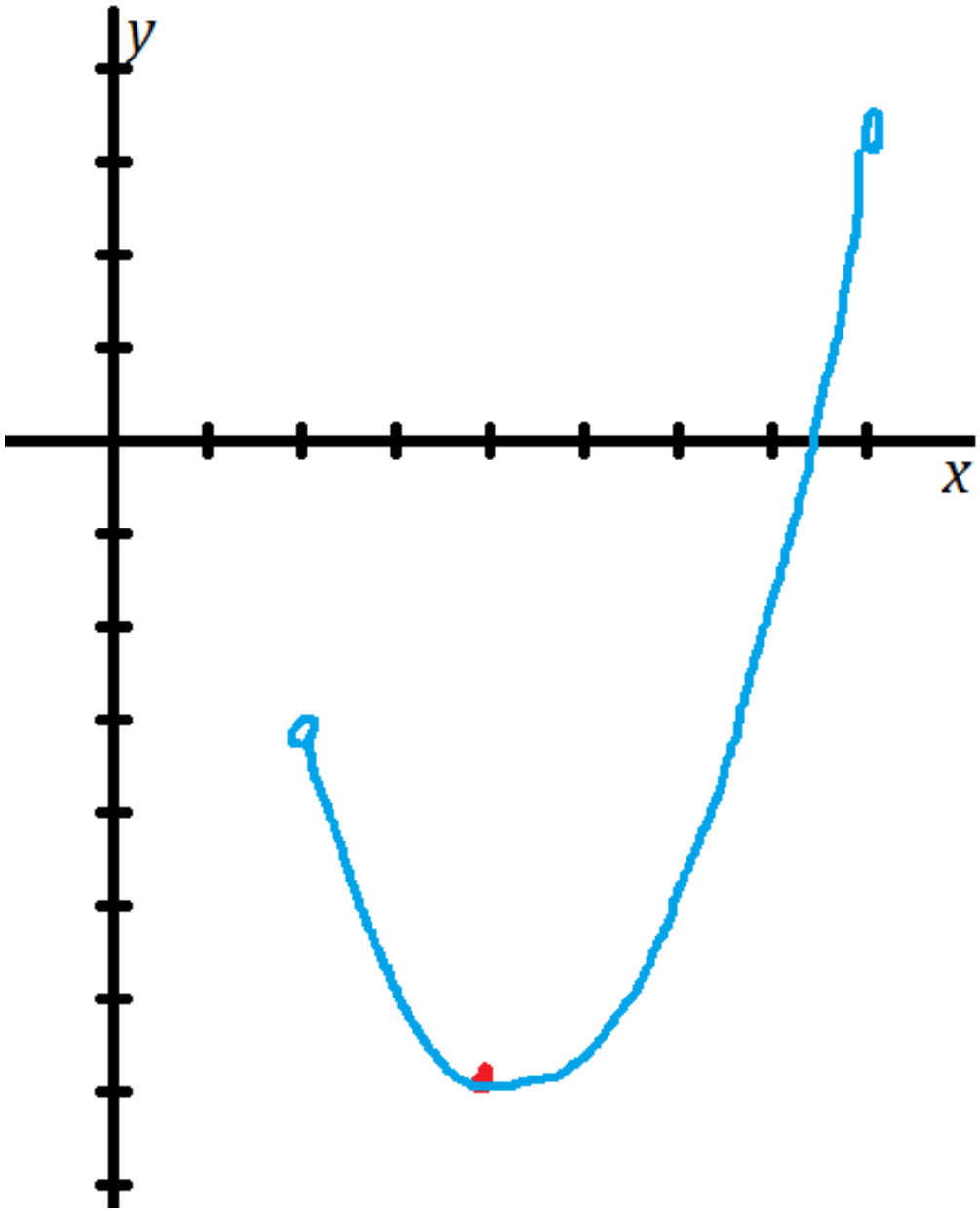
Matematik B HHX 23. maj 2014
Vejledende løsning
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1:

De tre krav er:
1) $Dm(f) =]2; 8[$
2) Et nulpunkt
3) Globalt minimum i $P(4, -7)$. Grafen kan se sådan ud:



Opgave 2:

Givet funktionen $f(x) = x^4 - 4x^2 + 7x - 19$
Vi bestemmer den afledede funktion.
$f'(x) = 4 \cdot x^{4-1} - 2 \cdot 4 \cdot x^{2-1} + 1 \cdot 7 \cdot x^{1-1} - 0 = 4x^3 - 8x + 7$
Vi brugte definitionen om, at en konstant differentieret er 0 og reglen
$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$.

