$

$$x^2 - x + \left(1 + \frac{1}{2}x\right)^2 - 6 = 15 \tag{13.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 4], [x = -4]] \tag{13.1.2}$$

Indsættes i linjen.

$y = \frac{4}{2} + 1; y = \frac{-4}{2} + 1$

$$y = 3$$
$$y = -1 \tag{13.1.3}$$

Koordinatsættet er $\underline{\underline{P = (4, 3)\ og\ Q = (-4, -1)}}$

Delopgave b

Centrum anvendes.

$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 15 + 9 + 1$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25 \tag{13.2.1}$$

$C = (-1, 3)$

$$C = (-1, 3) \tag{13.2.2}$$

Man opstiller en vektor.

$\overrightarrow{QC} = \langle -1, 3\rangle - \langle -4, -1\rangle$

$$\overrightarrow{QC} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{13.2.3}$$

Linjens ligning med indhold:

$3(x + 4) + 4(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 12 + 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y + 16 = 0 \Leftrightarrow 4y = -3x - 16$

$\Leftrightarrow y = \frac{-3x - 16}{4} \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}x - 4$

Så linjen for tangenten til cirklen i det mindste punkt er $\underline{\underline{y = -\frac{3}{4}x - 4}}$

Opgave 14 - Integralregning

$restart$
$with(Gym):$

Delopgave a

$f(x) := x^2 - k \cdot x:; g(x) := k \cdot x:$

$f(x) = g(x)$

$$-k\,x + x^2 = k\,x \tag{14.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 0], [x = 2\,k]] \tag{14.1.2}$$

Arealet kendes.

$36 = \int_0^{2k} g(x) - f(x) \, \mathrm{d}x$

$$36 = \frac{4}{3}\,k^3 \tag{14.1.3}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$3. \tag{14.1.4}$$

Her er $k > 0$, så $\underline{\underline{k = 3}}$

Opgave 15 - Optimering

$restart$
$with(Gym):$

Delopgave a

$V = l \cdot b \cdot h,$
Her er
$l = 5\,b$
$b = b$
$h = h$
Så er
$V = 5 \cdot b \cdot b \cdot h$

$$V = 5\,b^2\,h \tag{15.1.1}$$

Der indsættes 40 i V, så h isoleres.

$40 = \frac{5 \cdot b \cdot b \cdot h}{2}$

$$40 = \frac{5}{2}\,b^2\,h \tag{15.1.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for h}}$

$$\left[\left[h = \frac{16}{b^2}\right]\right] \tag{15.1.3}$$

Arealet af et rektangel er $A = l \cdot b$. Arealet af en trekant er $A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$. Det er en god idé at finde hypotenusen i den retvinklede trekant.

$hyp := \sqrt{b^2 + h^2}$:
Man har så

$A = 5\,b \cdot hyp$

$$A = 5\,b\,\sqrt{b^2 + h^2} \qquad \textbf{(15.1.4)}$$

Arealet for hele drivhuset er
$A = A_{rektangel} + 2 \cdot A_{trekant}$,
Her er $h = \dfrac{16}{b^2}$
Så er

$A(b) := 5\,b\,\sqrt{b^2 + \left(\dfrac{16}{b^2}\right)^2} + 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{16}{b^2}\right) \cdot b\right)$

$$b \rightarrow 5\,b\,\sqrt{b^2 + \frac{256}{b^4}} + \frac{16\,b}{b^2} \qquad \textbf{(15.1.5)}$$

Hermed er funktionen bestemt. Man har $\underline{\underline{A(b) = 5\,b\,\sqrt{b^2 + \frac{256}{b^4}} + \frac{16\,b}{b^2}}}$

Opgave 16 - Differentialligninger

restart
$with(Gym)$:

Delopgave a

$g'(t) = 675000 \cdot t \cdot \mathrm{e}^{-3 \cdot t}$

$$\mathrm{D}(g)(t) = 675000\,t\,\mathrm{e}^{-3\,t} \qquad \textbf{(16.1.1)}$$

Man anvender integrale.
$g(t) = -75000\,(3 \cdot t + 1)\,\mathrm{e}^{-3\,t} + k$

$$g(t) = -75000\,(3\,t + 1)\,\mathrm{e}^{-3\,t} + k \qquad \textbf{(16.1.2)}$$

Man indsætter punktet
$0 = -75000\,(3 \cdot 0 + 1)\,\mathrm{e}^{-3 \cdot 0} + k$

$$0 = -75000 + k \qquad \textbf{(16.1.3)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for k}}$

$$[[k = 75000]] \qquad \textbf{(16.1.4)}$$

Så har man
$g(t) := -75000\,(3\,t + 1)\,\mathrm{e}^{-3\,t} + 75000$:
$g(4)$

$$-975000\,\mathrm{e}^{-12} + 75000 \qquad \textbf{(16.1.5)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$74994. \qquad \textbf{(16.1.6)}$$

Der er absoberet $\underline{\underline{74994\ mg}}$.

