موسوعة التكاملات

إعداد

أساتذة منتديات الرياضيات العربية

طباعة الأستاذة ليلى – laila245

http://www.uaemath.com/ar/aforum

جميع الحقوق محفوظة لكل مسلم

المجموعة الأولى

الدوال التي تحتوي على $أ + ب س$ وتكون درجة هذه العبارة عدداً صحيحاً

١) $\int \frac{د س}{أ + ب س} = \frac{١}{ب} لو |أ + ب س| + ث$

٢) $\int (أ + ب س)^{ن} \, د س = \frac{(أ + ب س)^{ن+١}}{ب(ن + ١)} + ث \quad ، \quad ن \neq -١$

٣) $\int \frac{س}{أ + ب س} د س = \frac{١}{ب^{٢}} (ب س - أ لو |أ + ب س|) + ث$

٤) $\int \frac{س^{٢}}{أ + ب س} د س = \frac{١}{ب^{٣}} \left[\frac{١}{٢} (أ + ب س)^{٢} - ٢ أ (أ + ب س) + أ^{٢} لو |أ + ب س| \right] + ث$

٥) $\int \frac{د س}{س(أ + ب س)} = \frac{-١}{أ} لو \left| \frac{أ + ب س}{س} \right| + ث$

٦) $\int \frac{د س}{س^{٢}(أ + ب س)} = -\frac{١}{أ س} + \frac{ب}{أ^{٢}} لو \left| \frac{أ + ب س}{س} \right| + ث$

٧) $\int \frac{س \, د س}{(أ + ب س)^{٢}} = \frac{١}{ب^{٢}} \left[لو |أ + ب س| + \frac{أ}{أ + ب س} \right] + ث$

٨) $\int \frac{س^{٢} د س}{(أ + ب س)^{٢}} = \frac{١}{ب^{٣}} \left[أ + ب س - ٢ أ لو |أ + ب س| + \frac{أ^{٢}}{أ + ب س} \right] + ث$

٩) $\int \frac{د س}{س(أ + ب س)^{٢}} = \frac{١}{أ^{٢}} لو \left| \frac{أ + ب س}{س} \right| - \frac{١}{أ(أ + ب س)} + ث$

١٠) $\int \frac{س \, د س}{(أ + ب س)^{٣}} = \frac{١}{ب^{٢}} \left[\frac{١}{أ + ب س} - \frac{أ}{٢(أ + ب س)^{٢}} \right] + ث$

المشاركون في حل المجموعة الأولى

رقم التكامل	المشاركون
١	عبد العاطي وفا – عبد الواحد – فريج عبد الرزاق tinaamina1990 – hidaya – ali2008
٢	عبد العاطي وفا – عبد الواحد – فريج عبد الرزاق tinaamina1990 – hidaya – ali2008
٣	عبد العاطي وفا – عبد الواحد – فريج عبد الرزاق tinaamina1990 – ali2008
٤	عبد العاطي وفا – عبد الواحد – فريج عبد الرزاق tinaamina1990 – ali2008
٥	عبد العاطي وفا – عبد الواحد – فريج عبد الرزاق ali2008
٦	عبد العاطي وفا – عبد الواحد – فريج عبد الرزاق – صادق العلي ali2008
٧	عبد العاطي وفا – عبد الواحد – فريج عبد الرزاق – صادق العلي ali2008
٨	عبد الواحد – فريج عبد الرزاق – صادق العلي ali2008
٩	عبد الواحد – فريج عبد الرزاق – صادق العلي ali2008
١٠	عبد الواحد – فريج عبد الرزاق – صادق العلي ali2008

[١] $\int \frac{\mathrm{d}س}{ا+ب س} = \frac{١}{ب}$ $\int \frac{ب}{ا+ب س}\mathrm{d}س = \frac{١}{ب}$ لـو$|ا+ب س|+ث$

طريقة أخرى

$\int \frac{\mathrm{d}س}{ا+ب س} = ت$

نفرض أن : $ص = ا+ب س \Leftarrow \mathrm{d}ص = ب\,\mathrm{d}س \Leftarrow \mathrm{d}س = \frac{١}{ب}\mathrm{d}ص$

$\Leftarrow ت = \frac{١}{ب}\int \frac{\mathrm{d}ص}{ص} = \frac{١}{ب}$ لـو$|ص|+ث = \frac{١}{ب}$ لـو$|ا+ب س|+ث$

[٢] $\int (ا+ب س)^{ن}\,\mathrm{d}س = \frac{١}{ب}\int ب.(ا+ب س)^{ن}\,\mathrm{d}س = \frac{(ا+ب س)^{ن+١}}{ب(ن+١)}+ث$

طريقة أخرى

$\int (ا+ب س)^{ن}\,\mathrm{d}س = ت$

نفرض أن : $ص = ا+ب س \Leftarrow \mathrm{d}ص = ب\,\mathrm{d}س \Leftarrow \mathrm{d}س = \frac{١}{ب}\mathrm{d}ص$

$\Leftarrow ت = \frac{١}{ب}\int ص^{ن}\,\mathrm{d}ص = \frac{١}{ب}\times\frac{ص^{ن+١}}{ن+١} = ث+\frac{(ا+ب س)^{ن+١}}{ب(ن+١)}$

٣) $\int \frac{س}{ا+ب س}\,ء س = \frac{١}{ب}\int \frac{ا+ب س-ا}{ا+ب س}\,ء س = \frac{١}{ب}\int \left(١-\frac{ا}{ا+ب س}\right) ء س$

$= \frac{١}{ب}\left(س-\frac{ا}{ب}\,لـو|ا+ب س|\right)+ث_{١}$

$= \frac{١}{ب^{٢}}\left(ب س-ا\,لـو|ا+ب س|\right)+ث_{١}$

$= \frac{١}{ب^{٢}}\left(ا+ب س-ا\,لـو|ا+ب س|\right)+\underbrace{ث_{١}-\frac{ا}{ب^{٢}}}_{ث}$

$= \frac{١}{ب^{٢}}\left(ا+ب س-ا\,لـو|ا+ب س|\right)+ث$

طريقة أخرى

$\int \frac{س}{ا+ب س}\,ء س = ت$

نفرض أن : $ص = ا+ب س \Leftarrow ء ص = ب ء س \Leftarrow ء س = \frac{١}{ب} ء ص$

$\Leftarrow ت = \frac{١}{ب}\int \frac{\frac{١}{ب}(ص-ا)}{ص}\,ء ص = \frac{١}{ب^{٢}}\int \frac{ص-ا}{ص}\,ء ص$

$= \frac{١}{ب^{٢}}\int \left(١-\frac{ا}{ص}\right) ء ص$

$= \frac{١}{ب^{٢}}[ص-ا\,لـو|ص|]+ث$

$= \frac{١}{ب^{٢}}[ا+ب س+ا\,لـو|ا+ب س|]+ث$

٤) $\int \frac{س^{٢}}{ا + ب س}\, ى س = ت$

نفرض أن : $ص = ا + ب س \Leftarrow ى ص = ب ى س \Leftarrow ى س = \frac{١}{ب} ى ص$

$$\Leftarrow ت = \frac{١}{ب} \int \frac{\left(\frac{١}{ب}(ص - ا)\right)^{٢}}{ص}\, ى ص$$

$$= \frac{١}{ب^{٣}} \int \frac{ص^{٢} - ٢ ا ص + ا^{٢}}{ص}\, ى ص$$

$$= \frac{١}{ب^{٣}} \int \left(ص - ٢ ا + \frac{ا^{٢}}{ص}\right) ى ص$$

$$= \frac{١}{ب^{٣}} \left[\frac{١}{٢} ص^{٢} - ٢ ا ص + ا^{٢} \text{ لو } |ص|\right] + ت$$

$$= \frac{١}{ب^{٣}} \left[\frac{١}{٢}(ا + ب س)^{٢} - ٢ ا(ا + ب س) + ا^{٢} \text{ لو } |ا + ب س|\right] + ت$$

طريقة أخرى (بالقسمة المطولة)

$$\int \frac{س^{٢}}{ا + ب س}\, ى س = \int \left(\frac{١}{ب} س - \frac{ا}{ب^{٢}} + \frac{\frac{ا^{٢}}{ب^{٢}}}{ا + ب س}\right) ى س$$

$$= \frac{١}{٢ب} س^{٢} - \frac{ا}{ب^{٢}} س + \frac{ا^{٢}}{ب^{٣}} \text{ لو } |ا + ب س| + ت$$

$$\begin{array}{r|l} س^{٢} & ا + ب س \\ \hline س^{٢} + \frac{ا}{ب} س & \frac{١}{ب} س - \frac{ا}{ب^{٢}} \\ \hline - \frac{ا}{ب} س & \\ - \frac{ا}{ب} س - \frac{ا^{٢}}{ب^{٢}} & \\ \hline \frac{ا^{٢}}{ب^{٢}} & \end{array}$$

طريقة أخرى

$$\int \frac{س^{٢}}{أ+ب س}\,د س = ت$$

$$\frac{س^{٢}}{أ+ب س} = م س + ن + \frac{هـ}{أ+ب س} = \frac{(م س+ن)(أ+ب س)+هـ}{أ+ب س}$$

$$= \frac{م ب س^{٢} + (م أ + ن ب) س + (أ ن + هـ)}{أ+ب س}$$

$$\Leftarrow \left.\begin{array}{l} م ب = ١ \\ م أ + ن ب = ٠ \\ أ ن + هـ = ٠ \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} م = \frac{١}{ب} \\ ن = -\frac{أ}{ب^{٢}} \\ هـ = \frac{أ^{٢}}{ب^{٢}} \end{array}\right.$$

$$\Leftarrow ت = \int \left[\left(\frac{١}{ب} س - \frac{أ}{ب^{٢}}\right) + \frac{أ^{٢}}{ب^{٢}(أ+ب س)}\right] د س$$

$$= \frac{١}{٢ب} س^{٢} - \frac{أ}{ب^{٢}} س + \frac{أ^{٢}}{ب^{٣}} لو|أ+ب س| + ث_{١}$$

$$= \frac{١}{ب^{٣}}\left[\frac{ب^{٢}س^{٢}}{٢} - أ ب س + أ^{٢} لو|أ+ب س|\right] + ث_{١}$$

$$= \frac{١}{ب^{٣}}\left[\frac{١}{٢}(ب^{٢}س^{٢} - ٢ أ ب س + أ^{٢}) - \frac{أ^{٢}}{٢} - ٢ أ ب س + أ^{٢} لو|أ+ب س|\right] + ث_{١}$$

$$= \frac{١}{ب^{٣}}\left[\frac{١}{٢}(أ+ب س)^{٢} - ٢ أ(أ+ب س) + أ^{٢} لو|أ+ب س|\right] + \underbrace{ث_{١} - \frac{٣ أ^{٢}}{٢ ب^{٣}}}_{ث}$$

$$= \frac{١}{ب^{٣}}\left[\frac{١}{٢}(أ+ب س)^{٢} - ٢ أ(أ+ب س) + أ^{٢} لو|أ+ب س|\right] + ث$$

٥ $\int \frac{د س}{س(ا+ب س)} = ت$

نفرض أن : $ص = \frac{ا+ب س}{س} = \frac{ا}{س} + ب \Leftarrow د ص = -\frac{ا}{س^{٢}} د س$

$\Leftarrow ت = \int \frac{د ص}{ص} \frac{١-}{ا} = \frac{١-}{ا} لـو|ص| + ت = \frac{١-}{ا} لـو\left|\frac{ا+ب س}{س}\right| + ت$

طريقة أخرى

$\int \frac{د س}{س(ا+ب س)} = ت$

$\frac{١}{س(ا+ب س)} = \frac{٢}{س} + \frac{ن}{ا+ب س} \Leftarrow ٢ = \frac{١}{ا} \ ، \ ن = -\frac{ب}{ا}$

$\Leftarrow ت = \int \frac{١}{ا} د س \left(\frac{١}{س} - \frac{ب}{ا+ب س}\right) = \frac{١}{ا}[لـو|س| - لـو|ا+ب س|] + ت$

$= \frac{١-}{ا} لـو\left|\frac{ا+ب س}{س}\right| + ت$

٦) $\int \frac{د س}{س^{٢}(ا+ب س)} = \int \frac{ا+ب س-ب س}{ا س^{٢}(ا+ب س)} د س$

$= \int \left(\frac{ب}{ا(ا+ب س)} - \frac{١}{ا س^{٢}}\right) د س$

$= \int \frac{١}{ا س^{٢}} د س - \int \frac{\frac{ب}{ا^{٢}}}{س(ا+ب س)} د س$

$= \int \frac{١}{ا س^{٢}} د س - \int \frac{\frac{ب}{ا^{٢}}}{س(ا+ب س)} د س$

$= \int \frac{١}{ا س^{٢}} د س - \int \left(\frac{ب}{ا(ا+ب س)} - \frac{١}{س}\right) د س$

$= -\frac{١}{ا س} - \frac{ب}{ا^{٢}}[لو|س| - لو|ا+ب س|] + ث$

$= -\frac{١}{ا س} + \frac{ب}{ا^{٢}} لو\left|\frac{ا+ب س}{س}\right| + ث$

طريقة أخرى (بالكسور الجزئية)

$\int \frac{د س}{س(ا+ب س)} = ث$

$\frac{١}{س(ا+ب س)} = \frac{م}{س} + \frac{ن}{س^{٢}} + \frac{هـ}{ا+ب س}$

$\Leftarrow \quad م = -\frac{ب}{ا^{٢}} \quad ، \quad ن = \frac{١}{ا} \quad ، \quad هـ = \frac{ب^{٢}}{ا^{٢}}$

$\Leftarrow \quad ث = \int \left(-\frac{ب}{ا^{٢} س} + \frac{١}{ا س^{٢}} + \frac{ب^{٢}}{ا^{٢}(ا+ب س)}\right) د س$

$= -\frac{ب}{ا^{٢}} لو|س| + \frac{١}{ا س} + \frac{ب}{ا^{٢}} لو|ا+ب س| + ث$

$= -\frac{١}{ا س} + \frac{ب}{ا^{٢}} لو\left|\frac{ا+ب س}{س}\right| + ث$

٧) $\int \frac{س\ د س}{(ا+ب س)^{٢}} = ت$

نفرض أن : $ص = ا + ب س \Leftarrow س = \frac{ص - ا}{ب} \Leftarrow د س = \frac{د ص}{ب}$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{\frac{ص - ا}{ب}}{ص^{٢}} \cdot \frac{د ص}{ب} = \int \frac{١}{ب^{٢}} \frac{ص - ا}{ص^{٢}} د ص$$

$$= \frac{١}{ب^{٢}} \int \left(\frac{١}{ص} - \frac{ا}{ص^{٢}} \right) د ص$$

$$= \frac{١}{ب^{٢}} \left[لو |ا + ب س| + \frac{ا}{ا + ب س} \right] + ث$$

طريقة أخرى

$$\int \frac{س\ د س}{(ا+ب س)^{٢}} = \frac{١}{ب} \int \frac{(ا+ب س) - ا}{(ا+ب س)^{٢}} د س$$

$$= \frac{١}{ب} \int \left(\frac{١}{ا+ب س} - \frac{ا}{(ا+ب س)^{٢}} \right) د س$$

$$= \frac{١}{ب^{٢}} \int \left(\frac{ب}{ا+ب س} - \frac{ا ب}{(ا+ب س)^{٢}} \right) د س$$

$$= \frac{١}{ب^{٢}} \left(لو |ا + ب س| + \frac{ا}{ا + ب س} \right) + ث$$

٨) $\int \frac{س^{٢}\, د س}{(ا + ب س)^{٢}} = ت$

نفرض أن : $ص = ا + ب س \Leftarrow س = \frac{ص - ا}{ب} \Leftarrow د س = \frac{د ص}{ب}$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{\left(\frac{ص - ا}{ب}\right)^{٢}}{ص^{٢}} \cdot \frac{د ص}{ب} = \frac{١}{ب^{٣}} \int \frac{ص^{٢} - ٢ا ص + ا^{٢}}{ص^{٢}} د ص$$

$$= \frac{١}{ب^{٢}} \int \left(١ - \frac{٢ا}{ص} + \frac{ا^{٢}}{ص^{٢}}\right) د ص$$

$$= \frac{١}{ب^{٣}} \left[ص - ٢ا لو|ص| + \frac{ا^{٢}}{ا + ب س}\right] + ث$$

$$= \frac{١}{ب^{٣}} \left[ا + ب س - ٢ا لو|ا + ب س| + \frac{ا^{٢}}{ص}\right] + ث$$

٩) $\int \frac{د س}{س(ا + ب س)^{٢}} = \int \frac{ا + ب س - ب س}{ا س(ا + ب س)^{٢}} د س$

$$= \underbrace{\int \frac{١}{ا س(ا + ب س)} د س}_{ت_{١}} + \underbrace{\int \frac{-ب}{ا(ا + ب س)^{٢}} د س}_{ت_{٢}}$$

$$ت_{١} = \int \frac{١}{ا س(ا + ب س)} د س = -\frac{١}{ا^{٢}} \int \frac{ا + ب س - ب س}{س(ا + ب س)} د س$$

$$= -\frac{١}{ا^{٢}} \int \left(\frac{١}{س} - \frac{ب}{ا + ب س}\right) د س$$

$$= -\frac{١}{ا^{٢}} [لو|س| - لو|ا + ب س|] + ث_{١}$$

$$ت_{٢} = \int \frac{-ب}{أ(أ+ب س)^{٢}}\, ؤس = \frac{١}{أ}\int \frac{-ب}{(أ+ب س)^{٢}}\, ؤس$$

$$= \frac{١}{أ(أ+ب س)} + ث_{٢}$$

$$\Leftarrow \quad ت = ت_{١} + ت_{٢}$$

$$= -\frac{١}{أ^{٢}}[لو|س| - لو|أ+ب س|] + \frac{١}{أ(أ+ب س)} + ث$$

$$= \frac{١}{أ(أ+ب س)} - \frac{١}{أ^{٢}} لو\left|\frac{أ+ب س}{س}\right| + ث$$

١٠ $$\int \frac{س\, ؤس}{(أ+ب س)^{٣}} = ت$$

نفرض أن : $ص = أ+ب س \Leftarrow س = \frac{ص-أ}{ب} \Leftarrow ؤس = \frac{ؤص}{ب}$

$$\Leftarrow \quad ت = \int \frac{\frac{ص-أ}{ب}}{ص^{٣}} \cdot \frac{ؤص}{ب} = \frac{١}{ب^{٢}}\int \frac{ص-أ}{ص^{٣}}\, ؤص$$

$$= \frac{١}{ب^{٢}}\int ؤص\left(\frac{١}{ص^{٢}} - \frac{أ}{ص^{٣}}\right)$$

$$= \frac{١}{ب^{٢}}\left[-\frac{١}{ص} + \frac{أ}{٢ص^{٢}}\right] + ث$$

$$= \frac{١}{ب^{٢}}\left[-\frac{١}{أ+ب س} + \frac{أ}{٢(أ+ب س)^{٢}}\right] + ث$$

المجموعة الثانية

الدوال التي تحتوي على $أ + ب س^{٢}$ ، $أ^{٢} - س^{٢}$ ، $أ^{٢} + س^{٢}$ وتكون درجة هذه العبارة عدداً صحيحاً

١١ $$\int \frac{د س}{١ + س^{٢}} = ظا^{-١} س + ث$$

١٢ $$\int \frac{د س}{أ^{٢} + س^{٢}} = \frac{١}{أ} ظا^{-١} \frac{س}{أ} + ث$$

١٣ $$\int \frac{د س}{أ^{٢} - س^{٢}} = \frac{١}{٢أ} لو \frac{أ + س}{أ - س} + ث$$

١٤ $$\int \frac{د س}{س^{٢} - أ^{٢}} = \frac{١}{٢أ} لو \frac{س + أ}{س - أ} + ث$$

١٥ $$\int \frac{د س}{أ + ب س^{٢}} = \frac{١}{\sqrt{أ ب}} ظا^{-١} \sqrt{\frac{ب}{أ}}\, س + ث \quad ، \quad أ > ٠ \quad ، \quad ب > ٠$$

١٦ $$\int \frac{د س}{أ - ب س^{٢}} = \frac{١}{٢\sqrt{أ ب}} لو \frac{\sqrt{أ} + س\sqrt{ب}}{\sqrt{أ} - س\sqrt{ب}} + ث$$

١٧ $$\int \frac{س\, د س}{أ + ب س^{٢}} = \frac{١}{٢ب} لو \left(س^{٢} + \frac{أ}{ب} \right) + ث$$

١٨ $$\int \frac{س^{٢} د س}{أ + ب س^{٢}} = \frac{س}{ب} - \frac{أ}{ب} \int \frac{د س}{أ + ب س^{٢}}$$