Opgave 3:

Vi aflæser grafen og ser, at medianen er ca. 225 hvilket betyder, at
ca. halvdelen af indkomsterne for bornholmerne er ca. 225000 *kr* eller mindre.

Opgave 4:

Givet ligningen $x \cdot (4x^2 - 16) = 0$ vi indsætter $x = -2$ for at se, om denne er løsningen.
$-2 \cdot (4 \cdot (-2)^2 - 16) = 0$
$\Leftrightarrow -2 \cdot (16 - 16) = 0$
$\Leftrightarrow -2 \cdot 0 = 0$
$\Leftrightarrow 0 = 0$
Dermed er $x = -2$ løsning til ligningen.

Opgave 5:

Vi bestemmer en forskrift for efterspørgslen.
$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{25000 - 30000}{150 - 100} = -\frac{5000}{50} = -\frac{500}{5} = -100$
$b = y_1 - ax_1 = 30000 - (-100) \cdot 100 = 40000$

Så forskriften for efterspørgslen er:
$D(x) = -100x + 40000$

Vi indsætter $x = 75$.
$D(75) = -100 \cdot 75 + 40000 = 32500$
Efterspørgslen for en vare vil være $D = 32500$ stykker, hvis prisen er 75 *kr*.

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Opgave 6:

restart :
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Givet ligningen $4 \cdot a \cdot x^{-2} = 1$

Vi indsætter $x = 2 \cdot \sqrt{a}$ og undersøger, om denne værdi løser ligningen.

$$4\cdot a\cdot\left(2\cdot\sqrt{a}\right)^{-2}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{4\cdot a\cdot\left(2\cdot\sqrt{a}\right)^{-2}}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{4\cdot a\cdot\frac{1}{4\cdot a}}=1 \Leftrightarrow 1=1$$

I Maple kunne man også bare skrive det hele ind:

$4\cdot a\cdot\left(2\cdot\sqrt{a}\right)^{-2}=1$

$$1=1 \qquad \textbf{(6.1.1)}$$

Delopgave b)

Vi bruger ikke bilaget.

$x\cdot e^{x}=10\cdot x$	Ligningerne er skrevet op.
$x\cdot e^{x}-10\cdot x=0$	Vi har trukket $-10\cdot x$ fra på begge sider.
$x\cdot\left(e^{x}-10\right)=0$	Vi har faktoriseret x ud for en parentes.
$x=0 \vee x=e^{x}-10=0$	Nulreglen blev anvendt.
$x=0 \vee x=2.30$	Vi løser ligningen $e^{x}-10=0$ og får $x=2.30$*

*Vi viser nu hvordan ligningen løses.

$e^{x}-10=0 \Leftrightarrow e^{x}=10 \Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right)=\ln(10) \Leftrightarrow x=\ln(10) \approx 2.30$

Opgave 7:

restart :

with(*Gym*) :