Opgave 17 - Differentialligninger

restart

with(Gym) :

Delopgave a

$$\frac{dM}{dx} = 0.000369 \cdot M \cdot (15.50 - M)$$

$$\frac{dM}{dx} = 0.000369\, M\, (15.50 - M) \qquad \textbf{(17.1.1)}$$

$$M(x) = \frac{15.50}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{-0.000369 \cdot 15.50 \cdot x}}$$

$$M(x) = \frac{15.50}{1 + c\, \mathrm{e}^{-0.00571950\, x}} \qquad \textbf{(17.1.2)}$$

Indsæt oplysningerne.

$$13.1 = \frac{15.50}{1 + c \cdot \mathrm{e}^{-0.000369 \cdot 15.50 \cdot 400}}$$

$$13.1 = \frac{15.50}{1 + 0.1014894933\, c} \qquad \textbf{(17.1.3)}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for c}}$$

$$[[c = 1.805173136]] \qquad \textbf{(17.1.4)}$$

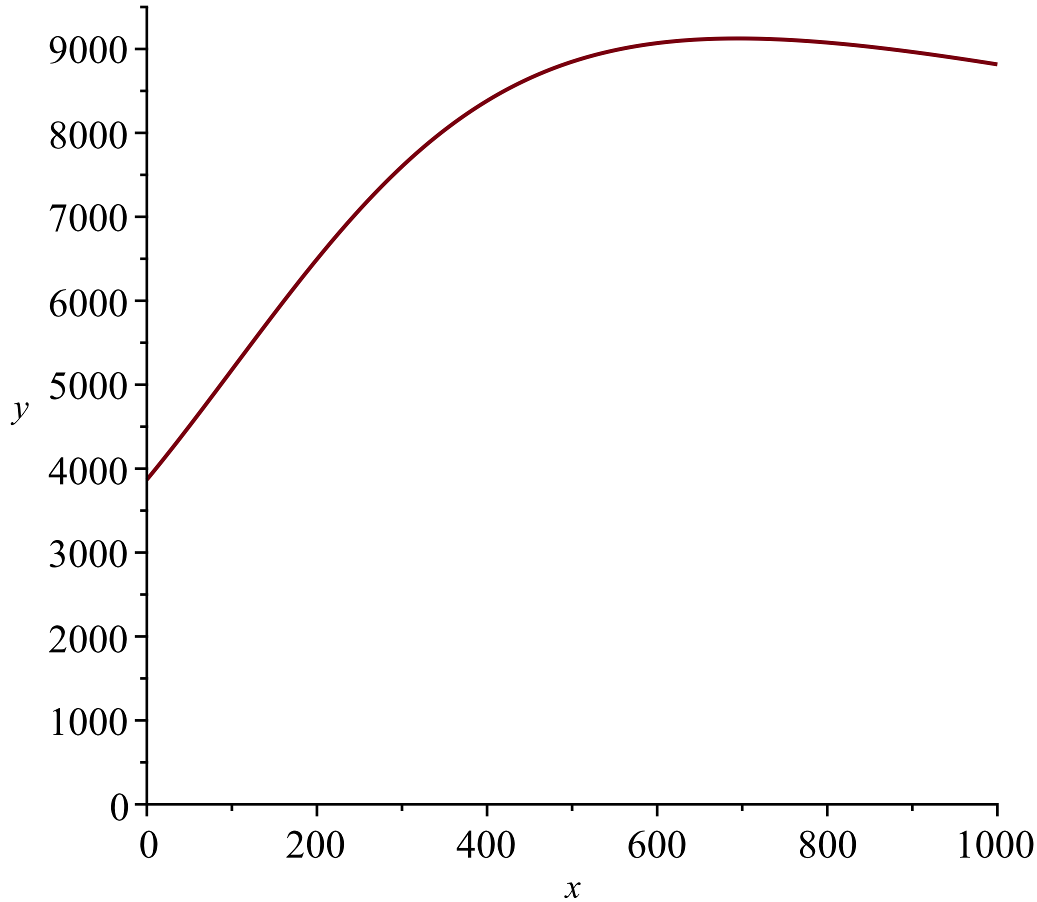
Forskiften er $\underline{\underline{M(x) := \dfrac{15.50}{1 + 1.805173136 \cdot \mathrm{e}^{-0.000369 \cdot 15.50 \cdot x}}}}$

Delopgave b

$$f(x) := M(x) \cdot 700 - 1.97\, x$$

$$x \rightarrow 700\, M(x) + (-1) \cdot 1.97\, x \qquad \textbf{(17.2.1)}$$

plot$([f(x)], x = 0..1000, y = 0..9500, legend = [f(x)])$



$$\frac{10850.00}{1 + 1.805173136\,e^{-0.00571950\,x}} - 1.97\,x$$

$fsolve(f'(x) = 0)$

$$694.8024921 \tag{17.2.2}$$

$f''(694.8024921)$

$$-0.01052776452 \tag{17.2.3}$$

Her er $-0.01052776452 < 0$, så man har det maksimale i $\underline{\underline{x = 694.8024921\ kg}}$