Matematik B
7. december 2016
Delprøve 1

Opgave 1

Vi ser på den angivende model fra opgaven. Vi kan allerede aflæse, at der er tale om en lineær funktion, defineret fra år 2006 til og med 2015.

Tallet a=1631 fortæller, at for hvert år der går (fra år 2006) steg antallet af indbyggere med 1631 tusinde mennesker. Tallet b=191942 fortæller, at i år 2006 registrerede man 191942 tusinde indbyggere i den bestemte by.

Opgave 2

Vi bestemmer diskriminanten vha. den velkendte formel, som alle 2.g'ere og 3.g'ere burde kunne.
$d=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-5)=16+20=36,\ d>0$
Derfra regner vi x :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{36}}{2\cdot1}=\begin{cases}5\\-1\end{cases}$$

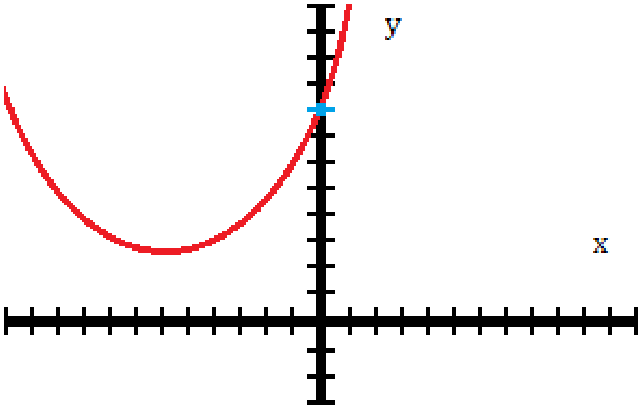
Dermed er løsningerne:
$x=-1 \vee x=5$

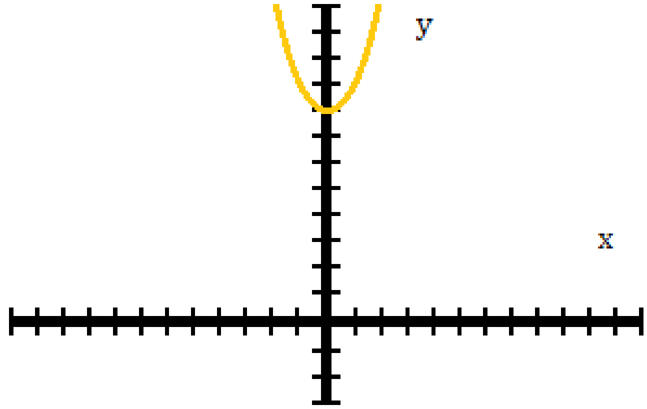
Opgave 3

Her indsætter man blot 3 på x’s plads og da fås:
$f(3)=2^3-3\cdot3=8-9=-1$
Hvilket er det ønskede.

Opgave 4

Der kan tegnes et hav af andengradspolynomier, så nedenfor ses to eksempler ud fra de krav, der blev stillet...



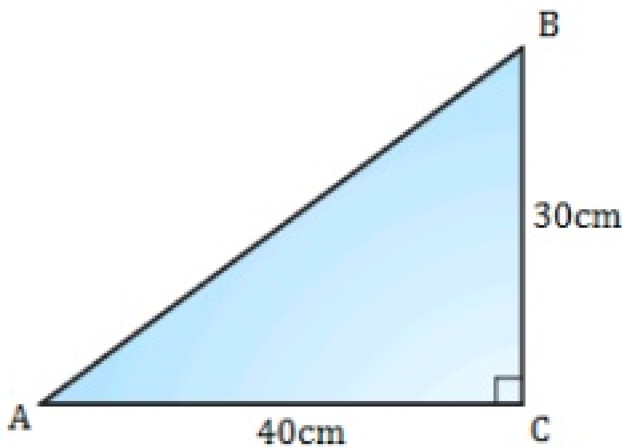


NB: Graferne er lavet i Paint.