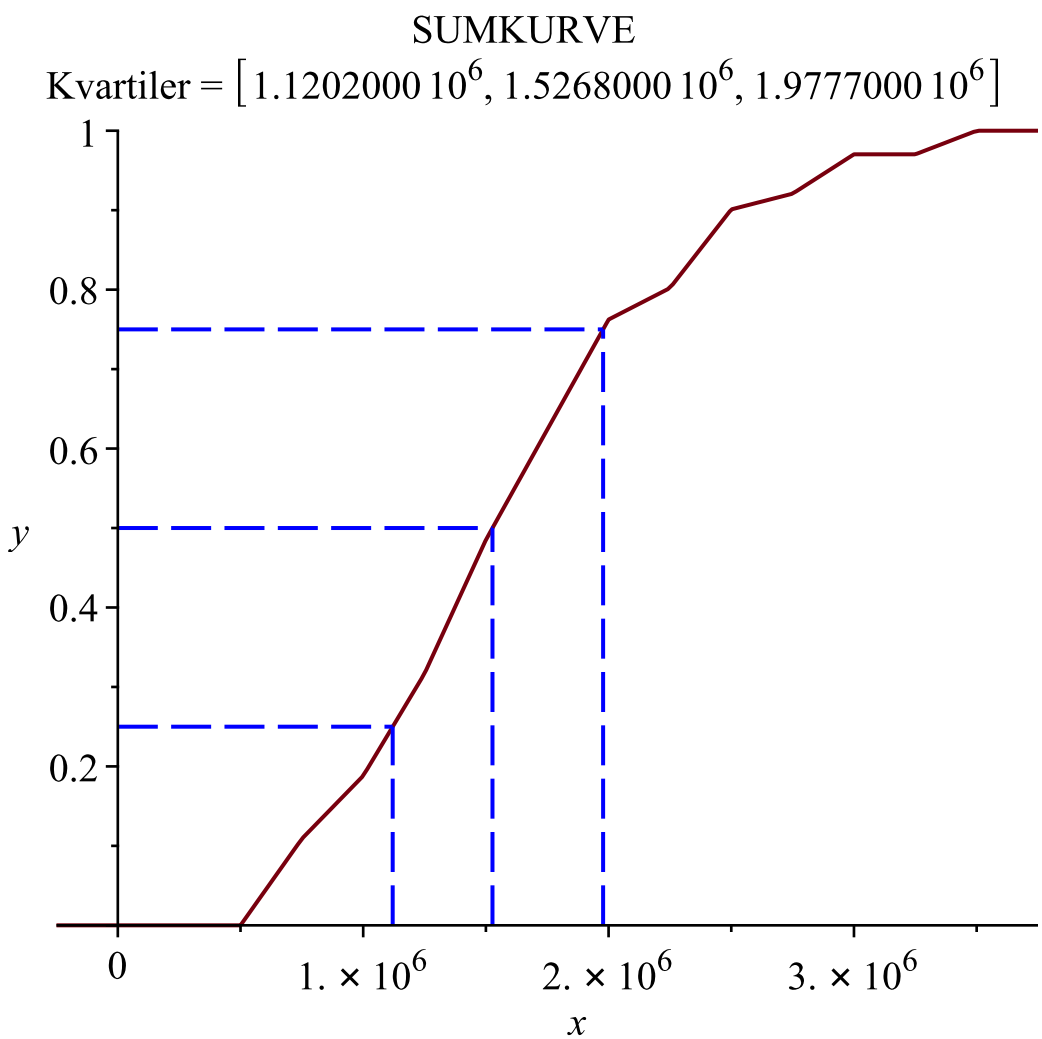
For regression har vi:

obs := ⟨⟨0 ..250000, 250000 ..500000, 500000 ..750000, 750000 ..1000000, 1000000 ..1250000, 1250000 ..1500000, 1500000 ..1750000, 1750000 ..2000000, 2000000 ..2250000, 2250000 ..2500000, 2500000 ..2750000, 2750000 ..3000000, 3000000 ..3250000, 3250000 ..3500000|0, 0, 11, 8, 13, 17, 14, 14, 4, 10, 2, 5, 0, 3⟩⟩ :

Delopgave a)

Vi tegner en sumkurve over fordelingen.

plotSumkurve(*obs*)



Her ses der en grafisk tegning af vores observationer. Dette er en sumkurve.

Delopgave b)

Vi bestemmer kvartilerne.

kvartiler(*obs*)

$$[1.1202\ 10^6, 1.5268\ 10^6, 1.9777\ 10^6] \tag{7.2.1}$$

Så nedre kvartil aflæses til at være: 1 120 200 *kr*
Medianen aflæses til at være: 1 526 810 *kr*
Øvre kvartil aflæses til at være: 1 977 710 *kr*.