١٩ $$\int \frac{د س}{س(أ + ب س^{٢})} = \frac{١}{٢أ} لو \frac{س^{٢}}{أ + ب س^{٢}} + ث$$

٢٠ $$\int \frac{د س}{س^{٢}(أ + ب س^{٢})} = -\frac{١}{أ س} - \frac{ب}{أ} \int \frac{د س}{أ + ب س^{٢}}$$

٢١ $$\int \frac{د س}{(أ + ب س^{٢})^{٢}} = \frac{س}{٢أ(أ + ب س^{٢})} + \frac{١}{٢أ} \int \frac{د س}{أ + ب س^{٢}}$$

المشاركون في حل المجموعة الثانية

رقم التكامل	المشاركون
١١	صادق العلي - عبد الواحد
١٢	صادق العلي - عبد الواحد
١٣	صادق العلي - عبد الواحد
١٤	صادق العلي
١٥	صادق العلي - عبد الواحد
١٦	صادق العلي - عبد الواحد
١٧	صادق العلي - عبد الواحد
١٨	صادق العلي - عبد الواحد mourad24000
١٩	صادق العلي - عبد الواحد mourad24000
٢٠	hamza_mn
٢١	laila245

١١ $\int \frac{د س}{١ + س^{٢}} = ت$

نفرض أن : $س = ظا\ ص \Leftarrow د س = قا^{٢} ص\ د ص$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{قا^{٢} ص\ د ص}{١ + ظا^{٢} ص} = \int \frac{قا^{٢} ص\ د ص}{قا^{٢} ص} = \int د ص = ص + ث = ظا^{-١}\ س + ث$$

١٢ $\int \frac{د س}{أ^{٢} + س^{٢}} = ت$

نفرض أن : $س = أ\ ظا\ ص \Leftarrow د س = أ\ قا^{٢} ص\ د ص$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{أ\ قا^{٢} ص\ د ص}{أ^{٢} + أ^{٢}\ ظا^{٢} ص} = \int \frac{أ\ قا^{٢} ص\ د ص}{أ^{٢}\ (١ + ظا^{٢} ص)} = \int \frac{١}{أ} د ص = \frac{١}{أ} ص + ث$$

$$= \frac{١}{أ}\ ظا^{-١} \frac{س}{أ} + ث$$

١٣ $\int \frac{د س}{أ^{٢} - س^{٢}} = \int \frac{١}{(أ - س)(أ + س)}\ د س = ت$

$$\frac{١}{(أ - س)(أ + س)} = \frac{م}{أ - س} + \frac{ن}{أ + س} = \frac{م(أ + س) + ن(أ + س)}{(أ - س)(أ + س)}$$

$$= \frac{(م + ن)\ أ + (ن - م)\ س}{(أ - س)(أ + س)}$$

$$\Leftarrow م + ن = \frac{١}{أ} \quad ، \quad ن - م = ٠$$

$$\Leftarrow م = ن = \frac{١}{٢أ}$$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{١}{٢أ} \left(\frac{١}{أ - س} + \frac{١}{أ + س} \right) د س = \frac{١}{٢أ} [-لو|أ - س| + لو|أ + س|] + ث$$

$$= \frac{١}{٢أ} لو \left| \frac{أ + س}{أ - س} \right| + ث$$

١٤ $\int \frac{\mathrm{d}س}{أ^{٢}-س^{٢}} = \int \frac{-١}{س^{٢}-أ^{٢}} = \frac{١}{٢أ} \int \frac{-٢أ}{س^{٢}-أ^{٢}} \mathrm{d}س$

$$= \frac{١}{٢أ} \int \frac{(س-أ)-(س+أ)}{س^{٢}-أ^{٢}} \mathrm{d}س$$

$$= \frac{١}{٢أ} \int \left(\frac{١}{س-أ} - \frac{١}{س+أ} \right) \mathrm{d}س$$

$$= \frac{١}{٢أ} [\text{لو}|س-أ| - \text{لو}|س+أ|] + ث$$

$$= \frac{١}{٢أ} \text{لو} \left| \frac{س-أ}{س+أ} \right| + ث$$

١٥ $\int \frac{\mathrm{d}س}{أ+ب س^{٢}} = ث$

نفرض أن : $س = \sqrt{\frac{أ}{ب}}$ ظا ص $\Leftarrow$ $\mathrm{d}س = \sqrt{\frac{أ}{ب}}$ قا^{٢} ص $\mathrm{d}ص$

$$\Leftarrow ث = \int \frac{\sqrt{\frac{أ}{ب}} \text{ قا}^{٢} ص \, \mathrm{d}ص}{أ + أ \text{ ظا}^{٢} ص} = \int \sqrt{\frac{أ}{ب}} \frac{\text{قا}^{٢} ص \, \mathrm{d}ص}{أ(١+\text{ظا}^{٢} ص)}$$

$$= \sqrt{\frac{أ}{ب}} \int \frac{١}{أ} . \mathrm{d}ص$$

$$= \frac{١}{\sqrt{أ ب}} ص + ث$$

$$= \frac{١}{\sqrt{أ ب}} \text{ ظا}^{-١} \sqrt{\frac{أ}{ب}} س + ث$$

١٦ $\int \frac{د س}{ا - ب س^{٢}} = ت$

$$\frac{١}{ا - ب س^{٢}} = \frac{١}{(\sqrt{ا} - \sqrt{ب} س)(\sqrt{ا} + \sqrt{ب} س)} = \frac{م}{\sqrt{ا} + \sqrt{ب} س} + \frac{ن}{\sqrt{ا} - \sqrt{ب} س}$$

$$م = ن = \frac{١}{٢\sqrt{ا}} \Leftarrow$$

$$\Leftarrow ت = \frac{١}{٢\sqrt{ا}} \int د س \left(\frac{١}{\sqrt{ا} + \sqrt{ب} س} + \frac{١}{\sqrt{ا} - \sqrt{ب} س} \right)$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{ا ب}} \int د س \left(\frac{\sqrt{ب}}{\sqrt{ا} + \sqrt{ب} س} + \frac{\sqrt{ب}}{\sqrt{ا} - \sqrt{ب} س} \right)$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{ا ب}} [\text{لو} |\sqrt{ا} + \sqrt{ب} س| - \text{لو} |\sqrt{ا} - \sqrt{ب} س|] + ث$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{ا ب}} \text{لو} \left| \frac{\sqrt{ا} + \sqrt{ب} س}{\sqrt{ا} - \sqrt{ب} س} \right| + ث$$

١٧ $\int \frac{س \, د س}{ا + ب س^{٢}} = \int \frac{١}{٢ب} \frac{٢ب \cdot س}{ا + ب س^{٢}} د س = \int \frac{١}{٢ب} \frac{٢ \cdot س}{\frac{ا}{ب} + س^{٢}} د س$

$$= \int \frac{١}{٢ب} \frac{٢ \cdot س}{\frac{ا}{ب} + س^{٢}} د س$$

$$= \frac{١}{٢ب} \text{لو} \left(\frac{ا}{ب} + س^{٢} \right) + ث$$

١٨ $$\int \frac{س^{٢}\, د س}{أ+ب س^{٢}} = \frac{١}{ب}\int \frac{(أ+ب س^{٢})-أ}{أ+ب س^{٢}}\, د س = \frac{١}{ب}\int \left(١-\frac{أ}{أ+ب س^{٢}}\right) د س$$

$$= \frac{س}{ب} - \frac{أ}{ب}\underbrace{\int \frac{د س}{أ+ب س^{٢}}}_{\text{انظر رقم ١٦}}$$

١٩ $$\int \frac{د س}{س(أ+ب س^{٢})} = \frac{١}{أ٢}\int \frac{أ٢}{س(أ+ب س^{٢})}\, د س$$

$$= \frac{١}{أ٢}\int \frac{(أ٢ + ٢ ب س^{٢}) - ٢ ب س^{٢}}{س(أ+ب س^{٢})}\, د س$$

$$= \frac{١}{أ٢}\int \left(\frac{٢}{س} - \frac{٢ ب س}{أ+ب س^{٢}}\right) د س$$

$$= \frac{١}{أ٢}\left[٢ لو|س| - لو|أ+ب س^{٢}|\right] + ث_{١}$$

$$= \frac{١}{أ٢} لو\left|\frac{س^{٢}}{أ+ب س^{٢}}\right| + ث$$

٢٠ $$\int \frac{د س}{س^{٢}(أ+ب س^{٢})} = \int \frac{أ}{أ\, س^{٢}(أ+ب س^{٢})}\, د س$$

$$= \int \frac{(أ+ب س^{٢}) - ب س^{٢}}{أ\, س^{٢}(أ+ب س^{٢})}\, د س$$

$$= \int \left(\frac{١}{أ\, س^{٢}} - \frac{ب}{أ(أ+ب س^{٢})}\right) د س$$

$$= -\frac{١}{أ س} - \frac{ب}{أ}\underbrace{\int \frac{د س}{أ+ب س^{٢}}}_{\text{انظر رقم ١٦}}$$

٢١ $$\int \frac{د س}{(ا + ب س^{٢})^{٢}} = \frac{١}{ا} \int \frac{(ا + ب س^{٢}) - ب س^{٢}}{(ا + ب س^{٢})^{٢}} \, د س$$

$$= \frac{١}{ا} \int \frac{د س}{ا + ب س^{٢}} - \underbrace{\int \frac{ب س^{٢}}{(ا + ب س^{٢})^{٢}} \, د س}_{ت_{١}}$$

لإيجاد $ت_{١} = \int \frac{ب س^{٢}}{(ا + ب س^{٢})^{٢}} \, د س$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف \, د هـ = ف هـ - \int هـ \, د ف$

نفرض أن : $ف = س \Leftarrow د ف = د س$

$$د هـ = \frac{ب س}{(ا + ب س^{٢})^{٢}} \, د س \Leftarrow هـ = \frac{-١}{٢ب(ا + ب س^{٢})}$$

$$\Leftarrow ت_{١} = \frac{-س}{٢ب(ا + ب س^{٢})} + \int \frac{د س}{٢ب(ا + ب س^{٢})}$$

$$\Leftarrow \int \frac{د س}{(ا + ب س^{٢})^{٢}} = \frac{١}{ا} \int \frac{د س}{ا + ب س^{٢}} - س \left[\int \frac{د س}{٢ب(ا + ب س^{٢})} + \frac{-س}{٢ب(ا + ب س^{٢})} \right] \frac{١}{ا}$$

$$= \underbrace{\int \frac{د س}{ا + ب س^{٢}}}_{\text{انظر رقم } ١٦} \frac{١}{٢ا} + \frac{س}{٢ا(ا + ب س^{٢})}$$

المجموعة الثالثة

الدوال التي تحتوي على $\sqrt{ا+ب س}$

٢٢) $\int س \sqrt{ا+ب س}\ د س = \frac{٢}{٣ب}\sqrt{(ا+ب س)^{٣}} + ث$

٢٣) $\int \frac{س}{\sqrt{ا+ب س}}\ د س = -\frac{٢(٢ا-٣ب س)\sqrt{(ا+ب س)^{٣}}}{١٥ ب^{٢}} + ث$

٢٤) $\int س^{٢}\sqrt{ا+ب س}\ د س = \frac{٢(٨ا^{٢}-١٢ا ب س+١٥ ب^{٢}س^{٢})\sqrt{(ا+ب س)^{٣}}}{١٠٥ ب^{٣}} + ث$

٢٥) $\int \frac{س\ د س}{\sqrt{ا+ب س}} = -\frac{٢(٢ا-ب س)}{٣ب^{٢}}\sqrt{ا+ب س} + ث$

٢٦) $\int \frac{س^{٢}\ د س}{\sqrt{ا+ب س}} = \frac{٢(٨ا^{٢}-١٤ا ب س+٣ب^{٢}س^{٢})\sqrt{ا+ب س}}{١٥ ب^{٣}} + ث$

٢٧) $\int \frac{د س}{س\sqrt{ا+ب س}} = -\frac{١}{\sqrt{ا}}لو\frac{\sqrt{ا+ب س}-\sqrt{ا}}{\sqrt{ا+ب س}+\sqrt{ا}} + ث$ ، $ا > ٠$

٢٨) $\int \frac{د س}{س\sqrt{ا+ب س}} = \frac{٢}{\sqrt{-ا}}ظا^{-١}\sqrt{\frac{ا+ب س}{-ا}} + ث$ ، $ا > ٠$

٢٩) $\int \frac{د س}{س^{٢}\sqrt{ا+ب س}} = -\frac{\sqrt{ا+ب س}}{ا س} - \frac{ب}{٢ا}\int \frac{د س}{س\sqrt{ا+ب س}}$

٣٠) $\int \frac{\sqrt{ا+ب س}\ د س}{س} = ٢\sqrt{ا+ب س} - ا\int \frac{د س}{س\sqrt{ا+ب س}}$

المشاركون في حل المجموعة الثالثة

رقم التكامل	المشاركون
٢٢	mourad24000
٢٣	mourad24000
٢٤	أبولونيوس
٢٥	سيد كامل
٢٦	laila245
٢٧	خالد أبو محمود mourad24000
٢٨	خالد أبو محمود mourad24000
٢٩	hamza_mn
٣٠	hamza_mn

٢٢ $\int \sqrt{أ+ب س}\ د س = \frac{١}{ب} \int ب \cdot (أ+ب س)^{\frac{١}{٢}}\ د س = \frac{٢}{٣ب}(أ+ب س)^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{٢}{٣ب}\sqrt{(أ+ب س)^{٣}} + ث$

٢٣ $\int س \sqrt{أ+ب س}\ د س = ت$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف\ د هـ = ف\ هـ - \int هـ\ د ف$

نفرض أن : $ف = س \Leftarrow د ف = د س$

$د هـ = \sqrt{أ+ب س}\ د س \Leftarrow هـ = \frac{٢}{٣ب}\sqrt{(أ+ب س)^{٣}}$ (انظر رقم ٢٢)

$\Leftarrow ت = \frac{٢ س}{٣ب}\sqrt{(أ+ب س)^{٣}} - \int \frac{٢}{٣ب}\sqrt{(أ+ب س)^{٣}}\ د س$

$= \frac{٢ س}{٣ب}\sqrt{(أ+ب س)^{٣}} - \int \frac{٢}{٣ب^{٢}} ب (أ+ب س)^{\frac{٣}{٢}}$

$= \frac{٢ س}{٣ب}\sqrt{(أ+ب س)^{٣}} - \int \frac{٤}{١٥ب^{٢}}(أ+ب س)^{\frac{٥}{٢}}$

$= \frac{٢ س}{٣ب}\sqrt{(أ+ب س)^{٣}} - \frac{٤}{١٥ب^{٢}}\sqrt{(أ+ب س)^{٣}}\ (أ+ب س)$

$= \frac{٢}{١٥ب^{٢}}\sqrt{(أ+ب س)^{٣}}\ [٥ ب س - ٢(أ+ب س)] + ث$

$= -\frac{٢(٢أ-٣ب س)}{١٥ب^{٢}}\sqrt{(أ+ب س)^{٣}} + ث$

طريقة أخرى

$$\int س\sqrt{أ+ب س}\ ى س = \frac{١}{ب}\int ب س\cdot(أ+ب س)^{\frac{١}{٢}}\ ى س$$

$$= \frac{١}{ب}\int ((أ+ب س)-أ)\cdot(أ+ب س)^{\frac{١}{٢}}\ ى س$$

$$= \frac{١}{ب}\int \left[(أ+ب س)^{\frac{٣}{٢}} - أ(أ+ب س)^{\frac{١}{٢}}\right] ى س$$

$$= \frac{١}{ب}\left[\frac{٢}{٥ب}(أ+ب س)^{\frac{٥}{٢}} - \frac{أ٢}{٣ب}(أ+ب س)^{\frac{٣}{٢}}\right] + ث$$

$$= \frac{٢\sqrt{(أ+ب س)^{٣}}\left[٣(أ+ب س)-٥أ\right]}{١٥ب^{٢}} + ث$$

$$= -\frac{٢(٢أ-٣ب س)\sqrt{(أ+ب س)^{٣}}}{١٥ب^{٢}} + ث$$

٢٤ $\int س^{٢}\sqrt{أ+ب س}\ د س = ت$

نفرض أن : $ص^{٢}=أ+ب س \Leftarrow س=\frac{١}{ب}(ص^{٢}-أ) \Leftarrow د س=\frac{٢ص}{ب} د ص$

$س^{٢}=\frac{١}{ب^{٢}}(ص^{٤}-٢أص^{٢}+أ^{٢})$

$\Leftarrow ت=\int \frac{٢}{ب^{٣}}(ص^{٤}-٢أص^{٢}+أ^{٢})ص^{٢}\ د ص$

$=\int \frac{٢}{ب^{٣}}(ص^{٦}-٢أص^{٤}+أ^{٢}ص^{٢})د ص$

$=\frac{٢}{ب^{٣}}\left[\frac{ص^{٧}}{٧}-\frac{٢أص^{٥}}{٥}+\frac{أ^{٢}ص^{٣}}{٣}\right]+ث$

$=\frac{٢ص^{٣}}{١٠٥ب^{٣}}[١٥ص^{٤}-٤٢أص^{٢}+٣٥أ^{٢}]+ث$

$=\frac{٢\sqrt{(أ+ب س)^{٣}}}{١٠٥ب^{٣}}[١٥(أ+ب س)^{٢}-٤٢أ(أ+ب س)+٣٥أ^{٢}]+ث$

$=\frac{٢\sqrt{(أ+ب س)^{٣}}}{١٠٥ب^{٣}}[١٥أ^{٢}+٣٠أب س+١٥ب^{٢}س^{٢}-٤٢أ^{٢}-٤٢أب س+٣٥أ^{٢}]+ث$

$=\frac{٢(-٨أ^{٢}+١٢أب س+١٥ب^{٢}س^{٢})\sqrt{(أ+ب س)^{٣}}}{١٠٥ب^{٣}}+ث$

٢٥ $\int \frac{س\, ى\, س}{\sqrt{أ + ب س}} = ت$

نفرض أن : $ص^{٢} = أ + ب س \Leftarrow س = \frac{١}{ب}(ص^{٢} - أ) \Leftarrow ى س = \frac{٢ ص}{ب} ى ص$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{٢}{ب^{٢}}(ص^{٢} - أ)\, ى ص$$

$$= \frac{٢}{ب^{٢}}\left[\frac{ص^{٣}}{٣} - أ ص\right] + ت$$

$$= \frac{٢ ص}{٣ ب^{٢}}[ص^{٢} - ٣أ] + ت$$

$$= \frac{٢\sqrt{أ + ب س}}{٣ ب^{٢}}[أ + ب س - ٣أ] + ت$$

$$= -\frac{٢(٢أ - ب س)}{٣ ب^{٢}}\sqrt{أ + ب س} + ت$$

٢٦ $\int \frac{س^{٢}\, ى\, س}{\sqrt{أ + ب س}} = ت$

نفرض أن : $ص^{٢} = أ + ب س \Leftarrow س = \frac{١}{ب}(ص^{٢} - أ) \Leftarrow ى س = \frac{٢ ص}{ب} ى ص$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{٢}{ب^{٣}}(ص^{٤} - ٢أ ص^{٢} + أ^{٢})\, ى ص$$

$$= \frac{٢}{ب^{٣}}\left[\frac{ص^{٥}}{٥} - \frac{٢أ ص^{٣}}{٣} + أ^{٢} ص\right] + ت$$

$$= \frac{٢ ص}{١٥ ب^{٣}}[٣ص^{٤} - ١٠ أ ص^{٢} + ١٥ أ^{٢}] + ت$$

$$= \frac{٢\sqrt{أ + ب س}}{١٥ ب^{٣}}[٣(أ + ب س)^{٢} - ١٠ أ(أ + ب س) + ١٥ أ^{٢}] + ت$$

$$= \frac{٢\sqrt{أ + ب س}}{١٥ ب^{٣}}[٣أ^{٢} + ٦أ ب س + ٣ب^{٢} س^{٢} - ١٠ أ^{٢} - ١٠ أ ب س + ١٥ أ^{٢}] + ت$$

$$= \frac{٢(٨أ^{٢} - ٤أ ب س + ٣ب^{٢} س^{٢})\sqrt{أ + ب س}}{١٥ ب^{٣}} + ت$$

٢٧ $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}\sqrt{\text{ا}+\text{ب س}}} = \text{ت}$

نفرض أن : $\text{ص}^{٢} = \text{ا} + \text{ب س} \Leftarrow \text{س} = \frac{١}{\text{ب}}(\text{ص}^{٢} - \text{ا}) \Leftarrow \text{د س} = \frac{٢\text{ص}}{\text{ب}}\text{د ص}$