Fælles for begge funktioner er, at de opfylder betingelserne om:
1) At c-værdien er 8
2) At diskriminanten d er mindre end 0

Opgave 5

Denne figur kan splittes op, således man arbejder med én trekant ud af de ”fire” man kan se i parallelogrammet. Trekanten er:



Man kan nemt bestemme c vha. Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$. Med tallene indsat er:

$30^2 + 40^2 = c^2 \Leftrightarrow c = \sqrt{30^2 + 40^2} = \sqrt{2500} = 50\ cm$

Omkredsen af parallelogrammet er $4 \cdot 50 = 200\ cm$

Arealet bestemmes:

$A = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 \right) = 4 \cdot 600 = 2400$

Dermed er arealet $2400\ cm^2$.

Opgave 6

Stamfunktionen til $f(x)$ findes vha. at tage integralet af $f(x)$ så man får $F(x)$. Dvs.:

$F(x) = \int (4x^3 - 6x)\, dx = x^4 - 3x^2 + k$

Vi udnytter punktet så vi kan få k. Ligningen er:

$3 = 1^4 - 3 \cdot 1^2 + k \Leftrightarrow k = 5$

Dvs.:

$F(x) = x^4 - 3x^2 + 5$

Er den ønskede stamfunktion.

Matematik B
7. december 2016
Delprøve 2

Opgave 7

restart

with(*Gym*) :

Vi skal lave potensregression ud fra vores datamateriale. Vi udfører det nedenfor. Oplysningerne defineres.

$L1 := [0.005, 0.024, 0.098, 0.280, 11.8, 33.5, 85.7]$:

$L2 := [28.1, 75.2, 181, 350, 3653, 7026, 13400]$:

Delopgave a

Vi anvender ovenstående definitioner og benytter os af potensregression. Kommandoen anvendes:

$f(x) := PowReg(L1, L2, x)$:

$f(x)$

$$784.751120566926\, x^{0.629893125583095} \tag{7.1.1}$$

Dvs. tallet $a := 0.629893125583095$: og $b := 784.751120566926$: de ønskede konstanter.

Delopgave b

Der er oplyst $r_x = 40\ \%$ og derfra mangler vi r_y. Dette findes vha. formlen: $F_y = F_x^a$, dvs.

$solve\left((1 + r_y) = (1 + 0.4)^a, r_y\right) \cdot 100$

$$23.60756330 \tag{7.2.1}$$

Altså når vægten øges med 40% så øges iltforbruget med 23.6075%

Opgave 8

restart

with(*Gym*) :

Delopgave a

Inden a bestemmes, så bestemmes vinkel ∠B. Da er:

$\angle B = 180 - \angle A - \angle C = 180 - 57 - 20 = 103$

Dermed kan man anvende sinusrelationerne til at bestemme a. (Formlerne burde stå i din formelsamling). Da er:

$\frac{Sin(57)}{a} = \frac{Sin(103)}{18}$

$$\frac{0.8386705681}{a} = 0.05413167027 \tag{8.1.1}$$

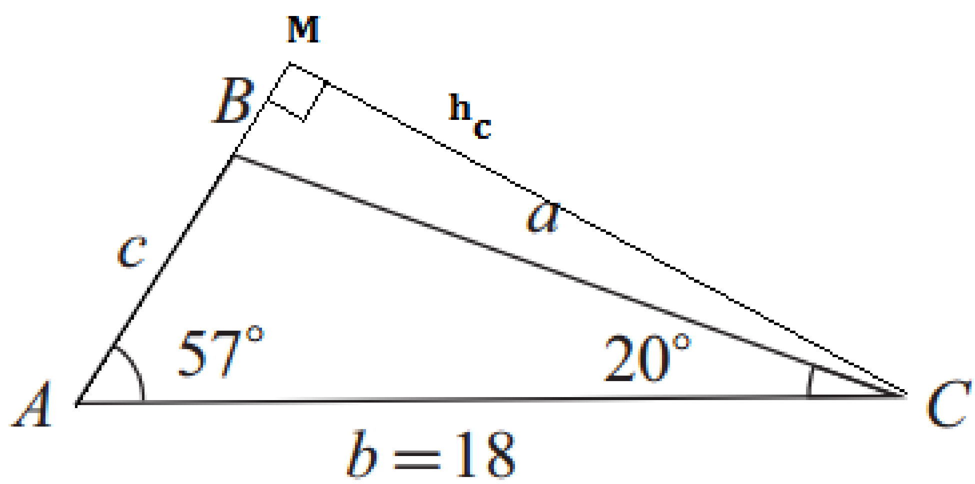
$\xrightarrow{\text{solve for a}}$

$$[[a = 15.49315888]] \quad \textbf{(8.1.2)}$$

Hermed er længden a fundet.