Delopgave c)

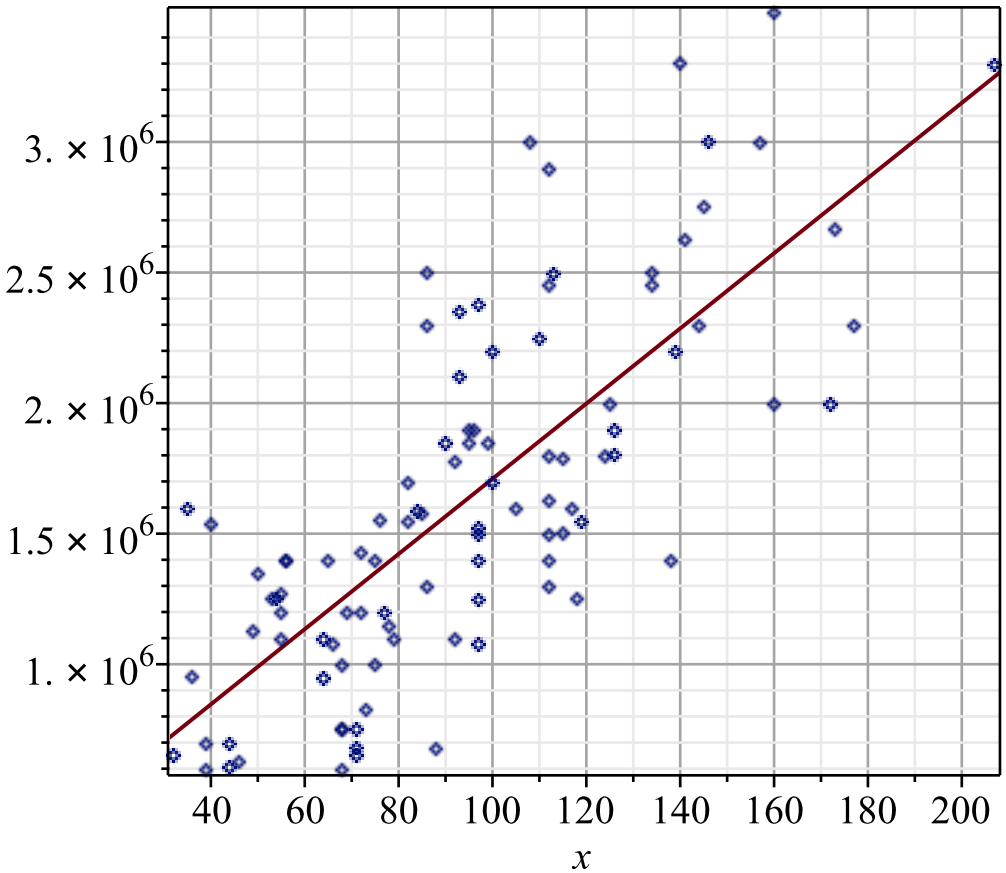
Nedenstående lineære regression er blevet lavet i Maple. Grunden til, at man ikke kan se de tal *L1* og *L2* er, at det fyldte hele dokumentet. Skribenten har ikke lyst til at lave om på det. Det skribenten gjorde var, at kopiere rækkerne *L1* som var størrelse i Excel arket og *L2* som var udbudspris ind i Maple. Det fyldte meget, og derfra kunne man lave lineær regression.

LinReg(*L1*, *L2*)

Lineær regression

$y = 14395.\,x + 2.7051\ 10^5.$

Forklaringsgrad $R^2 = 0.567739697631016$



Dermed har vi fået angivet en forskrift. Forklaringsgraden er meget lav. Så der er en sammenhæng mellem husets størrelse og prisen.