$\Leftarrow \text{ت} = \int \frac{٢\,\text{د ص}}{\text{ص}^{٢} - \text{ا}}$

عندما $\text{ا} > ٠$ فإن

$$\frac{١}{\text{ص}^{٢} - \text{ا}} = \frac{١}{(\text{ص} - \sqrt{\text{ا}})(\text{ص} + \sqrt{\text{ا}})} = \left[\frac{١}{\text{ص} - \sqrt{\text{ا}}} - \frac{١}{\text{ص} + \sqrt{\text{ا}}}\right]\frac{١}{٢\sqrt{\text{ا}}}$$

$$\Leftarrow \text{ت} = \int \frac{١}{٢\sqrt{\text{ا}}}\left(\frac{١}{\text{ص} - \sqrt{\text{ا}}} - \frac{١}{\text{ص} + \sqrt{\text{ا}}}\right)\text{د ص}$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{\text{ا}}}\left[\text{لو}\left|\text{ص} - \sqrt{\text{ا}}\right| - \text{لو}\left|\text{ص} + \sqrt{\text{ا}}\right|\right] + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٢\sqrt{\text{ا}}}\,\text{لو}\left|\frac{\text{ص} - \sqrt{\text{ا}}}{\text{ص} + \sqrt{\text{ا}}}\right| + \text{ث}$$

$$= -\frac{١}{\sqrt{\text{ا}}}\,\text{لو}\left|\frac{\sqrt{\text{ا} + \text{ب س}} - \sqrt{\text{ا}}}{\sqrt{\text{ا} + \text{ب س}} + \sqrt{\text{ا}}}\right| + \text{ث}$$

٢٨ عندما $\text{ا} < ٠$ نفرض أن $\text{م} = -\text{ا}$

$$\Leftarrow \text{ت} = \int \frac{٢\,\text{د ص}}{\text{ص}^{٢} + (\sqrt{\text{م}})^{٢}} = \frac{٢}{\text{م}}\int \frac{\text{د ص}}{١ + \left(\frac{\text{ص}}{\sqrt{\text{م}}}\right)^{٢}}$$

نفرض أن : $\text{ع} = \frac{\text{ص}}{\sqrt{\text{م}}} \Leftarrow \text{د ع} = \frac{\text{د ص}}{\sqrt{\text{م}}} \Leftarrow \text{د ص} = \sqrt{\text{م}}\,\text{د ع}$

$$\Leftarrow \text{ت} = \int \frac{٢\sqrt{\text{م}}}{\text{م}}\frac{\text{د ع}}{١ + \text{ع}^{٢}} = \frac{٢}{\sqrt{\text{م}}}\,\text{ظا}^{-١}\,\text{ع} = \frac{٢}{\sqrt{-\text{ا}}}\,\text{ظا}^{-١}\frac{\sqrt{\text{ا} + \text{ب س}}}{-\text{ا}} + \text{ث}$$

٢٩ $\int \frac{د س}{س^{٢}\sqrt{ا+ب س}} = ت$

$ص^{٢} = ا + ب س \Leftarrow س = \frac{١}{ب}(ص^{٢} - ا) \Leftarrow د س = \frac{٢ ص}{ب} د ص$

$\Leftarrow ت = \int \frac{٢ ب د ص}{(ص^{٢} - ا)^{٢}} = ٢ب \int \left[\frac{١}{(\sqrt{ا} + ص)(\sqrt{ا} - ص)}\right]^{٢} د ص$

$= \frac{٢ب}{٤ ا} \int \left[\frac{١}{\sqrt{ا} + ص} - \frac{١}{\sqrt{ا} - ص}\right]^{٢}$

$= \frac{ب}{٢ ا} \int \left[\frac{٢}{ص^{٢} - ا} - \frac{١}{(\sqrt{ا} + ص)^{٢}} + \frac{١}{(\sqrt{ا} - ص)^{٢}}\right] د ص$

$= \frac{ب}{٢ ا} - \left[\frac{١}{\sqrt{ا} + ص} - \frac{١}{\sqrt{ا} - ص} -\right] \int \frac{٢}{ص^{٢} - ا} د ص$

$= \frac{-ب}{٢ ا} - \left[\frac{٢ص}{ص^{٢} - ا}\right] \frac{ب}{ا} \int \frac{د ص}{ص^{٢} - ا}$

$= \frac{-\sqrt{ا + ب س}}{ا س} - \frac{ب}{ا} \int \frac{د ص}{ص^{٢} - ا}$

انظر رقم ٢٧ أو ٢٨

٣٠ $$\int \frac{\sqrt{أ+ب س}\ \ د س}{س} = \int \frac{\sqrt{أ+ب س}}{س} \times \frac{\sqrt{أ+ب س}}{\sqrt{أ+ب س}}\ د س$$

$$= \int \frac{أ+ب س}{س\ \sqrt{أ+ب س}}\ د س$$

$$= \int \frac{ب}{\sqrt{أ+ب س}}\ د س + \int \frac{د س}{س\ \sqrt{أ+ب س}}$$

$$= ٢\sqrt{أ+ب س} - \underbrace{\int \frac{د س}{س\ \sqrt{أ+ب س}}}$$

انظر رقم ٢٧ أو ٢٨

المجموعة الرابعة

الدوال التي تحتوي على $\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}$

٣١ $\int \sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\ د س = \frac{س}{٢}\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}} + \frac{أ^{٢}}{٢}\ لو\left(س+\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\right)+ث$

٣٢ $\int \left(\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\right)^{٣}\ د س = \frac{س}{٨}(٢س^{٢}+٥أ^{٢})\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}} + \frac{٣أ^{٤}}{٨}\ لو\left(س+\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\right)+ث$

٣٣ $\int س\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\ د س = \frac{\left(\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\right)^{٣}}{٣}+ث$

٣٤ $\int س^{٢}\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\ د س = \frac{س}{٨}(٢س^{٢}+أ^{٢})\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}} - \frac{أ^{٤}}{٨}\ لو\left(س+\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\right)+ث$

٣٥ $\int \frac{د س}{\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}} = لو\left(س+\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\right)+ث$

٣٦ $\int \frac{د س}{\left(\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\right)^{٣}} = \frac{س}{أ^{٢}\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}}+ث$

٣٧ $\int \frac{س\ د س}{\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}} = \sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}+ث$

٣٨ $\int \frac{س^{٢}\ د س}{\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}} = \frac{س}{٢}\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}} + \frac{أ^{٢}}{٢}\ لو\left(س+\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\right)+ث$

٣٩ $\int \frac{س^{٢}\ د س}{\left(\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\right)^{٣}} = -\frac{س}{\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}} + لو\left(س+\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\right)+ث$

٤٠ $\int \frac{د س}{س\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}} = \frac{١}{أ}\ لو\frac{س}{أ+\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}}+ث$

٤١ $\int \frac{د س}{س^{٢}\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}} = -\frac{\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}}{أ^{٢}\ س}+ث$

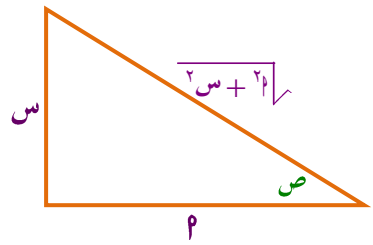
٤٢ $\int \frac{د س}{س^{٣}\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}} = -\frac{\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}}{٢أ^{٢}\ س^{٢}} + \frac{١}{٢أ^{٣}}\ لو\frac{أ+\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}}{س}+ث$

٤٣ $\int \frac{\sqrt{س^٢ + ا^٢}\ ى س}{س} = \sqrt{س^٢ + ا^٢} - ا \ لو \frac{ا + \sqrt{س^٢ + ا^٢}}{س} + ث$

٤٤ $\int \frac{\sqrt{س^٢ + ا^٢}\ ى س}{س^٢} = -\frac{\sqrt{س^٢ + ا^٢}}{س} + لو\left(س + \sqrt{س^٢ + ا^٢}\right) + ث$

المشاركون في حل المجموعة الرابعة

رقم التكامل	المشاركون
٣١	سيد كامل – صادق العلي
٣٢	mourad24000
٣٣	خالد أبو محمود Abdullah Monla
٣٤	hamza_mn
٣٥	خالد أبو محمود mourad24000
٣٦	hamza_mn – Abdullah Monla
٣٧	عبد الواحد Abdullah Monla
٣٨	عبد الواحد hamza_mn – mourad24000
٣٩	عبد الواحد hamza_mn – mourad24000
٤٠	عبد الواحد hamza_mn
٤١	عبد الواحد hamza_mn
٤٢	عبد الواحد hamza_mn
٤٣	عبد الواحد hamza_mn
٤٤	عبد الواحد hamza_mn



عند استخدام التعويض

س = أ ظا ص

ارجع لهذا المثلث لإيجاد الدوال المثلثية

٣١ $\int \sqrt{س^٢ + أ^٢}\ د س = ت$

نفرض أن : س = أ جاز ص $\Leftarrow$ د س = أ جتاز ص د ص

$\Leftarrow$ $\int = ت$ $\sqrt{أ^٢ جا^٢ز ص + أ^٢}$ ٠ أ جتاز ص د ص

$= \int أ^٢$ جتا^{٢}ز ص د ص

$= أ^٢ \int \frac{١}{٢}(جتاز ٢ص + ١)$ د ص

$= \frac{أ^٢}{٢}\left[\frac{١}{٢}جاز ٢ص + ص\right] + ت$

$= \frac{أ^٢}{٤} \times ٢$ جاز ص جتاز ص $+ \frac{أ^٢}{٢}(جتاز)^{-١} + ت$

$= \frac{أ^٢}{٢} \times \frac{س}{أ} \times \frac{\sqrt{س^٢ + أ^٢}}{أ} + \frac{أ^٢}{٢}$ لـو$\left(س + \sqrt{س^٢ + أ^٢}\right) + ت$

$= \frac{س}{٢}\sqrt{س^٢ + أ^٢} + \frac{أ^٢}{٢}$ لـو$\left(س + \sqrt{س^٢ + أ^٢}\right) + ت$

٣٢ $\int \sqrt{(س^٢ + ا^٢)^٣}\ ى س = ت$

نفرض أن : $س = ا$ جا ر ص $\Leftarrow$ $ى س = ا$ جتا ر ص ى ص

$\Leftarrow ت = \int ا^٤ (\text{جتا ر})^٤ ص\ ى ص$

$(\text{جتا ر})^٤ ص = ((\text{جتا ر})^٢)^٢ ص = \frac{١}{٤}(\text{جتا ر ٢ص} + ١)^٢ = \frac{\text{جتا ر ٤ص}}{٨} + \frac{\text{جتا ر ٢ص}}{٢} + \frac{٣}{٨}$

$\Leftarrow ت = ا^٤ \left[\int \frac{١}{٨} \text{جتا ر ٤ص ى ص} + \int \frac{١}{٢} \text{جتا ر ٢ص ى ص} + \int \frac{٣}{٨}\ ى ص\right]$

$= ا^٤ \left[\frac{\text{جا ر ٤ص}}{٣٢} + \frac{\text{جا ر ٢ص}}{٤} + \frac{٣}{٨} ص\right] + ث$

$\text{جا ر ٢ص} = ٢\text{جا ر ص جتا ر ص} = ٢ \cdot \frac{س}{ا} \cdot \frac{\sqrt{س^٢ + ا^٢}}{ا} = \frac{٢ س \sqrt{س^٢ + ا^٢}}{ا^٢}$

$\text{جا ر ٤ص} = ٢\text{جا ر ٢ص جتا ر ٢ص} = ٢\text{جا ر ٢ص}(١ + ٢(\text{جا ر})^٢ ص)$

$= ٢ \cdot \frac{٢ س \sqrt{س^٢ + ا^٢}}{ا^٢} \cdot \left(\frac{٢س^٢}{ا^٢} + ١\right)$

$= \frac{٤ س \sqrt{س^٢ + ا^٢}}{ا^٢} + \frac{٨ س^٣ \sqrt{س^٢ + ا^٢}}{ا^٤}$

$ص = (\text{جتا ر})^{-١} \frac{س}{ا} = \text{لو}\left(س + \sqrt{س^٢ + ا^٢}\right)$

$\Leftarrow ت = ا^٤ \left[\frac{س \sqrt{س^٢ + ا^٢}}{٨ا^٢} + \frac{س^٣ \sqrt{س^٢ + ا^٢}}{٤ا^٤} + \frac{س \sqrt{س^٢ + ا^٢}}{٢٤ا^٢} + \frac{٣}{٨} \text{لو}\left(س + \sqrt{س^٢ + ا^٢}\right)\right] + ث$

$= ا^٤ \left[\frac{٥س \sqrt{س^٢ + ا^٢}}{٨ا^٢} + \frac{س^٣ \sqrt{س^٢ + ا^٢}}{٤ا^٤} + \frac{٣}{٨} \text{لو}\left(س + \sqrt{س^٢ + ا^٢}\right)\right] + ث$

$= \frac{س}{٨}(٢س^٢ + ٥ا^٢) \sqrt{س^٢ + ا^٢} + \frac{٣ ا^٤}{٨} \text{لو}\left(س + \sqrt{س^٢ + ا^٢}\right) + ث$

٣٣ $\int س \sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}\ ء س = \frac{١}{٢}\int ٢س(س^{٢}+ا^{٢})^{\frac{١}{٢}}\ ء س = \frac{١}{٢}\frac{(س^{٢}+ا^{٢})^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{\sqrt{(س^{٢}+ا^{٢})^{٣}}}{٣} + ث$

طريقة أخرى

$\int س \sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}\ ء س = ت$

نفرض أن : $ص = س^{٢}+ا^{٢}$ $\Leftarrow$ $ء ص = ٢س\ ء س$ $\Leftarrow$ $ء س = \frac{ء ص}{٢س}$

$\Leftarrow ت = \int س . \sqrt{ص} \frac{ء ص}{٢س} = \frac{١}{٢}\int ء ص \sqrt{ص} = \frac{١}{٢}\times\frac{٢}{٣} ص^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{\sqrt{(س^{٢}+ا^{٢})^{٣}}}{٣} + ث$

طريقة أخرى

$\int س \sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}\ ء س = ت$

نفرض أن : $س = ا ظا ص$ $\Leftarrow$ $ء س = ا قا^{٢} ص\ ء ص$

$\Leftarrow ت = \int ا ظا ص . \sqrt{ا^{٢}+ا^{٢} ظا^{٢} ص} . قا^{٢} ص\ ء ص = ا^{٣} \int ظا ص قا ص (قا^{٢} ص)\ ء ص$

$= ث + \frac{ا^{٣} قا^{٣} ص}{٣}$

$= ث + \frac{\sqrt{(س^{٢}+ا^{٢})^{٣}}}{٣}$

٣٤ $\int س^{٢} \sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\ د س = ت$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف\ د هـ = ف\ هـ - \int هـ\ د ف$

نفرض أن : $ف = س \Leftarrow د ف = د س$

$د هـ = س \sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\ د س \Leftarrow هـ = \frac{١}{٣} \sqrt{(س^{٢}+أ^{٢})^{٣}}$

$\Leftarrow ت = \frac{س}{٣} \sqrt{(س^{٢}+أ^{٢})^{٣}} - \int \frac{١}{٣} \sqrt{(س^{٢}+أ^{٢})^{٣}}\ د س$ (انظر رقم ٣٢)

$= \frac{س}{٨}(٢س^{٢}+أ^{٢}) \sqrt{س^{٢}+أ^{٢}} - \frac{أ^{٤}}{٨} لو\left(س + \sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\right) + ث$

٣٥ $\int \frac{د س}{\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}} = ت$

نفرض أن : $س = أ ظا ص \Leftarrow د س = أ قا^{٢} ص\ د ص$

$\Leftarrow ت = \int \frac{أ قا^{٢} ص\ د ص}{أ قا ص} = \int قا ص\ د ص = \int \frac{قا ص(قا ص + ظا ص)}{قا ص + ظا ص} د ص$

$= لو|قا ص + ظا ص| + ث_{١}$

$= لو\left|\frac{س}{أ} + \frac{\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}}{أ}\right| + ث_{١}$

$= لو\left|\frac{١}{أ}\left(س + \sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\right)\right| + ث_{١}$

$= لو|س + \sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}| + \underbrace{لو\frac{١}{أ} + ث_{١}}_{ث}$

$= لو|س + \sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}| + ث$

طريقة أخرى

$$\int \frac{د س}{\sqrt{س^٢ + ا^٢}} = ت$$

نفرض أن : $\sqrt{س^٢ + ا^٢} = ع - س \Leftarrow س^٢ + ا^٢ = ع^٢ - ٢ ع س + س^٢$

$$\Leftarrow \quad س = \frac{ع^٢ - ا^٢}{٢ ع} \quad ،، \quad ع - س = \frac{ع^٢ + ا^٢}{٢ ع} \quad د س = \frac{ع^٢ + ا^٢}{٢ ع^٢} د ع$$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{ع^٢ + ا^٢}{٢ ع^٢} \cdot \frac{٢ ع}{ع^٢ + ا^٢} د ع = \int \frac{د ع}{ع} = لو|ع| + ث$$

$$= لو|س + \sqrt{س^٢ + ا^٢}| + ث$$

٣٦

$$\int \frac{د س}{\sqrt{(س^٢ + ا^٢)^٣}} = ت$$

نفرض أن : $س = ا ظا ص \Leftarrow د س = ا قا^٢ ص د ص$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{ا قا^٢ ص د ص}{ا^٣ قا^٣ ص} = \int \frac{١}{ا^٢} = \frac{د ص}{قا ص} \int جتا ص د ص = \frac{١}{ا^٢} جا ص + ث$$

$$= \frac{س}{ا^٢ \sqrt{س^٢ + ا^٢}} + ث$$

طريقة أخرى

$$\int \frac{د س}{\sqrt{(س^٢ + ا^٢)^٣}} = ت$$

$$\sqrt{(س^٢ + ا^٢)^٣} = (س^٢ + ا^٢)^{\frac{٣}{٢}} = \left(س^٢ \left(\frac{ا^٢}{س^٢} + ١ \right) \right)^{\frac{٣}{٢}} = س^٣ \left(\frac{ا^٢}{س^٢} + ١ \right)^{\frac{٣}{٢}}$$

نفرض أن : $ص = \frac{ا^٢}{س^٢} + ١ \Leftarrow د ص = \frac{-٢ ا^٢}{س^٣} د س \Leftarrow د س = \frac{-س^٣}{٢ ا^٢} د ص$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{-١}{٢ ا^٢} ص^{-\frac{٣}{٢}} د ص = \frac{١}{ا^٢} ص^{-\frac{١}{٢}} + ث = \frac{س}{ا^٢ \sqrt{س^٢ + ا^٢}} + ث$$

٣٧ $\int \frac{س\, ى\, س}{\sqrt{س^٢ + ا^٢}} = \frac{١}{٢} \int ٢س (س^٢ + ا^٢)^{-\frac{١}{٢}}\, ى\, س = ٢ \times \frac{١}{٢} (س^٢ + ا^٢)^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \sqrt{س^٢ + ا^٢} + ث$

طريقة أخرى

$\int \frac{س\, ى\, س}{\sqrt{س^٢ + ا^٢}} = ت$

نفرض أن : $ص = س^٢ + ا^٢ \Leftarrow ى ص = ٢س\, ى س \Leftarrow ى س = \frac{ى ص}{٢س}$

$\Leftarrow ت = \int \frac{س}{\sqrt{ص}} \times \frac{ى ص}{٢س} = \frac{١}{٢} \int \frac{ى ص}{\sqrt{ص}} = \frac{١}{٢} \times ٢ ص^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \sqrt{س^٢ + ا^٢} + ث$

طريقة أخرى

$\int \frac{س\, ى\, س}{\sqrt{س^٢ + ا^٢}} = ت$

نفرض أن : $س = ا\, ظا\, ص \Leftarrow ى س = ا\, قا^٢ ص\, ى ص$

$\Leftarrow ت = \int \frac{ا\, ظا\, ص\, قا^٢ ص\, ى ص}{\sqrt{ا^٢ + ا^٢\, ظا^٢ ص}} = \int \frac{ا^٢\, ظا\, ص\, قا^٢ ص\, ى ص}{ا\, قا ص} = ا \int ظا\, ص\, قا ص\, ى ص$

$= ا\, قا ص + ث$

$= \sqrt{س^٢ + ا^٢} + ث$

٣٨ $\int \frac{س^{٢}\ ء س}{\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}} = ت$

نفرض أن : $س = أ\ ظا\ ص \Leftarrow ء س = أ\ قا^{٢} ص\ ء ص$

$\Leftarrow ت = \int أ^{٢}\ ظا^{٢} ص\ قا ص\ ء ص = أ^{٢} \int (قا^{٢} ص - ١)\ قا ص\ ء ص = أ^{٢} \left[\int قا^{٣} ص\ ء ص - \int قا ص\ ء ص \right]$

لإيجاد $\int قا^{٣} ص\ ء ص$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف\ ء و = ف\ و - \int و\ ء ف$