Delopgave b

Det bedste råd er altid at tegne en skitse over problemet (med h_c), det gør altid livet lettere. Vi tegner skitsen.



Da vi kender vinkel b fra spørgsmål a, er det en smal sag at finde vinkel B i trekanten BMC.

$\angle B_{BMC} = 180 - \angle B = 180 - 103 = 77$

$\angle M = 90$

$a = 15.49315888$

Har vi præcis tre oplysninger til at bestemme h_c. Vi bruger formlen:

$h_c = a \cdot \sin(B_{BMC})$ og vi indsætter tallene og får:

$h_c = 15.49315888 \cdot Sin(77)$

$$h_c = 15.09607022 \quad \textbf{(8.2.1)}$$

Dermed fandt vi den ønskede højde.

Opgave 9

restart

with(*Gym*) :

Oplysningerne defineres.

$C(m) := 10^{0.78478 \cdot \left(\log_{10}\left(\frac{m}{173.961}\right)\right)^2}$:

NB: Intervallet dækker $50 < m < 250$

Delopgave a

Her indsættes $m = 62$ i $C(m)$, så da er:

$C(62)$

$$1.437311243 \quad \textbf{(9.1.1)}$$

Dvs. for en vægtløfter på 62 *kg* er Sinclair-koefficienten ca. 1.43731

Delopgave b

Her løses ligningen $C(m) = 1.2$.

$C(m) = 1.2$

$$10^{\frac{0.78478 \ln(0.005748414875\, m)^2}{\ln(10)^2}} = 1.2 \tag{9.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for m}}$

$$[[m = 83.71637632], [m = 361.4875709]] \tag{9.2.2}$$

Vi husker intervallet $50 < m < 250$ så løsningen er:

$m = 83.716$

Dvs. at vægtløfteren må veje 83.716 *kg* når Sinclair-koefficienten er på 1.2.

Opgave 10

restart

with(*Gym*) :

Delopgave a

Det ses, at værdien a er ukendt og at man har $\Delta x = 5$ og $\Delta y = 1.4$, da er:

$a = \frac{1.4}{5}$

$$a = 0.2800000000 \tag{10.1.1}$$

Så den årlige gennemsnitlige stigning i kvindernes vægt er 0.28 *kg*.

Delopgave b

$f(x) := 0.28 \cdot x :$

(Faktisk er dette en ligefrem proportional funktion $f(x) = ax$).

$f(x) = 4$

$$0.28\, x = 4 \tag{10.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 14.28571429]] \tag{10.2.2}$$

Efter 14.28 *år* vil vægten af kvinderne være steget med 4 *kg*.

Opgave 11

restart

with(*Gym*) :

Oplysningerne defineres.

Delopgave a

Nulhypotensen er:

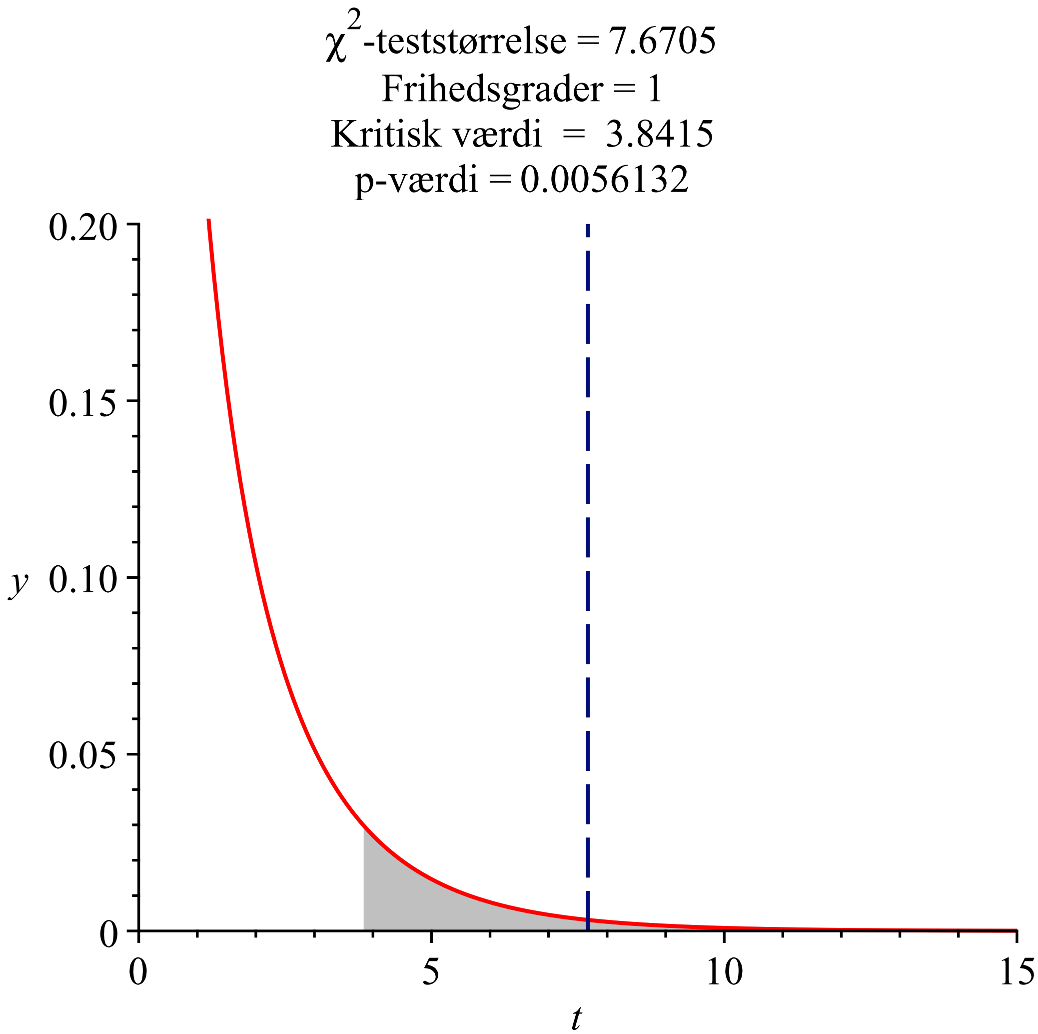
H_0 = "Blandt marmeladefirmaets kunder er der ikke forskel på, hvilken af firmaets to marmeladetyper mænd og kvinder foretrækker. "

Vi anvender chi-anden-test. (U-test). Vi definerer oplysningerne i en matrix.

$obs := \langle\langle 125, 100 | 35, 10\rangle\rangle$

$$\begin{bmatrix} 125 & 35 \\ 100 & 10 \end{bmatrix} \quad (11.1.1)$$

Dernæst anvender vi U-testen med et 5% signifikansniveau.
ChiKvadratUtest(*obs*, *level* = 0.05)



På baggrund af vores chi-anden-test, kan vi se, at vores p-værdi: $p = 5.613\ \%$ hvilket er over vores sats på 5%, dermed må vi altså forkaste nulhypotesen.

Delopgave b

Da vi har fået vores teststørrelse på 7.67045. Vi kan prøve at finde "sønderen" bag, at vi måtte forkaste vores hypotese. Vi anvender da kommandoen "bidrag" i Gym-pakken.
bidrag(*obs*)

$$\begin{bmatrix} 0.5208333293 & 2.604166664 \\ 0.7575757570 & 3.787878786 \end{bmatrix} \quad (11.2.1)$$

Dvs. det må altså være "kvinde type 2" der går ind og påvirker testen. Dvs. dette er faktisk det sted, der giver det største biddrag til testen.