Delopgave d)

Ud fra medianen kan man fortælle, at prisen for et fritidshus ligger på cirka 1 526 810 *kr*, på ovenstående plot kan man se, at udbudsprisen og størrelsen af husene er meget fordelt alt efter størrelse og pris. Den lineære forskrift giver den enkelte en idé på, at jo større huset er, desto mere skal man betale.

Opgave 8:

restart :
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Vi har ydelsen $y = 1173$ *kr* og renten på 0.0208 og antal terminer er 60 måneder.
Vi bestemmer renten i 1. termin:
$40000 \cdot 0.0208$

$$832.0000 \tag{8.1.1}$$

Renten Camilla betaler er 832 *kr* i første termin.

Afdraget bestemmes. *ydelse* - *rente*, dvs.
$1173 - 832$

$$341 \tag{8.1.2}$$

Så hendes afdrag er 341 *kr* i første termin.

Vi bestemmer restgælden hun skal betale efter 2. termin. Formlen er:
$S_n = K_n - A_n$, så

$K_2 = 40000 \cdot (1 + 0.0208)^2$

$$K_2 = 41681.30560 \tag{8.1.3}$$

$A_2 = 1173 \cdot \frac{(1 + 0.0208)^2 - 1}{0.0208}$

$$A_2 = 2370.398400 \tag{8.1.4}$$

Så:
$S_2 = 41681.30560 - 2370.398400$

$$S_2 = 39310.90720 \tag{8.1.5}$$

Så Camilla skal betale 39310.90720 i restgælden.

Opgave 9:

restart :
with(*Gym*) :
$R(x) := -x^2 + 30 \cdot x$:
$C(x) := 0.04 \cdot x^3 - 1.2 \cdot x^2 + 20 \cdot x + 50$:
Begge funktioner ligger i intervallet $0 \le x \le 30$.

Delopgave a)

Vi har fået angivet, at *overskud* = *omsætning* − *omkostninger*, dvs.
$P(x) := R(x) - C(x)$:
$P(x)$

$$0.2\,x^2 + 10\,x - 0.04\,x^3 - 50 \tag{9.1.1}$$

Dermed har vi fået vores forskrift for overskuddet. Maple har valgt at skrive den i en anden rækkefølge, men med de rigtige fortegn, så passer pengene.
Vi indsætter nu $x = 12$ i $P(x)$.
$P(12)$

$$29.68 \tag{9.1.2}$$

Så der er et overskud på 29.68 mio, ved afsætning af 12 ton.

Delopgave b)

Her skal man bestemme maksimum, dvs. funktionen $P(x)$ differentieres.
$P'(x) = 0$

$$0.4\,x + 10 - 0.12\,x^2 = 0 \tag{9.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = -7.612940605], [x = 10.94627394]] \tag{9.2.2}$$

Vi husker at x ligger i intervallet $0 \le x \le 30$, så $x = 10.94$ skal give den maksimale overskud. Vi

tjekker vha. den dobbelte afledede.
$P''(10.94)$

$$-2.2256 \tag{9.2.3}$$

Da tallets værdi er negativt, har vi et maksimum.
Så $x = 10.94$ giver den maksimale afsætning på
$P(10.94)$

$$30.9631766 \tag{9.2.4}$$

Ca. 30.96 mio. kr.

Opgave 10:

restart :
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Skemaet ser sådan ud:

Obs.	Hovedstad	Nordjylland	Sjælland	Total
Ja	323	105	631	1059
Nej	110	19	302	431
Total	433	124	933	1490

Vi laver en statistisk test.
$obs := \langle\langle 323, 110 | 105, 19 | 631, 302\rangle\rangle$

$$\begin{bmatrix} 323 & 105 & 631 \\ 110 & 19 & 302 \end{bmatrix} \tag{10.1.1}$$

forventet(*obs*)

$$\begin{bmatrix} 307.75 & 88.132 & 663.12 \\ 125.25 & 35.868 & 269.88 \end{bmatrix} \tag{10.1.2}$$