نفرض أن : $ف = قا ص \Leftarrow ء ف = قا ص ظا ص\ ء س$

$ء و = قا^{٢} ص\ ء ص \Leftarrow و = ظا ص$

$\Leftarrow \int قا^{٣} ص\ ء ص = قا ص ظا ص - \int قا ص ظا^{٢} ص\ ء ص$

$= قا ص ظا ص - \int قا ص (قا^{٢} ص - ١)\ ء ص$

$= قا ص ظا ص - \int قا^{٣} ص\ ء ص + \int قا ص\ ء ص$

$\Leftarrow \int قا^{٣} ص\ ء ص = \frac{١}{٢} قا ص ظا ص + \frac{١}{٢} \int قا ص\ ء ص$

$\Leftarrow ت = \frac{أ^{٢}}{٢} قا ص ظا ص - \frac{أ^{٢}}{٢} \int قا ص\ ء ص$

$= \frac{أ^{٢}}{٢} قا ص ظا ص - \frac{أ^{٢}}{٢} لو | قا ص + ظا ص | + ث$

$= \frac{أ^{٢}}{٢} \times \frac{\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}}{أ} - \frac{س}{أ} - \frac{أ^{٢}}{٢} لو | قا ص + ظا ص | + ث$

$= \frac{س}{٢} \sqrt{س^{٢}+أ^{٢}} + \frac{أ^{٢}}{٢} لو \left(س + \sqrt{س^{٢}+أ^{٢}} \right) + ث$

طريقة أخرى

$$\int \frac{س^{٢}\ ى\ س}{\sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}} = ت$$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف\ ى\ هـ = ف\ هـ - \int هـ\ ى\ ف$

نفرض أن : $ف = س \Leftarrow ى ف = ى س$

$$ى هـ = \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}}\ ى س \Leftarrow هـ = \sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}$$

$$\Leftarrow ت = س\sqrt{س^{٢}+ا^{٢}} - \int \sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}\ ى س$$ (انظر رقم ٣١)

$$= س\sqrt{س^{٢}+ا^{٢}} - \frac{س}{٢}\sqrt{س^{٢}+ا^{٢}} - \frac{ا^{٢}}{٢}\ لو\left(س + \sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}\right) + ث$$

$$= \frac{س}{٢}\sqrt{س^{٢}+ا^{٢}} - \frac{ا^{٢}}{٢}\ لو\left(س + \sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}\right) + ث$$

٣٩ $$\int \frac{س^{٢}\ ى\ س}{\sqrt{(س^{٢}+ا^{٢})^{٣}}} = ت$$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف\ ى\ هـ = ف\ هـ - \int هـ\ ى\ ف$

نفرض أن : $ف = س \Leftarrow ى ف = ى س$

$$ى هـ = \frac{س}{\sqrt{(س^{٢}+ا^{٢})^{٣}}}\ ى س \Leftarrow هـ = \frac{-١}{\sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}}$$

$$\Leftarrow ت = \frac{-س}{\sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}} + \int \frac{ى س}{\sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}}$$ (انظر رقم ٣٥)

$$= -\frac{س}{\sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}} + لو\left(س + \sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}\right) + ث$$

طريقة أخرى

$$\text{ت} = \int \frac{\text{س}^{٢}\ \text{د س}}{\sqrt{(\text{س}^{٢}+\text{أ}^{٢})^{٣}}}$$

نفرض أن : $\text{س} = \text{أ ظا ص} \Leftarrow \text{د س} = \text{أ قا}^{٢}\text{ص د ص}$

$$\Leftarrow \text{ت} = \int \frac{\text{ظا}^{٢}\text{ص}}{\text{قا ص}}\ \text{د ص} = \int \text{ظا}^{٢}\text{ص جتا ص د ص} = \int \frac{\text{جا}^{٢}\text{ص}}{\text{جتا ص}}\ \text{د ص}$$

نفرض أن : $\text{ع} = \text{جا ص} \Leftarrow \text{د ع} = \text{جتا ص د ص}$

$$\Leftarrow \text{ت} = \int \frac{\text{ع}^{٢}}{\text{١} - \text{ع}^{٢}}\ \text{د ع} = -\int \frac{-\text{ع}^{٢}}{\text{١} - \text{ع}^{٢}}\ \text{د ع}$$

$$= -\int \frac{\text{١} + \text{١} - \text{ع}^{٢}}{\text{١} - \text{ع}^{٢}}\ \text{د ع}$$

$$= -\int \left(\frac{\text{١}}{\text{١} - \text{ع}^{٢}} - \text{١}\right) \text{د ع}$$

$$= -\int \frac{\text{١}}{\text{١} - \text{ع}^{٢}}\ \text{د ع} + \text{ع} + \text{ث}_{\text{١}} \qquad (\text{انظر رقم } ١٣)$$

$$= -\frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{لو}\frac{\text{١} + \text{ع}}{\text{١} - \text{ع}} + \text{ث}_{\text{١}}$$

$$= -\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{أ}^{٢}}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{لو}\frac{\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{أ}^{٢}} + \text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{أ}^{٢}} - \text{س}} + \text{ث}_{\text{١}}$$

$$= -\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{أ}^{٢}}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{لو}\left(\frac{\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{أ}^{٢}} + \text{س}}{\text{أ}}\right)^{٢} + \text{ث}_{\text{١}}$$

$$= -\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{أ}^{٢}}} + \text{لو}\left(\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{أ}^{٢}} + \text{س}\right) + \underbrace{\text{ث}_{\text{١}} - \text{لو أ}}_{\text{ث}}$$

$$= -\frac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{أ}^{٢}}} + \text{لو}\left(\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{أ}^{٢}} + \text{س}\right) + \text{ث}$$

طريقة أخرى

$$\int \frac{س^{٢}\ ء س}{\sqrt{(س^{٢}+أ^{٢})^{٣}}} = \int \frac{س^{٢}+أ^{٢}-أ^{٢}}{\sqrt{(س^{٢}+أ^{٢})^{٣}}} ء س$$

$$= \int \frac{ء س}{\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}} - أ^{٢} \int \frac{ء س}{\sqrt{(س^{٢}+أ^{٢})^{٣}}}$$ (انظر رقم ٣٥ ، ٣٦)

$$= - \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}} + لو\left(س + \sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}\right) + ث$$

٤٠ $$\int \frac{ء س}{س\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}} = ت$$

نفرض أن : $ص^{٢} = س^{٢}+أ^{٢}$ $\Leftarrow$ $ء س = \frac{ص}{س} ء ص$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{ص}{س^{٢} ص} ء ص = \int \frac{١}{ص^{٢}-أ^{٢}} ء ص$$ (انظر رقم ١٣)

$$= \frac{١}{٢أ} لو \frac{ص-أ}{ص+أ} + ث$$

$$= \frac{١}{٢أ} لو \frac{\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}-أ}{\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}+أ} + ث$$

$$= \frac{١}{٢أ} لو \left(\frac{س}{\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}+أ}\right)^{٢} + ث$$

$$= \frac{١}{أ} لو \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+أ^{٢}}+أ} + ث$$

طريقة أخرى

$$\int \frac{د س}{س \sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}} = ت$$

نفرض أن : $ص = \frac{١}{س} \Leftarrow د ص = \frac{-١}{س^{٢}} د س \Leftarrow د س = -س^{٢} د ص$

$$س = \frac{١}{ص} \Leftarrow س^{٢}+ا^{٢} = \frac{١}{ص^{٢}}+ا^{٢} = \frac{١+ا^{٢} ص^{٢}}{ص^{٢}}$$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{-س^{٢}}{\frac{س}{ص} \sqrt{١+(اص)^{٢}}} د ص = -\int \frac{د ص}{\sqrt{١+(اص)^{٢}}}$$

نفرض أن : $ع = اص \Leftarrow د ع = ا د ص$

$$\Leftarrow ت = -\frac{١}{ا} \int \frac{د ع}{\sqrt{١+ع^{٢}}} = -\frac{١}{ا} لو\left(ع+\sqrt{١+ع^{٢}}\right)+ت \quad (\text{انظر رقم } ٣٥)$$

$$= -\frac{١}{ا} لو\left(\frac{ا}{س}+\sqrt{١+\left(\frac{ا}{س}\right)^{٢}}\right)+ت$$

$$= -\frac{١}{ا} لو\frac{ا+\sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}}{س}+ت$$

$$= \frac{١}{ا} لو\frac{س}{ا+\sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}}+ت$$

٤١ $\int \frac{د س}{س^{٢} \sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}} = ت$

نفرض أن : $ص = \frac{ا}{س} \Leftarrow د ص = \frac{-ا}{س^{٢}} د س$ ، $س^{٢}+ا^{٢} = \frac{ا^{٢}+ا^{٢} ص^{٢}}{ص^{٢}}$

$$\Leftarrow ت = -\frac{١}{ا^{٢}} \int \frac{ص د ص}{\sqrt{١+ص^{٢}}} = -\frac{١}{ا^{٢}} \sqrt{١+ص^{٢}} + ت = -\frac{\sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}}{ا^{٢} س}+ت$$

طريقة أخرى

$$\int \frac{\text{د س}}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{أ}^{٢}}} = \int \frac{\text{د س}}{\text{س}^{٢}\sqrt{\left(\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{س}^{٢}}+١\right)\text{س}^{٢}}} = \int \frac{\text{د س}}{\text{س}^{٣}\sqrt{\frac{\text{أ}^{٢}}{\text{س}^{٢}}+١}} = \text{ت}$$

نفرض أن : $\text{ص}^{٢} = \frac{\text{أ}^{٢}}{\text{س}^{٢}}+١$ $\Leftarrow$ $\text{د س} = -\frac{\text{س}^{٣}}{\text{أ}^{٢}}\text{ص}\,\text{د ص}$

$$\Leftarrow \text{ت} = -\int \frac{١}{\text{أ}^{٢}} \frac{\text{س}^{٣}\,\text{ص}}{\text{س}^{٣}\,\text{ص}}\,\text{د ص} = -\int \frac{١}{\text{أ}^{٢}}\,\text{د ص} = -\frac{١}{\text{أ}^{٢}}\text{ص} + \text{ث}$$

$$= -\frac{\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{أ}^{٢}}}{\text{أ}^{٢}\,\text{س}} + \text{ث}$$

٤٢ $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}^{٣}\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{أ}^{٢}}} = \text{ت}$

نفرض أن : $\text{ص}^{٢} = \text{س}^{٢}+\text{أ}^{٢}$ $\Leftarrow$ $\text{د س} = \frac{\text{ص}}{\text{س}}\,\text{د ص}$

$$\Leftarrow \text{ت} = \int \frac{١}{\text{س}^{٤}}\,\text{د ص} = \int \left(\frac{١}{\text{ص}^{٢}-\text{أ}^{٢}}\right)^{٢}\,\text{د ص}$$

$$= \frac{١}{٤\text{أ}^{٢}}\int \left(\frac{١}{\text{ص}-\text{أ}}-\frac{١}{\text{ص}+\text{أ}}\right)^{٢}\,\text{د ص}$$

$$= \frac{١}{٤\text{أ}^{٢}}\int \left(\frac{١}{(\text{ص}-\text{أ})^{٢}}+\frac{١}{(\text{ص}+\text{أ})^{٢}}-\frac{٢}{\text{ص}^{٢}-\text{أ}^{٢}}\right)\text{د ص}$$

$$= -\frac{١}{٤\text{أ}^{٢}}\left(\frac{١}{\text{ص}-\text{أ}}+\frac{١}{\text{ص}+\text{أ}}+\int \frac{٢}{\text{ص}^{٢}-\text{أ}^{٢}}\,\text{د ص}\right) \quad (\text{انظر رقم } ١٣)$$

$$= -\frac{١}{٤\text{أ}^{٢}}\left(\frac{١}{\text{ص}-\text{أ}}+\frac{١}{\text{ص}+\text{أ}}+\frac{١}{\text{أ}}\,\text{لو}\frac{\text{ص}-\text{أ}}{\text{ص}+\text{أ}}\right)+\text{ث} \quad (\text{انظر رقم } ٤٠)$$

$$= -\frac{\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{أ}^{٢}}}{٢\text{أ}^{٢}\,\text{س}^{٢}}+\frac{١}{٣\text{أ}^{٢}}\,\text{لو}\frac{\text{أ}+\sqrt{\text{س}^{٢}+\text{أ}^{٢}}}{\text{س}}+\text{ث}$$

طريقة أخرى

$$\int \frac{د س}{س^{٣} \sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}} = ت$$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف \, د هـ = ف هـ - \int هـ \, د ف$

نفرض أن : $ف = \frac{١}{س} \Leftarrow د ف = - \frac{١}{س^{٢}} د س$

$$د هـ = \frac{١}{س^{٢} \sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}} د س \Leftarrow هـ = - \frac{\sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}{أ^{٢} س}$$ (انظر رقم ٤١)

$$\Leftarrow ت = - \frac{\sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}{أ^{٢} س^{٢}} - \int \frac{\sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}{أ^{٢} س^{٣}} د س$$

$$= - \frac{\sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}{أ^{٢} س^{٢}} - \int \frac{١}{أ^{٢}} \frac{\sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}{س^{٣}} د س$$

$$= - \frac{\sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}{أ^{٢} س^{٢}} - \int \frac{١}{أ^{٢}} \frac{\sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}{س^{٣}} \times \frac{\sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}{\sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}} د س$$

$$= - \frac{\sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}{أ^{٢} س^{٢}} - \int \frac{١}{أ^{٢}} \frac{س^{٢} + أ^{٢}}{س^{٣} \sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}} د س$$

$$= - \frac{\sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}{أ^{٢} س^{٢}} - \int \frac{١}{أ^{٢}} \frac{د س}{س \sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}} - \int \frac{د س}{س^{٣} \sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}$$

$$\Leftarrow ٢ت = - \frac{\sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}{أ^{٢} س^{٢}} - \int \frac{١}{أ^{٢}} \frac{د س}{س \sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}$$ (انظر رقم ٤٠)

$$\Leftarrow ت = - \frac{\sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}{٢ أ^{٢} س^{٢}} - \frac{١}{٢ أ^{٣}} لو \frac{أ + \sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}{س} + ث$$

$$= - \frac{\sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}{٢ أ^{٢} س^{٢}} + \frac{١}{٢ أ^{٣}} لو \frac{أ + \sqrt{س^{٢} + أ^{٢}}}{س} + ث$$

٤٣ $$\int \frac{\sqrt{س^٢ + ا^٢}\ د س}{س} = \int \frac{س^٢ + ا^٢}{س \sqrt{س^٢ + ا^٢}}\ د س$$

$$= \int \frac{س}{\sqrt{س^٢ + ا^٢}}\ د س + ا^٢ \int \frac{د س}{س \sqrt{س^٢ + ا^٢}}$$ (انظر رقم ٣٧ ، ٤٠)

$$= \sqrt{س^٢ + ا^٢} + ا^٢ \text{ لو} \frac{س}{ا + \sqrt{س^٢ + ا^٢}}$$

$$= \sqrt{س^٢ + ا^٢} - ا^٢ \text{ لو} \frac{ا + \sqrt{س^٢ + ا^٢}}{س} + ث$$

طريقة أخرى

$$\int \frac{\sqrt{س^٢ + ا^٢}\ د س}{س} = ت$$

نفرض أن : $ص^٢ = س^٢ + ا^٢$ $\Leftarrow$ $د س = \frac{ص}{س} د ص$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{ص^٢}{س^٢}\ د ص = \int \frac{ص^٢}{ص^٢ - ا^٢}\ د ص$$

$$= \int \frac{ص^٢ - ا^٢ + ا^٢}{ص^٢ - ا^٢}\ د ص$$

$$= \int \left(\frac{ا^٢}{ص^٢ - ا^٢} + ١ \right) د ص$$

$$= ص + ا^٢ \int \frac{١}{ص^٢ - ا^٢}\ د ص$$ (انظر رقم ١٣)

$$= ص + \frac{ا^٢}{٢} \text{ لو} \frac{ص - ا}{ص + ا} + ث$$ (انظر رقم ٤٠)

$$= \sqrt{س^٢ + ا^٢} - ا^٢ \text{ لو} \frac{ا + \sqrt{س^٢ + ا^٢}}{س} + ث$$

٤٤ $\int \frac{\sqrt{س^٢ + أ^٢}\ د س}{س^٢} = \int \frac{س^٢ + أ^٢}{س^٢ \sqrt{س^٢ + أ^٢}}\ د س$

$= \int \frac{د س}{س^٢ \sqrt{س^٢ + أ^٢}} + أ^٢ \int \frac{د س}{س^٢ \sqrt{س^٢ + أ^٢}}$ (انظر رقم ٣٥ ، ٤١)

$= لـو\left(س + \sqrt{س^٢ + أ^٢}\right) - \frac{\sqrt{س^٢ + أ^٢}}{أ^٢ س} + ث$

$= -\frac{\sqrt{س^٢ + أ^٢}}{س} + لـو\left(س + \sqrt{س^٢ + أ^٢}\right) + ث$

طريقة أخرى

$\int \frac{\sqrt{س^٢ + أ^٢}\ د س}{س^٢} = ت$

نفرض أن : $س = أ\ ظا\ ص \Leftarrow د س = أ\ قا^٢ ص\ د ص$

$\Leftarrow ت = \int \frac{أ^٢\ قا^٣ ص}{أ^٢\ ظا^٢ ص} د ص = \int \frac{١}{جتا ص\ جا^٢ ص} د ص = \int قا ص\ قتا^٢ ص\ د ص$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف\ د هـ = ف\ هـ - \int هـ\ د ف$

نفرض أن : $ف = قا ص \Leftarrow د ف = قا ص ظا ص\ د س$

$د هـ = قتا^٢ ص\ د ص \Leftarrow هـ = ظتا ص$

$\Leftarrow ت = -قا ص ظتا ص + \int قا ص ظا ص ظتا ص\ د ص$

$= -قا ص ظتا ص + \int قا ص\ د ص$ (انظر رقم ٣٥)

$= -قتا ص + لـو\left(قا ص + ظا ص\right) + ث$

$= -\frac{\sqrt{س^٢ + أ^٢}}{س} + لـو\left(س + \sqrt{س^٢ + أ^٢}\right) + ث$

المجموعة الخامسة

الدوال التي تحتوي على $\sqrt{أ^٢ - س^٢}$

٤٥ $\int \frac{د س}{\sqrt{١ - س^٢}} = جا^{-١} س + ث$

٤٦ $\int \frac{د س}{\sqrt{أ^٢ - س^٢}} = جا^{-١} \frac{س}{أ} + ث$

٤٧ $\int \frac{د س}{(أ^٢ - س^٢)\sqrt{أ^٢ - س^٢}} = \frac{س}{أ^٢ \sqrt{أ^٢ - س^٢}} + ث$

٤٨ $\int \frac{س د س}{\sqrt{أ^٢ - س^٢}} = - \sqrt{أ^٢ - س^٢} + ث$

٤٩ $\int \frac{س د س}{(أ^٢ - س^٢)\sqrt{أ^٢ - س^٢}} = \frac{١}{\sqrt{أ^٢ - س^٢}} + ث$

٥٠ $\int \frac{س^٢ د س}{\sqrt{أ^٢ - س^٢}} = - \frac{س}{٢} \sqrt{أ^٢ - س^٢} + \frac{أ^٢}{٢} جا^{-١} \frac{س}{أ} + ث$

٥١ $\int \sqrt{أ^٢ - س^٢} د س = \frac{س}{٢} \sqrt{أ^٢ - س^٢} + \frac{أ^٢}{٢} جا^{-١} \frac{س}{أ} + ث$

٥٢ $\int \sqrt{(أ^٢ - س^٢)^٣} د س = \frac{س}{٨}(٥أ^٢ - ٢س^٢) \sqrt{أ^٢ - س^٢} + \frac{٣أ^٤}{٨} جا^{-١} \frac{س}{أ} + ث$

٥٣ $\int س\sqrt{م^٢ - س^٢}^{٣}\, ى س = -\frac{\sqrt{(م^٢ - س^٢)^{٣}}}{٣} + ث$

٥٤ $\int س\sqrt{(م^٢ - س^٢)^{٣}}\, ى س = -\frac{\sqrt{(م^٢ - س^٢)^{٥}}}{٥} + ث$

٥٥ $\int س^٢\sqrt{م^٢ - س^٢}\, ى س = \frac{س}{٨}(٢س^٢ - م^٢)\sqrt{م^٢ - س^٢} + \frac{م^٤}{٨}\, جا^{-١}\frac{س}{م} + ث$

٥٦ $\int \frac{س^٢\, ى س}{\sqrt{(م^٢ - س^٢)^{٣}}} = \frac{س}{\sqrt{م^٢ - س^٢}} - جا^{-١}\frac{س}{م} + ث$