Opgave 12

restart

$with(Gym)$:
Oplysningerne defineres.
$f(x) := -x^3 + 3x^2 + 10x$:

Delopgave a

Vi skal bestemme den afledede funktion samt tangenten. Funktionen er defineret. Vi finder nemt den afledede ved at skrive:
$f'(x)$

$$-3x^2 + 6x + 10 \tag{12.1.1}$$

Vi bestemmer dernæst tangentligningen. Tangentligningen burde være kendt af de fleste, ellers burde man læse op på det. Vi kender punktet $P(2, f(2))$, så det er en smal sag at bestemme de tilhørerende y-koordinater.
$f(2)$

$$24 \tag{12.1.2}$$

$f'(2)$

$$10 \tag{12.1.3}$$

Da indsættes oplysningerne i tangentligningen:
$y = 10 \cdot (x - 2) + 24$

$$y = 10x + 4 \tag{12.1.4}$$

Hermed blev tangentligningen fundet.

Delopgave b

Vi skal bestemme monotoniforholdene for funktionen. Vi løser den afledede lig med 0. Dvs.:
$f'(x) = 0$

$$-3x^2 + 6x + 10 = 0 \tag{12.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{39}\right], \left[x = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{39}\right]\right] \tag{12.2.2}$$

$evalf[5](\%)$

$$[[x = -1.0816], [x = 3.0816]] \tag{12.2.3}$$

De fleste vil nok begynde at tegne en monotonilinje, men dette gøres ikke her. Vi vælger nogle tal-værdier der ikke er nulpunkterne for den afledede. Vi vælger følgende:
$-2, 0, 4$
Dvs.:
$f'(-2)$

$$-14 \tag{12.2.4}$$

$f'(0)$

$$10 \tag{12.2.5}$$

$f'(4)$

$$-14 \tag{12.2.6}$$

Vi kan dermed konkludere, at:
funktionen er aftagende i intervallet]-∞;-1.08167] og voksende i intervallet [-1.08167;3.08167] samt aftagende igen i [3.08167;∞[

Andre gymnasier bruger den dobbelte afledede for at bestemme ovenstående. Vi vil gerne bestemme om hvilken der er maksimum og minimum. Vi benytter os af den dobbelte afledede (med nulpunkterne fra $f'(x)$ indsat):

$f''(-1.0816)$

$$12.4896 \quad \textbf{(12.2.7)}$$

$f''(3.0816)$

$$-12.4896 \quad \textbf{(12.2.8)}$$

Da er 12.49 større end 0 og dermed er der lokalt minimum i x=-1.08167 og da -12.49 er mindre end 0 er der lokalt maksimum og altså er x=3.08167 et lokalt maksimum. Dvs. konklusionen er: *funktionen er aftagende i intervallet]-∞;-1.08167] og voksende i intervallet [-1.08167;3.08167] samt aftagende igen i [3.08167;∞[*

Delopgave c

Vi regner det bestemte integral:

$M = \int_0^5 f(x)\, dx$

$$M = \frac{375}{4} \quad \textbf{(12.3.1)}$$

$evalf[5](\%)$

$$M = 93.750 \quad \textbf{(12.3.2)}$$

Konklusionen er, at vi har bestemt integralet i første kvadrant i intervallet fra x=0 til x=5 dvs. værdien af arealet er positiv og derved er der tale om positiv fortegnsvariation i dette interval.

Opgave 13

restart
with(Gym) :

Delopgave a

Der er tale om en eksponentiel funktion. Vi får at $b = 1024$ til $t = 0$. Vi får også fordoblingkonstanten $T_2 = 4$. Vi skal blot finde a. Vi udnytter formlen:

$a = \sqrt[T_2]{2}$, dvs.

$a = \sqrt[4]{2} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} a = 1.1892$

Dvs. forskriften er:

$N(t) := 1024 \cdot 1.1892^t$:

Vi bestemmer N(4).

$N(4)$

$$2047.950988 \quad \textbf{(13.1.1)}$$

Dvs. efter 4 år er antallet af dyr i en bestemt population fordoblet.

Væksthastigheden findes ved at tage den afledede af funktionen.

$N'(t)$

$$177.4395516\ 1.1892^t \quad \textbf{(13.1.2)}$$

Vi indsætter $t = 4$ i $N'(t)$ (ovenfor):

$N'(4)$

$$354.8706104 \quad \textbf{(13.1.3)}$$

Dvs. efter 4 *år*, er væksthastigheden 355 dyr om året.