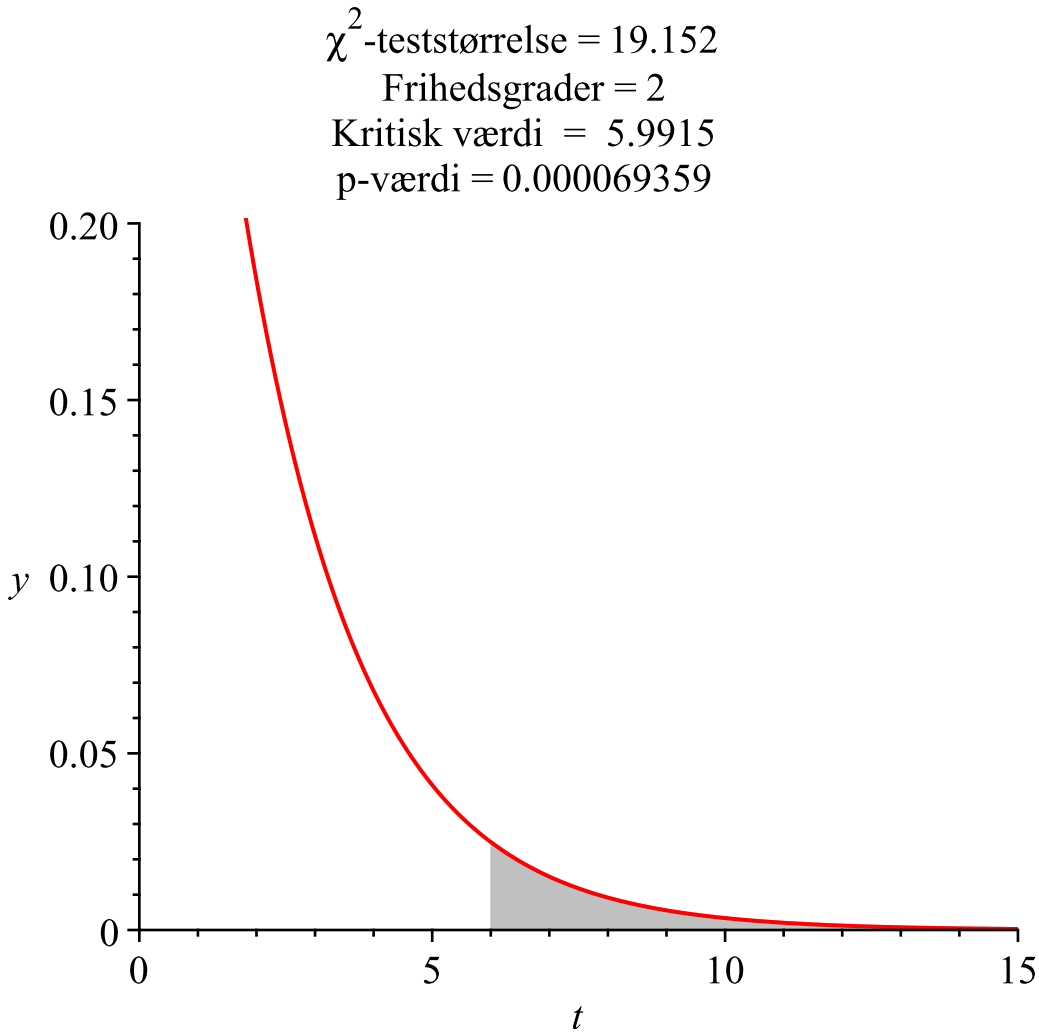
De forventede værdier indtastes i nedenstående skema.

Obs.	Hovedstad	Nordjylland	Sjælland	Total
Ja	307.75	88.132	663.12	1059
Nej	125.25	35.868	269.88	431
Total	433	124	933	1490

Delopgave b)

Vores nulhypotese er, at der er ingen sammenhæng mellem brugernes svar på spørgsmålet og den landsdel de kommer fra.

Vi laver en U-test med et signifikansniveau på 5%, så:
ChiKvadratUtest(*obs*, *level* = 0.05)



Vores teststørrelse er over den kritiske værdi, så derfor forkastes nulhypotesen. Der er sammenhæng mellem brugernes svar og landsdelene de enkelte kommer fra.