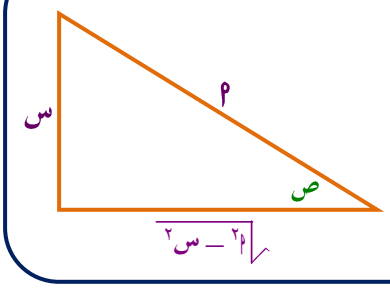
٥٧ $\int \frac{ى س}{س\sqrt{م^٢ - س^٢}} = \frac{١}{م}\, لو\frac{س}{م + \sqrt{م^٢ - س^٢}} + ث$

٥٨ $\int \frac{ى س}{س^٢\sqrt{م^٢ - س^٢}} = -\frac{\sqrt{م^٢ - س^٢}}{م^٢ س} + ث$

٥٩ $\int \frac{ى س}{س^٣\sqrt{م^٢ - س^٢}} = -\frac{\sqrt{م^٢ - س^٢}}{٢م^٢ س^٢} + \frac{١}{٢م^٣}\, لو\frac{س}{م + \sqrt{م^٢ - س^٢}} + ث$

٦٠ $\int \frac{\sqrt{م^٢ - س^٢}\, ى س}{س} = \sqrt{م^٢ - س^٢} - م\, لو\frac{م + \sqrt{م^٢ - س^٢}}{س} + ث$

٦١ $\int \frac{\sqrt{م^٢ - س^٢}\, ى س}{س^٢} = -\frac{\sqrt{م^٢ - س^٢}}{س} - جا^{-١}\frac{س}{م} + ث$



عند استخدام التعويض

س = م جا ص

ارجع لهذا المثلث لإيجاد الدوال المثلثية

المشاركون في حل المجموعة الخامسة

رقم التكامل	المشاركون
٤٥	عبد الواحد hamza_mn
٤٦	عبد الواحد hamza_mn
٤٧	hamza_mn - mourad24000
٤٨	خالد أبو محمود - عبد الواحد hamza_mn
٤٩	خالد أبو محمود - عبد الواحد hamza_mn
٥٠	عبد الواحد hamza_mn
٥١	عبد الواحد hamza_mn
٥٢	عبد الواحد hamza_mn
٥٣	خالد أبو محمود - عبد الواحد hamza_mn
٥٤	خالد أبو محمود - عبد الواحد hamza_mn
٥٥	عبد الواحد hamza_mn
٥٦	عبد الواحد hamza_mn
٥٧	خالد أبو محمود - عبد الواحد hamza_mn
٥٨	خالد أبو محمود - عبد العاطي وفا hamza_mn
٥٩	عبد العاطي وفا hamza_mn
٦٠	عبد العاطي وفا hamza_mn
٦١	عبد العاطي وفا hamza_mn

٤٥ $\int \frac{د س}{\sqrt{١ - س^{٢}}} = ت$

نفرض أن : $س = جا\ ص \Leftarrow د س = جتا ص\ د ص$

$\Leftarrow ت = \int \frac{جتا ص\ د ص}{\sqrt{١ - جا^{٢} ص}} = \int \frac{جتا ص\ د ص}{جتا ص} = ص + ث = جا^{-١}\ س + ث$

٤٦ $\int \frac{د س}{\sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}} = ت$

نفرض أن : $س = أ جا\ ص \Leftarrow د س = أ جتا ص\ د ص$

$\Leftarrow ت = \int \frac{أ جتا ص\ د ص}{\sqrt{أ^{٢}(١ - جا^{٢} ص)}} = \int \frac{جتا ص\ د ص}{جتا ص} = ص + ث = جا^{-١} \frac{س}{أ} + ث$

٤٧ $\int \frac{د س}{\sqrt{(أ^{٢} - س^{٢})^{٣}}} = ت$

نفرض أن : $س = أ جا\ ص \Leftarrow د س = أ جتا ص\ د ص$

$\Leftarrow ت = \int \frac{أ جتا ص\ د ص}{\sqrt{أ^{٦}(١ - جا^{٢} ص)^{٣}}} = \int \frac{أ جتا ص\ د ص}{أ^{٣} جتا^{٣} ص} = \frac{١}{أ^{٢}} \int قا^{٢} ص\ د ص = \frac{١}{أ^{٢}} ظا ص + ث$

$= \frac{س}{أ^{٢}\sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}} + ث$

طريقة أخرى

$\int \frac{د س}{\sqrt{(أ^{٢} - س^{٢})^{٣}}} = \int \frac{د س}{\sqrt{\left(\left(١ - \frac{أ^{٢}}{س^{٢}}\right) س^{٢}\right)^{٣}}} = \int \frac{د س}{س^{٣}\sqrt{\left(١ - \frac{أ^{٢}}{س^{٢}}\right)^{٣}}} = ت$

نفرض أن : $ص^{٢} = ١ - \frac{أ^{٢}}{س^{٢}} \Leftarrow د س = \frac{-س^{٣}}{أ^{٢}} ص\ د ص$

$\Leftarrow ت = \int \frac{١}{أ^{٢}} \frac{س^{٣} ص}{س^{٣} ص^{٣}} د ص = \int \frac{١}{أ^{٢}} \frac{د ص}{ص^{٢}} = -\frac{١}{أ^{٢} ص} + ث = \frac{س}{أ^{٢}\sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}} + ث$

٤٨ $\int \frac{س\, ى\, س}{\sqrt{ا^٢ - س^٢}} = ت$

نفرض أن : $ص^٢ = ا^٢ - س^٢$ $\Leftarrow$ $ى\, س = -\frac{ص}{س}\, ى\, ص$

$\Leftarrow ت = -\int \frac{س ص\, ى\, ص}{ص\, س} = -\int ى\, ص = -ص + ث = -\sqrt{ا^٢ - س^٢} + ث$

طريقة أخرى

$$\int \frac{س\, ى\, س}{\sqrt{ا^٢ - س^٢}} = -\frac{١}{٢}\int -٢س(ا^٢ - س^٢)^{-\frac{١}{٢}}\, ى\, س = -\frac{١}{٢}\times ٢(ا^٢ - س^٢)^{\frac{١}{٢}} + ث$$

$$= -\sqrt{ا^٢ - س^٢} + ث$$

٤٩ $\int \frac{س\, ى\, س}{\sqrt{(ا^٢ - س^٢)^٣}} = ت$

نفرض أن : $ص^٢ = ا^٢ - س^٢$ $\Leftarrow$ $ى\, س = -\frac{ص}{س}\, ى\, ص$

$\Leftarrow ت = -\int \frac{س ص\, ى\, ص}{ص^٣\, س} = -\int \frac{ى\, ص}{ص^٢} = ث + \frac{١}{ص} = ث + \frac{١}{\sqrt{ا^٢ - س^٢}}$

طريقة أخرى

$$\int \frac{س\, ى\, س}{\sqrt{(ا^٢ - س^٢)^٣}} = -\frac{١}{٢}\int -٢س(ا^٢ - س^٢)^{-\frac{٣}{٢}}\, ى\, س = -\frac{١}{٢}\times ٢(ا^٢ - س^٢)^{-\frac{١}{٢}} + ث$$

$$= ث + \frac{١}{\sqrt{ا^٢ - س^٢}}$$

٥٠ $\int \frac{س^{٢}\ د س}{\sqrt{أ^{٢}-س^{٢}}} = ت$

نفرض أن : $س = أ جا ص \Leftarrow د س = أ جتا ص\ د ص$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{أ^{٣}\ جا^{٢} ص\ جتا ص\ د ص}{أ\ جتا ص} = \int أ^{٢}\ جا^{٢} ص\ د ص = \int \frac{أ^{٢}}{٢}(١-جتا ٢ص)\ د ص$$

$$= \frac{أ^{٢}}{٢}\left[ص - \frac{١}{٢} جا ٢ص\right] + ت$$

$$= \frac{أ^{٢}}{٢}\left[ص - جا ص جتا ص\right] + ت$$

$$= \frac{أ^{٢}}{٢}\left[جا^{-١}\frac{س}{أ} - \frac{س}{أ}\times\frac{\sqrt{أ^{٢}-س^{٢}}}{أ}\right] + ت$$

$$= \frac{س}{٢}\sqrt{أ^{٢}-س^{٢}} + \frac{أ^{٢}}{٢} جا^{-١}\frac{س}{أ} + ت$$

٥١ $\int \sqrt{أ^{٢}-س^{٢}}\ د س = ت$

نفرض أن : $س = أ جا ص \Leftarrow د س = أ جتا ص\ د ص$

$$\Leftarrow ت = \int أ^{٢}\ جتا^{٢} ص\ د ص = \int \frac{أ^{٢}}{٢}(١+جتا ٢ص)\ د ص = \frac{أ^{٢}}{٢}\left[ص + \frac{١}{٢} جا ٢ص\right] + ت$$

$$= \frac{أ^{٢}}{٢}\left[ص + جا ص جتا ص\right] + ت$$

$$= \frac{أ^{٢}}{٢}\left[جا^{-١}\frac{س}{أ} + \frac{س}{أ}\times\frac{\sqrt{أ^{٢}-س^{٢}}}{أ}\right] + ت$$

$$= \frac{س}{٢}\sqrt{أ^{٢}-س^{٢}} + \frac{أ^{٢}}{٢} جا^{-١}\frac{س}{أ} + ت$$

٥٢ $\int \sqrt{(أ^٢ - س^٢)^٣}\ د س = ت$

نفرض أن : $س = أ جا ص \Leftarrow د س = أ جتا ص\ د ص$

$\Leftarrow ت = \int \sqrt{(أ^٢ جتا^٢ ص)^٣} \times أ^٢ جتا ص\ د ص = أ^٤ \int جتا^٤ ص\ د ص = \frac{أ^٤}{٤} \int (١+جتا٢ص)^٢ د ص$

$(١+جتا٢ص)^٢ = (١+٢جتا٢ص+جتا^٢ ٢ص) = \left(١+٢جتا٢ص+\frac{١}{٢}(١+جتا٤ص)\right)$

$= \frac{١}{٢}(٢+٤جتا٢ص+١+جتا٤ص)$

$= \frac{١}{٢}(٣+٤جتا٢ص+جتا٤ص)$

$\Leftarrow ت = \frac{أ^٤}{٨} \int (٣+٤جتا٢ص+جتا٤ص) د ص = \frac{أ^٤}{٨}\left(٣ص+٢جا٢ص+\frac{١}{٤}جا٤ص\right) + ث$

$جا٢ص = ٢جاص جتاص = \frac{٢س\sqrt{أ^٢ - س^٢}}{أ^٢}$

$جا٤ص = ٢جا٢ص جتا٢ص = ٢جا٢ص(١-٢جا^٢ ص)$

$= \frac{٤س\sqrt{أ^٢ - س^٢}}{أ^٢}\left(\frac{٢س^٢}{أ^٢} - ١\right)$

$= \frac{٤س\sqrt{أ^٢ - س^٢}}{أ^٢} - \frac{٨س^٣\sqrt{أ^٢ - س^٢}}{أ^٤}$

$\Leftarrow ت = \frac{أ^٤}{٨}\left(٣جا^{-١}\frac{س}{أ} + \frac{س}{أ^٢}\sqrt{أ^٢ - س^٢} + \frac{٤س\sqrt{أ^٢ - س^٢}}{أ^٢} - \frac{٢س^٣\sqrt{أ^٢ - س^٢}}{أ^٤}\right) + ث$

$= \frac{أ^٤}{٨}\left(٣جا^{-١}\frac{س}{أ} + \frac{س}{أ^٢}\sqrt{أ^٢ - س^٢} + \frac{٥س\sqrt{أ^٢ - س^٢}}{أ^٢} - \frac{٢س^٣\sqrt{أ^٢ - س^٢}}{أ^٤}\right) + ث$

$= \frac{س}{٨}(٥أ^٢ - ٢س^٢)\sqrt{أ^٢ - س^٢} + \frac{٣أ^٤}{٨} جا^{-١}\frac{س}{أ} + ث$

٥٣ $\int س\sqrt{ا^٢ - س^٢}\ ء س = ت$

نفرض أن : $ص^٢ = ا^٢ - س^٢$ $\Leftarrow$ $ء س = -\frac{ص}{س}\ ء ص$

$\Leftarrow ت = -\int ص^٢\ ء ص = -\frac{ص^٣}{٣} + ث = -\frac{\sqrt{(ا^٢ - س^٢)^٣}}{٣} + ث$

طريقة أخرى

$\int س\sqrt{ا^٢ - س^٢}\ ء س = -\frac{١}{٢}\int -٢س(ا^٢ - س^٢)^{\frac{١}{٢}}\ ء س = -\frac{١}{٢}\times\frac{٢(ا^٢ - س^٢)^{\frac{٣}{٢}}}{٣} + ث$

$= -\frac{\sqrt{(ا^٢ - س^٢)^٣}}{٣} + ث$

٥٤ $\int س\sqrt{(ا^٢ - س^٢)^٣}\ ء س = ت$

نفرض أن : $ص^٢ = ا^٢ - س^٢$ $\Leftarrow$ $ء س = -\frac{ص}{س}\ ء ص$

$\Leftarrow ت = -\int ص^٤\ ء ص = -\frac{ص^٥}{٥} + ث = -\frac{\sqrt{(ا^٢ - س^٢)^٥}}{٥} + ث$

طريقة أخرى

$\int س\sqrt{(ا^٢ - س^٢)^٣}\ ء س = -\frac{١}{٢}\int -٢س(ا^٢ - س^٢)^{\frac{٣}{٢}}\ ء س = -\frac{١}{٢}\times\frac{٢(ا^٢ - س^٢)^{\frac{٥}{٢}}}{٥} + ث$

$= -\frac{\sqrt{(ا^٢ - س^٢)^٥}}{٥} + ث$

٥٥ $\int س^{٢} \sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}\ د س = ت$

نفرض أن : $س = أ جا ص \Leftarrow د س = أ جتا ص\ د ص$

$\Leftarrow ت = \int أ^{٤} جا^{٢} ص جتا^{٢} ص\ د ص = \int أ^{٤} (جا ص جتا ص)^{٢}\ د ص = \int \frac{أ^{٢}}{٤} جا^{٢} ٢ص\ د ص$

$= \int \frac{أ^{٢}}{٨} (١ - جتا ٤ص)\ د ص$

$= \frac{أ^{٢}}{٨} \left[ص - \frac{١}{٤} جا ٤ص \right] + ت$

$جا ٤ص = \frac{٤س \sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}}{أ^{٢}} - \frac{٨س^{٣} \sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}}{أ^{٤}}$ (انظر رقم ٥٢)

$\Leftarrow ت = \frac{أ^{٤}}{٨} \left(جا^{-١} \frac{س}{أ} - \frac{س \sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}}{أ^{٢}} + \frac{٢س^{٣} \sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}}{أ^{٤}} \right) + ت$

$= \frac{س}{٨} (٢س^{٢} - أ^{٢}) \sqrt{أ^{٢} - س^{٢}} + \frac{أ^{٤}}{٨} جا^{-١} \frac{س}{أ} + ت$

طريقة أخرى

$\int س^{٢} \sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}\ د س = ت$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف\ د هـ = ف هـ - \int هـ\ د ف$

نفرض أن : $ف = س \Leftarrow د ف = د س$

$د هـ = س \sqrt{أ^{٢} - س^{٢}}\ د س \Leftarrow هـ = -\frac{\sqrt{(أ^{٢} - س^{٢})^{٣}}}{٣}$ (انظر رقم ٥٣)

$\Leftarrow ت = -\frac{١}{٣} س \sqrt{(أ^{٢} - س^{٢})^{٣}} + \frac{١}{٣} \int \sqrt{(أ^{٢} - س^{٢})^{٣}}\ د س$ (انظر رقم ٥٢)

$= -\frac{١}{٣} س \sqrt{(أ^{٢} - س^{٢})^{٣}} + \left(\frac{س}{٨} (٥أ^{٢} - ٢س^{٢}) \sqrt{أ^{٢} - س^{٢}} + \frac{٣أ^{٤}}{٨} جا^{-١} \frac{س}{أ} + ت \right)$

$= \frac{س}{٨} (٢س^{٢} - أ^{٢}) \sqrt{أ^{٢} - س^{٢}} + \frac{أ^{٤}}{٨} جا^{-١} \frac{س}{أ} + ت$

٥٦ $\int \frac{س^{٢}\ ى\ س}{\sqrt{(أ^{٢}-س^{٢})^{٣}}} = ث$

نفرض أن : $س = أ جا\ ص \Leftarrow ى\ س = أ\ جتا\ ص\ ى\ ص$

$\Leftarrow ث = \int \frac{أ^{٣}\ جا^{٢}\ ص\ جتا\ ص\ ى\ ص}{أ^{٣}\ جتا^{٣}\ ص} = \int ظا^{٢}\ ص\ ى\ ص = \int (قا^{٢}\ ص - ١)\ ى\ ص$

$= ظا\ ص - ص + ث$

$= \frac{س}{\sqrt{أ^{٢}-س^{٢}}} - جا^{-١}\frac{س}{أ} + ث$

طريقة أخرى

$\int \frac{س^{٢}\ ى\ س}{\sqrt{(أ^{٢}-س^{٢})^{٣}}} = ث$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\boxed{\int ف\ ى\ هـ = ف\ هـ - \int هـ\ ى\ ف}$

نفرض أن : $ف = س \Leftarrow ى\ ف = ى\ س$

$ى\ هـ = \frac{س\ ى\ س}{\sqrt{(أ^{٢}-س^{٢})^{٣}}} \Leftarrow هـ = \frac{١}{\sqrt{أ^{٢}-س^{٢}}}$ (انظر رقم ٤٩)

$\Leftarrow ث = \frac{س}{\sqrt{أ^{٢}-س^{٢}}} - \int \frac{ى\ س}{\sqrt{أ^{٢}-س^{٢}}}$ (انظر رقم ٤٦)

$= \frac{س}{\sqrt{أ^{٢}-س^{٢}}} - جا^{-١}\frac{س}{أ} + ث$

٥٧ $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}\sqrt{\text{أ}^2 - \text{س}^2}} = \text{ت}$

نفرض أن : $\text{س} = \text{أ جا ص} \Leftarrow \text{د س} = \text{أ جتاص د ص}$

$$\Leftarrow \text{ت} = \int \frac{\text{أ جتاص د ص}}{\text{أ}^2 \text{ جاص جتاص}} = \int \frac{1}{\text{أ}} \text{ قتاص د ص} = \frac{1}{\text{أ}} \int \frac{\text{قتاص}(\text{قتاص} + \text{ظتاص})}{\text{قتاص} + \text{ظتاص}} \text{ د ص}$$

$$= -\frac{1}{\text{أ}} \text{لو}(\text{قتاص} + \text{ظتاص}) + \text{ث}$$

$$= -\frac{1}{\text{أ}} \text{لو}\left(\frac{\text{أ}}{\text{س}} + \frac{\sqrt{\text{أ}^2 - \text{س}^2}}{\text{س}}\right) + \text{ث}$$

$$= -\frac{1}{\text{أ}} \text{لو} \frac{\text{أ} + \sqrt{\text{أ}^2 - \text{س}^2}}{\text{س}} + \text{ث}$$

$$= \frac{1}{\text{أ}} \text{لو} \frac{\text{س}}{\text{أ} + \sqrt{\text{أ}^2 - \text{س}^2}} + \text{ث}$$

طريقة أخرى

$$\int \frac{\text{د س}}{\text{س}\sqrt{\text{أ}^2 - \text{س}^2}} = \text{ت}$$

نفرض أن : $\text{ص}^2 = \text{أ}^2 - \text{س}^2 \Leftarrow \text{د س} = -\frac{\text{ص}}{\text{س}} \text{ د ص}$

$$\Leftarrow \text{ت} = -\int \frac{\text{ص د ص}}{\text{س}^2 \text{ ص}} = -\int \frac{\text{د ص}}{\text{أ}^2 - \text{ص}^2} = -\frac{1}{\text{أ}2} \text{لو} \frac{\text{أ} + \text{ص}}{\text{أ} - \text{ص}} + \text{ث}$$ (انظر رقم ١٣)

$$= \frac{1}{\text{أ}2} \text{لو} \frac{\text{أ} - \sqrt{\text{أ}^2 - \text{س}^2}}{\text{أ} + \sqrt{\text{أ}^2 - \text{س}^2}} + \text{ث}$$

$$= \frac{1}{\text{أ}2} \text{لو} \frac{\text{س}^2}{\left(\text{أ} + \sqrt{\text{أ}^2 - \text{س}^2}\right)^2} + \text{ث}$$

$$= \frac{1}{\text{أ}} \text{لو} \frac{\text{س}}{\text{أ} + \sqrt{\text{أ}^2 - \text{س}^2}} + \text{ث}$$

٥٨ $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}^{٢} \sqrt{\text{أ}^{٢} - \text{س}^{٢}}} = \text{ت}$

نفرض أن : $\text{س} = \text{أ جا ص} \Leftarrow \text{د س} = \text{أ جتا ص د ص}$

$$\Leftarrow \text{ت} = \int \frac{\text{أ جتا ص د ص}}{\text{أ}^{٣} \text{جا}^{٢} \text{ص جتا ص}} = \int \frac{١}{\text{أ}^{٢}} \text{قتا}^{٢} \text{ص د ص} = -\frac{١}{\text{أ}^{٢}} \text{ظتا ص} + \text{ث}$$

$$= -\frac{\sqrt{\text{أ}^{٢} - \text{س}^{٢}}}{\text{أ}^{٢} \text{ س}} + \text{ث}$$

طريقة أخرى

$$\int \frac{\text{د س}}{\text{س}^{٢} \sqrt{\text{أ}^{٢} - \text{س}^{٢}}} = \int \frac{\text{د س}}{\text{س}^{٣} \sqrt{١ - \frac{\text{أ}^{٢}}{\text{س}^{٢}}}} = \int \frac{\text{د س}}{\text{س}^{٢} \sqrt{\left(١ - \frac{\text{أ}^{٢}}{\text{س}^{٢}}\right)}} = \text{ت}$$

نفرض أن : $\text{ص}^{٢} = ١ - \frac{\text{أ}^{٢}}{\text{س}^{٢}} \Leftarrow \text{د س} = -\frac{\text{س}^{٣}}{\text{أ}^{٢}} \text{ص د ص}$

$$\Leftarrow \text{ت} = -\int \frac{١}{\text{أ}^{٢}} \frac{\text{س}^{٣} \text{ص}}{\text{س}^{٣} \text{ص}} \text{د ص} = -\frac{١}{\text{أ}^{٢}} \int \text{د ص} = -\frac{\text{ص}}{\text{أ}^{٢}} + \text{ث}$$

$$= -\frac{\sqrt{\text{أ}^{٢} - \text{س}^{٢}}}{\text{أ}^{٢} \text{ س}} + \text{ث}$$

٥٩ $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}^{٣}\sqrt{\text{أ}^{٢}-\text{س}^{٢}}} = \text{ت}$

نفرض أن : $\text{س} = \text{أ جا ص} \Leftarrow \text{د س} = \text{أ جتاص د ص}$

$\Leftarrow \text{ت} = \int \frac{\text{أ جتاص د ص}}{\text{أ}^{٤}\,\text{جا}^{٤}\,\text{ص جتاص}} = \frac{١}{\text{أ}^{٣}} \int \text{قتا}^{٣}\,\text{ص د ص}$

لإيجاد $\int \text{قتا}^{٣}\,\text{ص د ص}$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int \text{ف د هـ} = \text{ف هـ} - \int \text{هـ د ف}$

نفرض أن : $\text{ف} = \text{قتا ص} \Leftarrow \text{د ف} = -\text{قتا ص ظتا ص د س}$

$\text{د هـ} = \text{قتا}^{٢}\text{ص د ص} \Leftarrow \text{هـ} = -\text{ظتاص}$

$\Leftarrow \int \text{قتا}^{٣}\,\text{ص د ص} = -\text{قتا ص ظتا ص} - \int \text{قتا ص ظتا}^{٢}\,\text{ص د ص}$

$= -\text{قتا ص ظتا ص} - \int \text{قتا ص}(\text{قتا}^{٢}\,\text{ص} - ١)\,\text{د ص}$

$= -\text{قتا ص ظتا ص} - \int \text{قتا}^{٣}\,\text{ص د ص} + \int \text{قتاص د ص}$

$\Leftarrow \int \text{قتا}^{٣}\,\text{ص د ص} = -\frac{١}{٢}\text{قتا ص ظتا ص} + \frac{١}{٢}\int \text{قتاص د ص}$

$\Leftarrow \text{ت} = -\frac{١}{٢\text{أ}^{٣}}\text{قتا ص ظتا ص} + \frac{١}{٢\text{أ}^{٣}}\int \text{قتاص د ص}$

$= -\frac{١}{٢\text{أ}^{٣}}\text{قتا ص ظتا ص} + \frac{١}{٢\text{أ}^{٣}}\text{لـو}(\text{قتا ص} - \text{ظتا ص}) + \text{ت}$

$= -\frac{١}{٢\text{أ}^{٣}} \times \frac{\text{أ}}{\text{س}} \times \frac{\sqrt{\text{أ}^{٢}-\text{س}^{٢}}}{\text{س}} + \frac{١}{٢\text{أ}^{٣}}\text{لـو}\left(\frac{\sqrt{\text{أ}^{٢}-\text{س}^{٢}}}{\text{س}} - \frac{\text{أ}}{\text{س}}\right) + \text{ت}$

$= -\frac{\sqrt{\text{أ}^{٢}-\text{س}^{٢}}}{٢\,\text{أ}^{٢}\,\text{س}^{٢}} + \frac{١}{٢\text{أ}^{٣}}\text{لـو}\frac{\text{أ} - \sqrt{\text{أ}^{٢}-\text{س}^{٢}}}{\text{س}} + \text{ت}$

طريقة أخرى

$$\int \frac{\text{د س}}{\text{س}^{3}\sqrt{\text{ا}^{2}-\text{س}^{2}}} = \text{ت}$$

نفرض أن : $\text{ص}^{2} = \text{ا}^{2} - \text{س}^{2}$ $\Leftarrow$ $\text{د س} = -\frac{\text{ص}}{\text{س}}\text{د ص}$

$$\Leftarrow \text{ت} = -\int \frac{1}{\text{س}^{4}}\,\text{د ص} = -\int \left(\frac{1}{\text{ا}^{2}-\text{ص}^{2}}\right)^{2}\text{د ص}$$

$$= -\frac{1}{4\text{ا}^{2}}\int \left(\frac{1}{\text{ا}+\text{ص}}+\frac{1}{\text{ا}-\text{ص}}\right)^{2}\text{د ص}$$

$$= -\frac{1}{4\text{ا}^{2}}\int \left(\frac{2}{\text{ا}^{2}-\text{ص}^{2}}+\frac{1}{(\text{ا}-\text{ص})^{2}}+\frac{1}{(\text{ا}+\text{ص})^{2}}\right)\text{د ص}$$

$$= -\frac{1}{4\text{ا}^{2}}\left(\int \frac{2}{\text{ا}^{2}-\text{ص}^{2}}\,\text{د ص}+\frac{1}{\text{ا}-\text{ص}}+\frac{-1}{\text{ا}+\text{ص}}\right) \quad \text{(انظر رقم ١٣)}$$

$$= -\frac{1}{4\text{ا}^{2}}\left(\frac{1}{\text{ا}}\text{لو}\frac{\text{ا}+\text{ص}}{\text{ا}-\text{ص}}+\frac{1}{\text{ا}-\text{ص}}+\frac{-1}{\text{ا}+\text{ص}}\right)+\text{ث}$$

$$= -\frac{1}{4\text{ا}^{2}}\left(\frac{1}{\text{ا}}\text{لو}\frac{\text{ا}+\text{ص}}{\text{ا}-\text{ص}}-\frac{1}{\text{ا}-\text{ص}}-\frac{1}{\text{ا}+\text{ص}}\right)+\text{ث}$$

$$= -\frac{\sqrt{\text{ا}^{2}-\text{س}^{2}}}{2\text{ا}^{2}\,\text{س}^{2}}-\frac{1}{2\text{ا}^{3}}\text{لو}\frac{\text{ا}-\sqrt{\text{ا}^{2}+\text{س}^{2}}}{\text{س}}+\text{ث}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{ا}^{2}-\text{س}^{2}}}{2\text{ا}^{2}\,\text{س}^{2}}-\frac{1}{2\text{ا}^{3}}\text{لو}\frac{\text{ا}-\sqrt{\text{ا}^{2}+\text{س}^{2}}}{\text{س}}+\text{ث}$$

٦٠ $$\int \frac{\sqrt{أ^٢ - س^٢}\ د س}{س} = ت$$

نفرض أن : $س = أ جا ص \Leftarrow د س = أ جتا ص\ د ص$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{أ^٢ جتا^٢ ص\ د ص}{أ جا ص} = أ \int \frac{(١ - جا^٢ ص)\ د ص}{جا ص}$$

$$= أ \int (قتا ص - جا ص)\ د ص$$

$$= -أ\ لو(قتا ص + ظا ص) - أ جتا ص + ث$$

$$= -\sqrt{أ^٢ - س^٢} - أ\ لو\frac{أ + \sqrt{أ^٢ - س^٢}}{س} + ث$$

طريقة أخرى

$$\int \frac{\sqrt{أ^٢ - س^٢}\ د س}{س} = \int \frac{أ^٢ - س^٢}{س\sqrt{أ^٢ - س^٢}}\ د س$$

$$= أ^٢ \int \frac{د س}{س\sqrt{أ^٢ - س^٢}} - \int \frac{س}{\sqrt{أ^٢ - س^٢}}\ د س$$ (انظر رقم ٥٧ ، ٤٨)

$$= أ\ لو\frac{س}{أ + \sqrt{أ^٢ - س^٢}} + \sqrt{أ^٢ - س^٢}$$

$$= -\sqrt{أ^٢ - س^٢} - أ\ لو\frac{أ + \sqrt{أ^٢ - س^٢}}{س} + ث$$

٦١ $\int \frac{\sqrt{أ^٢ - س^٢}\ د س}{س^٢} = ت$

نفرض أن : $س = أ جا ص \Leftarrow د س = أ جتا ص\ د ص$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{أ^٢ \text{ جتا}^٢ ص\ د ص}{أ^٢ \text{ جا}^٢ ص} = \int \text{ظتا}^٢ ص\ د ص$$

$$= \int (\text{قتا}^٢ ص - ١)\ د ص$$

$$= -\text{ظتا} ص + ص + ث$$

$$= -\frac{\sqrt{أ^٢ - س^٢}}{س} - \text{جا}^{-١}\frac{س}{أ} + ث$$

طريقة أخرى

$$\int \frac{\sqrt{أ^٢ - س^٢}\ د س}{س^٢} = \int \frac{أ^٢ - س^٢}{س^٢ \sqrt{أ^٢ - س^٢}}\ د س$$

$$= أ^٢ \int \frac{د س}{س^٢ \sqrt{أ^٢ - س^٢}} - \int \frac{د س}{\sqrt{أ^٢ - س^٢}}$$

$$= -\frac{\sqrt{أ^٢ - س^٢}}{س} - \text{جا}^{-١}\frac{س}{أ} + ث$$

(انظر رقم ٥٨ ، ٤٦)

المجموعة السادسة

الدوال التي تحتوي على $\sqrt{س^٢ - ا^٢}$

٦٢ $$\int \frac{د س}{\sqrt{س^٢ - ا^٢}} = لـو\left(س + \sqrt{س^٢ - ا^٢}\right) + ث$$

٦٣ $$\int \frac{د س}{\sqrt{(س^٢ - ا^٢)^٣}} = -\frac{س}{ا^٢\sqrt{س^٢ - ا^٢}} + ث$$

٦٤ $$\int \frac{س\, د س}{\sqrt{س^٢ - ا^٢}} = \sqrt{س^٢ - ا^٢} + ث$$

٦٥ $$\int \sqrt{س^٢ - ا^٢}\, د س = \frac{س}{٢}\sqrt{س^٢ - ا^٢} - \frac{ا^٢}{٢} لـو\left(س + \sqrt{س^٢ - ا^٢}\right) + ث$$

٦٦ $$\int \sqrt{(س^٢ - ا^٢)^٣}\, د س = \frac{س}{٨}(٢س^٢ - ٥ا^٢)\sqrt{س^٢ - ا^٢} + \frac{٣ا^٤}{٨} لـو\left(س + \sqrt{س^٢ - ا^٢}\right) + ث$$

٦٧ $$\int س\sqrt{س^٢ - ا^٢}\, د س = \frac{\sqrt{(س^٢ - ا^٢)^٣}}{٣} + ث$$

٦٨ $$\int س\sqrt{(س^٢ - ا^٢)^٣}\, د س = \frac{\sqrt{(س^٢ - ا^٢)^٥}}{٥} + ث$$

٦٩ $$\int س^٢\sqrt{س^٢ - ا^٢}\, د س = \frac{س}{٨}(٢س^٢ - ا^٢)\sqrt{س^٢ - ا^٢} - \frac{ا^٤}{٨} لـو\left(س + \sqrt{س^٢ - ا^٢}\right) + ث$$

٧٠ $\int \frac{س^{٢}\ ى س}{\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}} = \frac{س}{٢}\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}} + \frac{أ^{٢}}{٢}\ لـو\left(س + \sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}\right) + ث$

٧١ $\int \frac{س^{٢}\ ى س}{\sqrt{(س^{٢}-أ^{٢})^{٣}}} = -\frac{س}{\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}} + لـو\left(س + \sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}\right) + ث$

٧٢ $\int \frac{ى س}{س\sqrt{س^{٢}-١}} = قا^{-١}\ س + ث$

٧٣ $\int \frac{ى س}{س\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}} = \frac{١}{أ}\ قا^{-١}\frac{س}{أ} + ث$

٧٤ $\int \frac{ى س}{س^{٢}\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}} = \frac{\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}}{أ^{٢}\ س} + ث$

٧٥ $\int \frac{ى س}{س^{٣}\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}} = \frac{\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}}{٢\ أ^{٢}\ س^{٢}} + \frac{١}{٢أ^{٣}}\ قا^{-١}\frac{س}{أ} + ث$

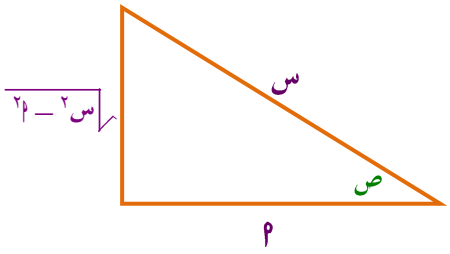
٧٦ $\int \frac{\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}\ ى س}{س} = \sqrt{س^{٢}-أ^{٢}} - أ\ قا^{-١}\frac{س}{أ} + ث$

٧٧ $\int \frac{\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}\ ى س}{س^{٢}} = -\frac{\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}}{س} + لـو\left(س + \sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}\right) + ث$

عند استخدام التعويض

س = أ قا ص

ارجع لهذا المثلث لإيجاد الدوال المثلثية



المشاركون في حل المجموعة السادسة

رقم التكامل	المشاركون
٦٢	عبد العاطي وفا hamza_mn - mourad24000
٦٣	عبد العاطي وفا hamza_mn - mourad24000
٦٤	عبد العاطي وفا hamza_mn
٦٥	عبد العاطي وفا hamza_mn
٦٦	عبد العاطي وفا - عبد الواحد
٦٧	عبد العاطي وفا hamza_mn
٦٨	عبد العاطي وفا - عبد الواحد mourad24000
٦٩	عبد العاطي وفا - عبد الواحد mourad24000
٧٠	عبد العاطي وفا - عبد الواحد mourad24000
٧١	عبد العاطي وفا - عبد الواحد
٧٢	عبد العاطي وفا - عبد الواحد mourad24000
٧٣	عبد العاطي وفا - عبد الواحد mourad24000
٧٤	عبد العاطي وفا - عبد الواحد
٧٥	عبد العاطي وفا - عبد الواحد
٧٦	عبد العاطي وفا - عبد الواحد
٧٧	عبد العاطي وفا - عبد الواحد

٦٢ $\int \frac{د س}{\sqrt{س^٢ - ا^٢}} = ت$

نفرض أن : $س = ا قا ص \Leftarrow د س = ا قا ص ظا ص د ص$

$\Leftarrow ت = \int \frac{ا قا ص ظا ص د ص}{ا \sqrt{قا^٢ ص - ١}} = \int قا ص د ص = لو(قا ص + ظا ص) + ت_١$

$= لو(قا ص + ظا ص) + ت_١$

$= لو\left(\frac{س}{ا} + \frac{\sqrt{س^٢ - ا^٢}}{ا}\right) + ت_١$

$= لو(س + \sqrt{س^٢ - ا^٢}) - \underbrace{لو ا + ت_١}_{ت}$

$= لو(س + \sqrt{س^٢ - ا^٢}) + ت$

طريقة أخرى

$\int \frac{د س}{\sqrt{س^٢ - ا^٢}} = ت$

نفرض أن : $\sqrt{س^٢ - ا^٢} = ع - س \Leftarrow س^٢ - ا^٢ = ع^٢ - ٢ ع س + س^٢$

$\Leftarrow س = \frac{ع^٢ + ا^٢}{٢ ع} \quad ع - س = \frac{ع^٢ - ا^٢}{٢ ع} \quad ،، \quad د س = \frac{ع^٢ - ا^٢}{٢ ع^٢} د ع$

$\Leftarrow ت = \int \frac{ع^٢ - ا^٢}{٢ ع^٢} \cdot \frac{٢ ع}{ع^٢ - ا^٢} د ع = \int \frac{د ع}{ع} = لو|ع| + ت = لو(س + \sqrt{س^٢ - ا^٢}) + ت$

طريقة أخرى

$\int \frac{د س}{\sqrt{س^٢ - ا^٢}} = ت$

نفرض أن : $س = ا جتا ز ص \Leftarrow د س = ا جا ز ص د ص$

$\Leftarrow ت = \int \frac{ا جا ز ص د ص}{ا \sqrt{١ - ص^٢ (جتا ز)}} = \int \frac{ا جا ز ص د ص}{ا جا ز ص} = \int د ص = ص + ت = (جتا ز)^{-١} \frac{س}{ا} + ت$

٦٣ $\int \frac{د س}{(س^٢ - ا^٢)^{\frac{٣}{٢}}} = ت$

نفرض أن : $س = ا قا ص \Leftarrow د س = ا قا ص ظا ص د ص$

$\Leftarrow ت = \int \frac{ا قا ص ظا ص د ص}{ا^٣ ظا^٣ ص} = \frac{١}{ا^٢} \int \frac{قا ص د ص}{ظا^٢ ص} = \frac{١}{ا^٢} \int قتا ص ظتا ص د ص$

$= \frac{١}{ا^٢} قتا ص + ت$

$= -\frac{س}{ا^٢ \sqrt{س^٢ - ا^٢}} + ت$

طريقة أخرى

$ت = \int \frac{د س}{\sqrt{س^٢ - ا^٢}}$

نفرض أن : $ص = \sqrt{س^٢ - ا^٢} \Leftarrow د ص = \frac{س}{ص} د س$

$\Leftarrow ت = \int \frac{١}{ص^٣} \cdot \frac{ص}{\sqrt{ص^٢ + ا^٢}} د ص = \int \frac{ص}{ص^٢ \sqrt{ص^٢ + ا^٢}} د ص$ (انظر رقم ٤١)

$= -\frac{\sqrt{ص^٢ + ا^٢}}{ا^٢ س} + ت$

$= -\frac{س}{ا^٢ \sqrt{س^٢ - ا^٢}} + ت$

طريقة أخرى

$ت = \int \frac{د س}{\sqrt{س^٢ - ا^٢}}$

نفرض أن : $س = ا جتا ر \Leftarrow د س = ا جا ر ص د ص$

$\Leftarrow ت = \int \frac{ا جا ر ص د ص}{ا^٣ جا^٣ ر} = \frac{١}{ا^٢} \int قتا^٢ ر ص د ص = -\frac{١}{ا^٢} ظتا ر ص + ت$

٦٤ $\int \frac{س\, ء س}{\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}} = ت$

نفرض أن : $ص^{٢} = س^{٢}-أ^{٢}$ $\Leftarrow$ $ء س = \frac{ص}{س}\, ء ص$

$\Leftarrow ت = -\int \frac{س ص\, ء ص}{ص\, س} = \int ء ص = ص + ث = \sqrt{س^{٢}-أ^{٢}} + ث$

طريقة أخرى

$\int \frac{س\, ء س}{\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}} = \frac{١}{٢}\int ٢س(س^{٢}-أ^{٢})^{-\frac{١}{٢}}\, ء س = \frac{١}{٢}\times ٢(س^{٢}-أ^{٢})^{\frac{١}{٢}} + ث$

$= \sqrt{س^{٢}-أ^{٢}} + ث$

طريقة أخرى

$\int \frac{س\, ء س}{\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}} = ت$

نفرض أن : $س = أ جتا ز ص$ $\Leftarrow$ $ء س = أ جا ز ص\, ء ص$

$\Leftarrow ت = \int \frac{أ^{٢} جتا ز ص\, جا ز ص\, ء ص}{أ\, جا ز ص} = أ\int جتا ز ص\, ء ص = أ\, جا ز ص + ث = \sqrt{س^{٢}-أ^{٢}} + ث$