Opgave 11A:

restart :
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Antag $\mu = 10.75$ og $\sigma = 1$ og prisen er 10kr, så bruges kommandoen
normalcdf(10.75, 1, 10)

$$0.2266273524 \tag{11.1.1}$$

Så sandsynligheden er 0.2266273524.

Delopgave b)

Vi bruger kommandoen. Her er $s = 0.70$, $n = 80$ og $\overline{x} = 10.86$, så:
tInterval(10.86, 0.70, 80, 0.95)

$$[10.7042226308784, 11.0157773691216] \tag{11.2.1}$$

Så intervallet er [10.7042226308784; 11.0157773691216].

Opgave 11B:

restart :
with(*Gym*) :
$f(x) := -0.05\,x^3 + x^2 - 6$:

Delopgave a)

Monotoniforholdene bestemmes.
$f'(x) = 0$

$$-0.15\,x^2 + 2\,x = 0 \tag{12.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 0.], [x = 13.33333333]] \tag{12.1.2}$$

Vi vælger den dobbelte afledede for at se, hvor der er lokale ekstrema.
$f''(0)$

$$2. \tag{12.1.3}$$

Da $2 > 0$ er der lokalt minimum.

$f''(13.33333333)$

$$-1.999999999 \tag{12.1.4}$$

Da $-1.999999999 < 0$ er der lokalt maksimum.

Vi har at $x = 0$ har et minimum og $x = 13.33333333$ har et maksimum. Altså er:
$f(x)$ aftagende i intervallet $]-\infty; 0]$ og $[13.33333333; \infty[$ samt voksende i intervallet $[0; 13.33333333]$.

Delopgave b)

Vi ved, at der er to tangenter med hældning 5, så førstekoordinaterne bestemmes.
$f'(x) = 5$

$$-0.15\,x^2 + 2\,x = 5 \tag{12.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 3.333333333], [x = 10.]] \tag{12.2.2}$$

Førstekoordinaterne må være i $x = 3.333333333$ og $x = 10$.

Opgave 11C:

restart :
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Forskriften for den multivariable funktion er:
$f(x, y) = 800 \cdot x + 140 \cdot y$.
Her er x antal campinghytter og y er antal campingvogne.

Delopgave b)

Vi bestemmer niveaukurven for funktionen $f(x, y)$.
$80\,x + 60\,y \le 12000$

$$80\,x + 60\,y \le 12000 \tag{13.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for y}}$

$$\left[\left[y \leq 200 - \frac{4}{3}\,x\right]\right] \tag{13.2.2}$$

$140000\,x + 15000\,y \leq 12000000$

$$140000\,x + 15000\,y \leq 12000000 \tag{13.2.3}$$

$\xrightarrow{\text{solve for y}}$

$$\left[\left[y \leq 800 - \frac{28}{3}\,x\right]\right] \tag{13.2.4}$$

$200 - \frac{4}{3}\,x = 800 - \frac{28}{3}x$

$$200 - \frac{4}{3}\,x = 800 - \frac{28}{3}\,x \tag{13.2.5}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[\,[x = 75\,]\,] \tag{13.2.6}$$

Da opfylder $x \geq 20$, så $x = 75$ indsættes i ovenstående uligheder.

$y \leq 200 - \frac{4}{3} \cdot 75$

$$y \leq 100 \tag{13.2.7}$$

$y \leq 800 - \frac{28}{3} \cdot 75$

$$y \leq 100 \tag{13.2.8}$$

Niveaukurven bestemmes ved at indsætte $x = 75$ og $y = 100$ i $f(x, y)$.

$f(75, 100) = 800 \cdot 75 + 140 \cdot 100$

$$f(75, 100) = 74000 \tag{13.2.9}$$

Derfor er niveaukurven $N = 74000$. Så det tal der giver det største dækningbidrag er 74000 *kr*, når der er 75 campinghytter og 100 campingvogne