٦٥ $\int \sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}\, ء س = ت$

نفرض أن : $س = أ قا ص$ $\Leftarrow$ $ء س = أ قا ص\, ظا ص\, ء ص$

$\Leftarrow ت = \int أ^{٢} ظا^{٢} ص\, قا ص\, ء ص = \frac{أ^{٢}}{٢}\int قا ص ظا ص - \frac{أ^{٢}}{٢}لـو|قا ص + ظا ص| + ث$ (انظر رقم ٣٨)

$= \frac{أ^{٢}}{٢}\times \frac{س}{أ}\times \frac{\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}}{أ} - \frac{أ^{٢}}{٢}لـو|قا ص + ظا ص| + ث$

$= \frac{س}{٢}\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}} - \frac{أ^{٢}}{٢}لـو\left(س + \sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}\right) + ث$

طريقة أخرى

$$\int \frac{س\, ى\, س}{\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}} = ت$$

نفرض أن : $س = أ جتا ز \Leftarrow ى س = أ جا ز\, ى ص$

$$\Leftarrow ت = أ^{٢} \int جا^{٢} ز\, ى ص = \frac{أ^{٢}}{٢} \int (جتا\ ٢ص - ١)\, ى ص$$

$$= \frac{أ^{٢}}{٢}\left[\frac{١}{٢} جا\ ٢ص - ص\right] + ت$$

$$= \frac{أ^{٢}}{٤} \times ٢ جا ز\ جتا ز - \frac{أ^{٢}}{٢}(جتا ز)^{-١} + ت$$

$$= \frac{أ^{٢}}{٢} \times \frac{س}{أ} \times \frac{\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}}{أ} - \frac{أ^{٢}}{٢} لو\left(س + \sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}\right) + ت$$

$$= \frac{س}{٢} \sqrt{س^{٢}-أ^{٢}} - \frac{أ^{٢}}{٢} لو\left(س + \sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}\right) + ت$$

٦٦ $\int \sqrt{(س^{٢}-أ^{٢})^{٣}}\, ى س = ت$

نفرض أن : $س = أ جتا ز \Leftarrow ى س = أ جا ز\, ى ص$

$$\Leftarrow ت = أ^{٤} \int (جا ز)^{٤} ص\, ى ص$$ (انظر رقم ٣٢)

$$(جا ز)^{٤} ص = ((جا ز)^{٢})^{٢} ص = \frac{١}{٤}(جتا\ ٢ص - ١)^{٢} = \frac{٣}{٨} + \frac{جتا\ ٢ص}{٢} - \frac{جتا\ ٤ص}{٨}$$

$$\Leftarrow ت = أ^{٤}\left[\frac{س\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}}{٢أ^{٨}} - \frac{س^{٣}\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}}{٤أ^{٤}} - \frac{س\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}}{٢أ^{٤}} + \frac{٣}{٨} لو\left(س + \sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}\right)\right] + ت$$

$$= \frac{س}{٨}(٢س^{٢}-٥أ^{٢})\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}} + \frac{٣أ^{٤}}{٨} لو\left(س + \sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}\right) + ت$$

طريقة أخرى

$$\int \sqrt{(س^٢ - ا^٢)^٣}\ د س = \int (س^٢ - ا^٢)\sqrt{س^٢ - ا^٢}\ د س$$

$$= \int س^٢ \sqrt{س^٢ - ا^٢}\ د س - ا^٢ \int \sqrt{س^٢ - ا^٢}\ د س = ت$$

نفرض أن : $ص = \sqrt{س^٢ - ا^٢} \Leftarrow د ص = \frac{س\ د س}{ص\sqrt{ص^٢ + ا^٢}}$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{ص^٢(ص^٢ + ا^٢)}{\sqrt{ص^٢ + ا^٢}}\ د ص - ا^٢ \int \frac{ص^٢}{\sqrt{ص^٢ + ا^٢}}\ د ص$$

$$= \int ص^٢ \sqrt{ص^٢ + ا^٢}\ د ص - ا^٢ \int \frac{ص^٢}{\sqrt{ص^٢ + ا^٢}}\ د ص$$ (انظر رقم ٣٤ ، ٣٨)

$$= \frac{ص}{٨}(٢ص^٢ + ا^٢)\sqrt{ص^٢ + ا^٢} - \frac{ا^٤}{٨} لو\left(ص + \sqrt{ص^٢ + ا^٢}\right)$$

$$- \frac{ا^٢ ص}{٢}\sqrt{ص^٢ + ا^٢} + \frac{ا^٤}{٢} لو\left(ص + \sqrt{ص^٢ + ا^٢}\right) + ت$$

$$= \frac{ص}{٨}(٢ص^٢ - ٣ا^٢)\sqrt{ص^٢ + ا^٢} + \frac{٣ا^٤}{٨} لو\left(ص + \sqrt{ص^٢ + ا^٢}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{س^٢ - ا^٢}}{٨}(٢س^٢ - ٢ا^٢ - ٣ا^٢) + س\frac{٣ا^٤}{٨} لو\left(س + \sqrt{س^٢ - ا^٢}\right)$$

$$= \frac{س}{٨}(٢س^٢ - ٥ا^٢)\sqrt{س^٢ - ا^٢} + \frac{٣ا^٤}{٨} لو\left(س + \sqrt{س^٢ - ا^٢}\right) + ت$$

٦٧ $\int س \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}\ ء س = ت$

نفرض أن : $ص^{٢} = س^{٢}-ا^{٢}$ $\Leftarrow$ $ء س = \frac{ص}{س} ء ص$

$\Leftarrow ت = \int \frac{س ص^{٢} ء ص}{س} = \int ص^{٢} ء ص = \frac{ص^{٣}}{٣} + ث = \frac{\sqrt{(س^{٢}-ا^{٢})^{٣}}}{٣} + ث$

طريقة أخرى

$\int س \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}\ ء س = \int \frac{١}{٢} ٢س (س^{٢}-ا^{٢})^{\frac{١}{٢}} ء س = \frac{١}{٢} \times ٢ (س^{٢}-ا^{٢})^{\frac{٣}{٢}} + ث$

$= \frac{\sqrt{(س^{٢}-ا^{٢})^{٣}}}{٣} + ث$

طريقة أخرى

$\int س \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}\ ء س = ت$

نفرض أن : $س = ا جتا ز ص$ $\Leftarrow$ $ء س = ا جا ز ص ء ص$

$\Leftarrow ت = \int ا^{٣} جتا ز ص (جا ز ص)^{٢} ء ص = \frac{ا^{٣}}{٣} (جا ز ص)^{٣} + ث$

$= \frac{\sqrt{(س^{٢}-ا^{٢})^{٣}}}{ا^{٣}} \times \frac{ا^{٣}}{٣} + ث$

$= \frac{\sqrt{(س^{٢}-ا^{٢})^{٣}}}{٣} + ث$

٦٨ $\int س \sqrt{(س^{٢}-٤)^{٣}}\, ء س = ت$

نفرض أن : $ص^{٢} = س^{٢}-٤$ $\Leftarrow$ $ء س = \frac{ص}{س} ء ص$

$\Leftarrow ت = \int \frac{س ص^{٤}\, ء ص}{س} = \int ص^{٤}\, ء ص = \frac{ص^{٥}}{٥} + ث = \frac{\sqrt{(س^{٢}-٤)^{٥}}}{٥} + ث$

طريقة أخرى

$\int س \sqrt{(س^{٢}-٤)^{٣}}\, ء س = \frac{١}{٢} \int ٢س (س^{٢}-٤)^{\frac{٣}{٢}}\, ء س = \frac{١}{٢} \times \frac{(س^{٢}-٤)^{\frac{٥}{٢}} ٢}{٥} + ث$

$= \frac{\sqrt{(س^{٢}-٤)^{٥}}}{٣} + ث$

طريقة أخرى

$\int س \sqrt{(س^{٢}-٤)^{٣}}\, ء س = ت$

نفرض أن : $س = ٢ جتا ز ص$ $\Leftarrow$ $ء س = ٢ جا ز ص ء ص$

$\Leftarrow ت = \int ٢^{٥} جتا ز ص (جا ز ص)^{٤}\, ء ص = \frac{٢^{٥}}{٥} (جا ز ص)^{٥} + ث$

$= \frac{٢^{٥}}{٥} \times \frac{\sqrt{(س^{٢}-٤)^{٣}}}{٢^{٥}} + ث$

$= \frac{\sqrt{(س^{٢}-٤)^{٥}}}{٥} + ث$

٦٩ $\int س^{٢} \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}\ د س = ت$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف\ د هـ = ف\ هـ - \int هـ\ د ف$

نفرض أن : $ف = س \Leftarrow د ف = د س$

$د هـ = س \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}\ د س \Leftarrow هـ = \frac{\sqrt{(س^{٢}-ا^{٢})^{٣}}}{٣}$ (انظر رقم ٦٨)

$\Leftarrow ت = \frac{س \sqrt{(س^{٢}-ا^{٢})^{٣}}}{٣} - \int \frac{١}{٣} \sqrt{(س^{٢}-ا^{٢})^{٣}}\ د س$ (انظر رقم ٦٦)

$= -\frac{١}{٣} س \sqrt{(س^{٢}-ا^{٢})^{٣}} + \frac{س}{٨}(٢س^{٢}-٥ا^{٢}) \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}} + \frac{٣ا^{٤}}{٨} لو(س + \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}) + ث$

$= \frac{س}{٨}(٢س^{٢}-ا^{٢}) \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}} - \frac{ا^{٤}}{٨} لو(س + \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}) + ث$

طريقة أخرى

$\int س^{٢} \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}\ د س = ت$

نفرض أن : $ص^{٢} = س^{٢}-ا^{٢} \Leftarrow د س = \frac{ص}{س} د ص$

$\Leftarrow ت = \int س ص^{٢}\ د ص = \int ص^{٢} \sqrt{ص^{٢}+ا^{٢}}\ د ص$ (انظر رقم ٣٤)

$= \frac{ص}{٨}(٢ص^{٢}+ا^{٢}) \sqrt{ص^{٢}+ا^{٢}} - \frac{ا^{٤}}{٨} لو(ص + \sqrt{ص^{٢}+ا^{٢}}) + ث$

$= \frac{\sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}}{٨}(٢)(س^{٢}-ا^{٢}+ا^{٢})س - \frac{ا^{٤}}{٨} لو(س + \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}) + ث$

$= \frac{س}{٨}(٢س^{٢}-ا^{٢}) \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}} - \frac{ا^{٤}}{٨} لو(س + \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}) + ث$

طريقة أخرى

$$\int س^{٢}\sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}\ ء س = ت$$

نفرض أن : $س = ا جتا ر \Leftarrow ء س = -ا جا ر ص ء ص$

$$\Leftarrow ت = \int ا^{٤}(جا ر ص جتا ر ص)^{٢}\ ء ص = \frac{ا^{٤}}{٤}\int (جا ر ٢ص)^{٢}\ ء ص = \frac{ا^{٤}}{٨}\int (١-جتا ر ٤ص)\ ء ص$$

$$= \frac{ا^{٤}}{٨}\left[ص - \frac{١}{٤}جا ر ٤ص\right] + ت$$

$$جا ر ٤ص = ٢جا ر ٢ص جتا ر ٢ص = ٢جا ر ٢ص\left(١-(جتا ر)^{٢} ص\right)$$

$$= ٢\cdot\frac{٢س\sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}}{ا^{٢}}\left(١-\frac{٢س^{٢}}{ا^{٢}}\right)$$

$$= \frac{٤س\sqrt{س^{٢}+ا^{٢}}}{ا^{٤}}(٢س^{٢}-ا^{٢})$$

$$\Leftarrow ت = \frac{س}{٨}(٢س^{٢}-ا^{٢})\sqrt{س^{٢}-ا^{٢}} - \frac{ا^{٤}}{٨}(جتا ر)^{-١}\frac{س}{ا} + ت$$

$$= \frac{س}{٨}(٢س^{٢}-ا^{٢})\sqrt{س^{٢}-ا^{٢}} - \frac{ا^{٤}}{٨}لو\left(س + \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}\right) + ت$$

٧٠ $$\int \frac{س^{٢}\ ء س}{\sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}} = ت$$

نفرض أن : $ص^{٢} = س^{٢}-ا^{٢} \Leftarrow ء س = \frac{ص}{س} ء ص$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{س^{٢}ص}{س ص}\ ء ص = \int س\ ء ص = \sqrt{ص^{٢}+ا^{٢}}\ ء ص$$ (انظر رقم ٣١)

$$= \frac{ص}{٢}\sqrt{ص^{٢}+ا^{٢}} + \frac{ا^{٢}}{٢}لو\left(ص + \sqrt{ص^{٢}+ا^{٢}}\right) + ت$$

$$= \frac{س}{٢}\sqrt{س^{٢}-ا^{٢}} + \frac{ا^{٢}}{٢}لو\left(س + \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}\right) + ت$$

طريقة أخرى

$$\int \frac{س^{٢}\ ى س}{\sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}} = ت$$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\boxed{\int ف\ ى هـ = ف\ هـ - \int هـ\ ى ف}$

نفرض أن : $ف = س \Leftarrow ى ف = ى س$

$ى هـ = \frac{س}{\sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}}\ ى س \Leftarrow هـ = \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}$ (انظر رقم ٦٤)

$\Leftarrow ت = س\sqrt{س^{٢}-ا^{٢}} - \int \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}\ ى س$ (انظر رقم ٦٥)

$= س\sqrt{س^{٢}-ا^{٢}} - \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}\ \frac{س}{٢} + \frac{ا^{٢}}{٢}\ لـو\left(س + \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}\right) + ث$

$= \frac{س}{٢}\sqrt{س^{٢}-ا^{٢}} + \frac{ا^{٢}}{٢}\ لـو\left(س + \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}\right) + ث$

طريقة أخرى

$$\int \frac{س^{٢}\ ى س}{\sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}} = ت$$

نفرض أن : $س = ا جتا ز ص \Leftarrow ى س = -ا جا ز ص\ ى ص$

$\Leftarrow ت = \int ا^{٢}(جتا ز ص)^{٢}\ ى ص = \frac{ا^{٢}}{٢}\int (جتا ز ٢ص + ١)\ ى ص$

$= \frac{ا^{٢}}{٢}\left(\frac{١}{٢}جا ز\ ٢ص + ص\right) + ث$

$= \frac{ا^{٢}}{٢}\left(جا ز ص جتا ز ص + ص\right) + ث$

$= \frac{ا^{٢}}{٢}\int \left(\frac{س}{ا}\right)^{-١}(جتا ز) + \frac{س\sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}}{ا^{٢}} + ث$

$= \frac{س}{٢}\sqrt{س^{٢}-ا^{٢}} + \frac{ا^{٢}}{٢}\ لـو\left(س + \sqrt{س^{٢}-ا^{٢}}\right) + ث$

٧١ $\int \frac{س^{٢}\ ى س}{\sqrt{(س^{٢}-أ^{٢})^{٣}}} = ت$

نفرض أن : $ص^{٢} = س^{٢} - أ^{٢}$ $\Leftarrow$ $ى س = \frac{ص}{س}\ ى ص$

$\Leftarrow$ $ت = \int \frac{س^{٢} ص}{ص^{٣} س}\ ى ص = \int \frac{س}{ص^{٢}}\ ى ص = \int \frac{\sqrt{ص^{٢}+أ^{٢}}}{ص^{٢}}\ ى ص$ (انظر رقم ٤٤)

$= -\frac{\sqrt{ص^{٢}+أ^{٢}}}{ص} + لو(ص + \sqrt{ص^{٢}+أ^{٢}}) + ث$

$= -\frac{س}{\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}} + لو(س + \sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}) + ث$

طريقة أخرى

$\int \frac{س^{٢}\ ى س}{\sqrt{(س^{٢}-أ^{٢})^{٣}}} = ت$

نفرض أن : $س = أ جتا ز ص$ $\Leftarrow$ $ى س = أ جا ز ص\ ى ص$

$\Leftarrow$ $ت = \int \frac{أ^{٣}(جتا ز ص)^{٢} جا ز ص\ ى ص}{أ^{٣}(جا ز ص)^{٣}} = \int (ظتا ز ص)^{٢}\ ى ص$

$= \int ((قتا ز)^{٢} ص - ١)^{٢}\ ى ص$

$= ظتا ز ص - ص + ث$

$= -\frac{س}{\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}} + (جتا ز)^{-١}\frac{س}{أ} + ث$

$= -\frac{س}{\sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}} + لو(س + \sqrt{س^{٢}-أ^{٢}}) + ث$

٧٢ $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}-١}} = \text{ت}$

نفرض أن : $\text{س} = \text{قا ص} \Leftarrow \text{د س} = \text{قا ص ظا ص د ص}$

$\Leftarrow \text{ت} = \int \frac{\text{قا ص ظا ص د ص}}{\text{قا ص ظا ص}} = \int \text{د ص} = \text{ص} + \text{ث} = \text{قا}^{-١}\ \text{س} + \text{ث}$

طريقة أخرى

$\int \frac{\text{د س}}{\text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}-١}} = \text{ت}$

نفرض أن : $\text{س} = \frac{١}{\text{ص}} \Leftarrow \text{د س} = -\frac{١}{\text{ص}^{٢}}\ \text{د ص}$ ، $\text{س}^{٢}-١ = \frac{١}{\text{ص}^{٢}}-١ = \frac{١-\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢}}$

$\Leftarrow \text{ت} = -\int \frac{\text{ص}^{٢}\ \text{د ص}}{\text{ص}^{٢}\sqrt{١-\text{ص}^{٢}}} = -\int \frac{\text{د ص}}{\sqrt{١-\text{ص}^{٢}}} = -\text{جا}^{-١}\ \text{ص} + \text{ث} = -\text{قا}^{-١}\ \frac{١}{\text{س}} + \text{ث}$

$= \text{قا}^{-١}\ \text{س} + \text{ث}$

٧٣ $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{ا}^{٢}}} = \text{ت}$

نفرض أن : $\text{س} = \text{ا قا ص} \Leftarrow \text{د س} = \text{ا قا ص ظا ص د ص}$

$\Leftarrow \text{ت} = \int \frac{\text{ا قا ص ظا ص د ص}}{\text{ا}^{٢}\ \text{قا ص ظا ص}} = \int \frac{١}{\text{ا}} \text{د ص} = \frac{١}{\text{ا}}\text{ص} + \text{ث} = \frac{١}{\text{ا}}\text{قا}^{-١}\ \frac{\text{س}}{\text{ا}} + \text{ث}$

طريقة أخرى

$\int \frac{\text{د س}}{\text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{ا}^{٢}}} = \text{ت}$

نفرض أن : $\text{س} = \frac{\text{ا}}{\text{ص}} \Leftarrow \text{د س} = -\frac{\text{ا}}{\text{ص}^{٢}}\ \text{د ص}$ ، $\text{س}^{٢}-\text{ا}^{٢} = \frac{\text{ا}^{٢}}{\text{ص}^{٢}}-\text{ا}^{٢} = \text{ا}^{٢}\left(\frac{١-\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢}}\right)$

$\Leftarrow \text{ت} = -\frac{١}{\text{ا}}\int \frac{\text{د ص}}{\sqrt{١-\text{ص}^{٢}}} = -\frac{١}{\text{ا}}\text{جا}^{-١}\ \text{ص} + \text{ث} = \frac{١}{\text{ا}}\text{قا}^{-١}\ \frac{\text{س}}{\text{ا}} + \text{ث}$

٧٤ $\int \frac{د س}{س^{٢} \sqrt{س^{٢} - ا^{٢}}} = ت$

نفرض أن : $س = ا$ قا ص $\Leftarrow$ $د س = ا$ قا ص ظا ص د ص

$\Leftarrow ت = \int \frac{ا$ قا ص ظا ص د ص$}{ا^{٣}$ قا^{٢} ص ظا ص$} = \frac{١}{ا^{٢}} \int$ جتا ص د ص $= \frac{١}{ا^{٢}}$ جا ص $+ ث = \frac{\sqrt{س^{٢} - ا^{٢}}}{ا^{٢} س} + ث$

طريقة أخرى

$\int \frac{د س}{س^{٢} \sqrt{س^{٢} - ا^{٢}}} = ت$

نفرض أن : $س = \frac{ا}{ص}$ $\Leftarrow$ $د س = -\frac{ا}{ص^{٢}}$ د ص ، $س^{٢} - ا^{٢} = \frac{ا^{٢}}{ص^{٢}} - ا^{٢} = ا^{٢} (١ - ص^{٢})$

$\Leftarrow ت = -\frac{١}{ا^{٢}} \int \frac{ص د ص}{\sqrt{١ - ص^{٣}}} \sqrt{١ - ص^{٢}} = \frac{١}{ا^{٢}} \int \frac{١}{\sqrt{\frac{ا^{٢}}{س^{٢}} - ١}} = ث + \frac{\sqrt{س^{٢} - ا^{٢}}}{ا^{٢} س} = ث +$

طريقة أخرى

$\int \frac{د س}{س^{٢} \sqrt{س^{٢} - ا^{٢}}} = ت$

نفرض أن : $س = ا$ جتا ز ص $\Leftarrow$ $د س = ا$ جا ز ص د ص

$\Leftarrow ت = \int \frac{ا$ جا ز ص د ص$}{ا^{٣} (\text{جتا ز ص})^{٢}$ جا ز ص$} = \frac{١}{ا^{٢}} \int (\text{قا ز ص})^{٢}$ د ص $= \frac{١}{ا^{٢}}$ ظا ز ص $+ ث$

$= ث + \frac{\sqrt{س^{٢} - ا^{٢}}}{ا^{٢} س}$

٧٥ $\int \frac{\text{د س}}{\text{س}^{٣}\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{أ}^{٢}}} = \text{ت}$

نفرض أن : $\text{س} = \text{أ}\,\text{قا}\,\text{ص} \Leftarrow \text{د س} = \text{أ}\,\text{قا ص ظا ص د ص}$

$$\Leftarrow \text{ت} = \int \frac{\text{أ قا ص ظا ص د ص}}{\text{أ}^{٤}\,\text{قا}^{٣}\,\text{ص ظا ص}} = \int \frac{١}{\text{أ}^{٣}}\,\text{جتا}^{٢}\,\text{ص د ص} = \int \frac{١}{٢\text{أ}^{٣}}(\text{جتا ٢ص} + ١)\,\text{د ص}$$

$$= \frac{١}{٢\text{أ}^{٣}}\left(\frac{١}{٢}\text{جا ٢ص} + \text{ص}\right) + \text{ث}$$

$$= \frac{١}{٢\text{أ}^{٣}}(\text{جا ص جتا ص} + \text{ص}) + \text{ث}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{أ}^{٢}}}{٢\,\text{أ}^{٢}\,\text{س}^{٢}} + \frac{١}{٢\text{أ}^{٣}}\,\text{قا}^{-١}\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \text{ث}$$

طريقة أخرى

$$\int \frac{\text{د س}}{\text{س}^{٣}\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{أ}^{٢}}} = \text{ت}$$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int \text{ف د هـ} = \text{ف هـ} - \int \text{هـ د ف}$

نفرض أن : $\text{ف} = \frac{١}{\text{س}} \Leftarrow \text{د ف} = -\frac{١}{\text{س}^{٢}}\text{د س}$

$$\text{د هـ} = \frac{١}{\text{س}^{٢}\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{أ}^{٢}}}\,\text{د س} \Leftarrow \text{هـ} = \frac{\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{أ}^{٢}}}{\text{أ}^{٢}\,\text{س}}$$ (انظر رقم ٧٤)

$$\Leftarrow \text{ت} = \frac{\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{أ}^{٢}}}{\text{أ}^{٢}\,\text{س}^{٢}} + \int \frac{١}{\text{أ}^{٢}}\,\frac{\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{أ}^{٢}}}{\text{س}^{٣}}\,\text{د س}$$

$$= \frac{\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{أ}^{٢}}}{\text{أ}^{٢}\,\text{س}^{٢}} + \int \frac{١}{\text{أ}^{٢}}\,\frac{\text{د س}}{\text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{أ}^{٢}}} - \int \frac{١}{\text{أ}^{٢}}\,\frac{\text{د س}}{\text{س}^{٣}\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{أ}^{٢}}}\,\text{د س}$$

$$\Leftarrow ٢\text{ت} = \frac{\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{أ}^{٢}}}{\text{أ}^{٢}\,\text{س}^{٢}} + \int \frac{١}{\text{أ}^{٢}}\,\frac{\text{د س}}{\text{س}\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{أ}^{٢}}}$$ (انظر رقم ٧٣)

$$\Leftarrow \text{ت} = \frac{\sqrt{\text{س}^{٢}-\text{أ}^{٢}}}{٢\,\text{أ}^{٢}\,\text{س}^{٢}} + \frac{١}{٢\text{أ}^{٣}}\,\text{قا}^{-١}\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \text{ث}$$

٧٦ $\int \frac{\sqrt{س^٢ - ا^٢}\ د س}{س} = ث$

نفرض أن : $س = ا$ قا ص $\Leftarrow$ $د س = ا$ قا ص ظا ص د ص

$\Leftarrow ث = \int \frac{ا^٢ \text{ قا ص ظا}^٢ \text{ ص د ص}}{ا \text{ قا ص}} = ا \int \text{ظا}^٢ \text{ ص د ص} = ا \int (\text{قا}^٢ \text{ ص} - ١) د ص$

$= ا(\text{ظا ص} - \text{ص}) + ث$

$= \sqrt{س^٢ - ا^٢} - ا \text{ قا}^{-١} \frac{س}{ا} + ث$

طريقة أخرى

$\int \frac{\sqrt{س^٢ - ا^٢}\ د س}{س} = \int \frac{س د س}{\sqrt{س^٢ - ا^٢}} - ا^٢ \int \frac{د س}{س \sqrt{س^٢ - ا^٢}}$ (انظر رقم ٦٤ ، ٧٣)

$= \sqrt{س^٢ - ا^٢} - ا \text{ قا}^{-١} \frac{س}{ا} + ث$

٧٧ $\int \frac{\sqrt{س^٢ - ا^٢}\ د س}{س^٢} = ث$

نفرض أن : $س = ا$جتا ز ص $\Leftarrow$ $د س = ا$ جا ز ص د ص

$\Leftarrow ث = \int \frac{ا^٢ (\text{جا ز ص})^٢ \text{ د ص}}{ا^٢ (\text{جتا ز ص})^٢} = \int (\text{ظا ز ص})^٢ \text{ د ص} = \int (١ - (\text{قا ز ص})^٢) د ص$

$= \text{ص} - \text{ظا ز ص} + ث$

$= - \frac{\sqrt{س^٢ - ا^٢}}{س} + \text{لو} \left| س + \sqrt{س^٢ - ا^٢} \right| + ث$

طريقة أخرى

$\int \frac{\sqrt{س^٢ - ا^٢}\ د س}{س^٢} = \int \frac{د س}{\sqrt{س^٢ - ا^٢}} - ا^٢ \int \frac{د س}{س^٢ \sqrt{س^٢ - ا^٢}}$ (انظر رقم ٦٢ ، ٧٤)

$= - \frac{\sqrt{س^٢ - ا^٢}}{س} + \text{لو} \left| س + \sqrt{س^٢ - ا^٢} \right| + ث$

المجموعة السابعة

الدوال التي تحتوي على $أ+ب س-جـ س^{٢}$ ، $جـ > ٠$

٧٨ $\int \frac{د س}{أ+ب س+جـ س^{٢}} = \begin{cases} \frac{٢}{\sqrt{٤أ س-ب^{٢}}} \text{ ظا}^{-١} \frac{٢جـ س+ب}{\sqrt{٤أجـ-ب^{٢}}} + ث & \text{عندما } ب^{٢} > ٤أ س \\ \frac{١}{\sqrt{ب^{٢}-٤أ س}} \text{ لو} \frac{٢جـ س+ب-\sqrt{ب^{٢}-٤أ س}}{٢جـ س+ب+\sqrt{ب^{٢}-٤أ س}} + ث & \text{عندما } ب^{٢} < ٤أ س \end{cases}$

٧٩ $\int \frac{د س}{\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}} = \frac{١}{\sqrt{جـ}} \text{ لو}\left(٢جـ س+ب+٢\sqrt{جـ}\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}\right) + ث$

٨٠ $\int \sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}\, د س = \frac{٢جـ س+ب}{٤جـ}\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}$

$$-\frac{ب^{٢}-٤أ س}{٨\sqrt{جـ^{٣}}} \text{ لو}\left(٢جـ س+ب+٢\sqrt{جـ}\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}\right) + ث$$

٨١ $\int \frac{س\, د س}{\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}} = \frac{\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}}{جـ}$

$$-\frac{ب}{٢\sqrt{جـ^{٣}}} \text{ لو}\left(٢جـ س+ب+٢\sqrt{جـ}\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}\right) + ث$$

الدوال التي تحتوي على $أ+ب س-جـ س^{٢}$ ، $جـ > ٠$

٨٢ $\int \frac{د س}{أ+ب س-جـ س^{٢}} = \frac{١}{\sqrt{ب^{٢}+٤أ س}} \text{ لو} \frac{٢جـ س-ب+\sqrt{ب^{٢}+٤أ س}}{٢جـ س-ب+\sqrt{ب^{٢}+٤أ س}} + ث$

٨٣ $\int \frac{د س}{\sqrt{أ+ب س-جـ س^{٢}}} = \frac{١}{\sqrt{جـ}} \text{ جا}^{-١} \frac{٢جـ س-ب}{\sqrt{ب^{٢}+٤أ س}} + ث$

٨٤ $\int \sqrt{أ+ب س-جـ س^{٢}}\, د س = \frac{٢جـ س+ب}{٤جـ}\sqrt{أ+ب س-جـ س^{٢}} + \frac{ب^{٢}+٤أ س}{٨\sqrt{جـ^{٣}}} \text{ جا}^{-١} \frac{٢جـ س-ب}{\sqrt{ب^{٢}+٤أ س}} + ث$

٨٥ $\int \frac{س\, د س}{\sqrt{أ+ب س-جـ س^{٢}}} = -\frac{\sqrt{أ+ب س-جـ س^{٢}}}{جـ} + \frac{ب}{٢\sqrt{جـ^{٣}}} \text{ جا}^{-١} \frac{٢جـ س-ب}{\sqrt{ب^{٢}+٤أ س}} + ث$

الدوال الجبرية الأخرى

٨٦ $\int \frac{1+س}{ب+س}\,د س = \sqrt{(1+س)(ب+س)}+(1-ب)\,لو\left(\sqrt{1+س}+\sqrt{ب+س}\right)+ث$

٨٧ $\int \frac{1-س}{ب+س}\,د س = \sqrt{(1-س)(ب+س)}+(1+ب)\,جا^{-1}\sqrt{\frac{س+ب}{1+ب}}+ث$

٨٨ $\int \frac{1+س}{ب-س}\,د س = -\sqrt{(1+س)(ب-س)}-(1+ب)\,جا^{-1}\sqrt{\frac{ب-س}{1+ب}}+ث$

٨٩ $\int \frac{1+س}{1-س}\,د س = -\sqrt{1-س^{2}}+جا^{-1}س+ث$

٩٠ $\int \frac{د س}{\sqrt{(س-1)(ب-س)}} = 2\,جا^{-1}\sqrt{\frac{س-1}{ب-1}}+ث$

المشاركين في حل المجموعة السابعة

رقم التكامل	المشاركين
٧٨	عبد العاطي وفا mourad24000
٧٩	عبد العاطي وفا mourad24000
٨٠	عبد العاطي وفا mourad24000
٨١	عبد العاطي وفا mourad24000
من ٨٢ إلى ٨٨	عبد العاطي وفا
٨٩	عبد العاطي وفا mourad24000
٩٠	عبد العاطي وفا

٧٨ $\int \frac{د س}{ا + ب س + جـ س^{٢}} = ت$

نفرض أن : $ص = \frac{ب}{٢\sqrt{جـ}} + س\sqrt{جـ} = \frac{ب + ٢جـ س}{٢\sqrt{جـ}} \Leftarrow د ص = د س\sqrt{جـ}$

$ا + ب س + جـ س^{٢} = ص^{٢} - \frac{ب^{٢} - ٤ا س}{٤جـ}$

أولاً : عندما $ب^{٢} > ٤ا س$ فإن $\frac{٤ا س - ب^{٢}}{٤جـ} < ٠$ وبفرض أن $م^{٢} = \frac{٤ا س - ب^{٢}}{٤جـ}$ فإن :

$\Leftarrow ت = \int \frac{١}{\sqrt{جـ}} \frac{د ص}{ص^{٢} + م^{٢}} = \frac{١}{\sqrt{جـ}} ظا^{-١} \frac{ص}{م} + ث$ (انظر رقم ١٢)

$= \frac{٢}{\sqrt{٤ا جـ - ب^{٢}}} ظا^{-١} \frac{٢جـ س + ب}{\sqrt{٤ا س - ب^{٢}}} + ث$

ثانياً : عندما $ب^{٢} < ٤ا س$ فإن $\frac{ب^{٢} - ٤ا س}{٤جـ} < ٠$ وبفرض أن $ك^{٢} = \frac{ب^{٢} - ٤ا س}{٤جـ}$ فإن :

$\Leftarrow ت = \int \frac{١}{\sqrt{جـ}} \frac{د ص}{ص^{٢} - ك^{٢}} = \frac{١}{\sqrt{جـ}} لو \frac{ص - ك}{ص + ك} + ث$ (انظر رقم ١٣)

$= \frac{١}{\sqrt{ب^{٢} - ٤ا س}} لو \frac{٢جـ س + ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤ا س}}{٢جـ س + ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤ا س}} + ث$

طريقة أخرى

$$\int \frac{د س}{ا + ب س + جـ س^{٢}} = ت$$

$$ا + ب س + جـ س^{٢} = جـ \left[س^{٢} + \frac{ب}{جـ} س + \frac{ا}{جـ} \right] = جـ \left[\left(س + \frac{ب}{٢جـ} \right)^{٢} - \frac{ب^{٢} - ٤ ا س}{٤ جـ^{٢}} \right]$$

نفرض أن : $ص = س + \frac{ب}{٢جـ}$ ، $ه = \frac{ب^{٢} - ٤ ا س}{٤ جـ^{٢}}$

أولاً : عندما $ب^{٢} > ٤ ا س$ فإن $ه > ٠$ وبفرض أن $م = - ه$ فإن :

$$\Leftarrow ت = \frac{١}{جـ} \int \frac{د ص}{ص^{٢} + م^{٢}} = \frac{١}{جـ \sqrt{م}} ظا^{-١} \frac{ص}{\sqrt{م}} + ث$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{٤ ا جـ - ب^{٢}}} ظا^{-١} \frac{٢ جـ س + ب}{\sqrt{٤ ا س - ب^{٢}}} + ث$$

ثانياً : عندما $ب^{٢} < ٤ ا س$ فإن $ه < ٠$

$$\Leftarrow ت = \frac{١}{\sqrt{ه}\, ٢جـ} \int \frac{د ص}{ص^{٢} - ه} = \frac{١}{\sqrt{ه}\, ٢جـ} لو \frac{ص - \sqrt{ه}}{ص + \sqrt{ه}} + ث$$

$$= \frac{١}{\sqrt{ب^{٢} - ٤ ا س}} لو \frac{٢ جـ س + ب - \sqrt{ب^{٢} - ٤ ا س}}{٢ جـ س + ب + \sqrt{ب^{٢} - ٤ ا س}} + ث$$

٧٩ $\int \frac{د س}{\sqrt{ا + ب س + جـ س^{٢}}} = ت$

نفرض أن : $ص = \frac{ب + ٢جـ س}{٢\sqrt{جـ}} \Leftarrow د ص = \sqrt{جـ}\, د س$

$ا + ب س + جـ س^{٢} = ص^{٢} - \frac{ب^{٢} - ٤ا جـ}{٤جـ}$ وبفرض أن $ك^{٢} = \frac{ب^{٢} - ٤ا جـ}{٤جـ}$ فإن :

$\Leftarrow ت = \int \frac{١}{\sqrt{جـ}} \frac{د ص}{\sqrt{ص^{٢} - ك^{٢}}} = \frac{١}{\sqrt{جـ}} لـو \left(ص + \sqrt{ص^{٢} - ك^{٢}}\right) + ت_{١}$ (انظر رقم ٦٢)

$= \frac{١}{\sqrt{جـ}} لـو \left(\frac{ب + ٢جـ س}{٢\sqrt{جـ}} + \sqrt{ا + ب س + جـ س^{٢}}\right) + ت_{١}$

$= \frac{١}{\sqrt{جـ}} لـو \left(٢جـ س + ب + ٢\sqrt{جـ}\sqrt{ا + ب س + جـ س^{٢}}\right) + ت$

طريقة أخرى

$ت = \int \frac{د س}{\sqrt{ا + ب س + جـ س^{٢}}}$

نفرض أن : $\sqrt{ا + ب س + جـ س^{٢}} = \sqrt{جـ}\,(ص - س) \Leftarrow ا + ب س + جـ س^{٢} = جـ\left(ص^{٢} - ٢س ص + س^{٢}\right)$

$\Leftarrow س = \frac{جـ ص^{٢} - ا}{ب + ٢جـ ص}$ ، $ص - س = \frac{جـ ص^{٢} + ب ص + ا}{ب + ٢جـ ص}$ ، $د س = ٢جـ \left(\frac{جـ ص^{٢} + ب ص + ا}{(ب + ٢جـ ص)^{٢}}\right) د ص$

$\Leftarrow ت = \int ٢جـ \left(\frac{جـ ص^{٢} + ب ص + ا}{(ب + ٢جـ ص)^{٢}}\right) \frac{١}{\sqrt{جـ}} \left(\frac{ب + ٢جـ ص}{جـ ص^{٢} + ب ص + ا}\right) د ص$

$= \frac{١}{\sqrt{جـ}} \int \frac{٢\sqrt{جـ}}{ب + ٢جـ ص} د ص$

$= \frac{١}{\sqrt{جـ}} لـو \left(ب + ٢جـ ص + ٢\sqrt{جـ}\sqrt{ا + ب س + جـ س^{٢}}\right) + ت$

$= \frac{١}{\sqrt{جـ}} لـو \left(٢جـ س + ب + ٢\sqrt{جـ}\sqrt{ا + ب س + جـ س^{٢}}\right) + ت$

٨٠ $\int \frac{1}{\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}}\, د س = ت$

نفرض أن : $ص = \frac{ب+٢جـ س}{٢\sqrt{جـ}} \Leftarrow د ص = \sqrt{جـ}\, د س$

$أ+ب س+جـ س^{٢} = ص^{٢} - \frac{ب^{٢}-٤أ س}{٤جـ}$ وبفرض أن $ك^{٢} = \frac{ب^{٢}-٤أ س}{٤جـ}$ فإن :

$\Leftarrow ت = \int \frac{١}{\sqrt{جـ}} \frac{د ص}{\sqrt{ص^{٢}-ك^{٢}}}$ (انظر رقم ٦٥)

$= \frac{ص}{٢\sqrt{جـ}} \sqrt{ص^{٢}-ك^{٢}} - \frac{ك^{٢}}{٢\sqrt{جـ}} لو\left(ص + \sqrt{ص^{٢}-ك^{٢}}\right) + ت_{١}$

$= \frac{٢جـ س+ب}{٤جـ} \sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}} - \frac{ب^{٢}-٤أ س}{٨\sqrt{جـ^{٣}}} لو\left(٢جـ س+ب+٢\sqrt{جـ}\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}\right) + ت$

٨١ $\int \frac{س\, د س}{\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}} = ت$

$\Leftarrow ت = \int \frac{١}{٢جـ} \frac{٢جـ س+ب-ب}{\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}} د س$

$= \int \frac{١}{٢جـ} \frac{٢جـ س+ب}{\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}} د س - \int \frac{ب}{٢جـ} \frac{د س}{\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}}$ (انظر رقم ٧٩)

$= \frac{\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}}{جـ} - \frac{ب}{٢جـ\sqrt{جـ}} لو\left(٢جـ س+ب+٢\sqrt{جـ}\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}\right) + ت$

$= \frac{\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}}{جـ} - \frac{ب}{٢\sqrt{جـ^{٣}}} لو\left(٢جـ س+ب+٢\sqrt{جـ}\sqrt{أ+ب س+جـ س^{٢}}\right) + ت$

في المسائل من ٨٢ إلى ٨٥ :

نفرض أن : $ص = \sqrt{جـ}\, س - \frac{ب}{\sqrt{جـ}\,2}$ $\Leftarrow$ $\frac{٢جـس - ب}{\sqrt{جـ}\,2} = ع ص = \sqrt{جـ}\, ع س$

$$أ + ب س - جـ س^{٢} = \frac{ب^{٢} + ٤أ جـ س}{٤جـ} - ص^{٢} = ك^{٢} - ص^{٢}$$

٨٢ $\int \frac{ع س}{أ + ب س - جـ س^{٢}} = \int \frac{١}{\sqrt{جـ}} \frac{ع ص}{ك^{٢} - ص^{٢}} = \frac{١}{\sqrt{جـ}\,٢ك}$ لو $\left|\frac{ك + ص}{ك - ص}\right| + ث$ (انظر رقم ١٣)

$$= \frac{١}{\sqrt{ب^{٢} + ٤أ جـ س}}$$ لو $\left|\frac{\sqrt{ب^{٢} + ٤أ جـ س} + ٢جـس - ب}{\sqrt{ب^{٢} + ٤أ جـ س} - ٢جـس + ب}\right| + ث$

٨٣ $\int \frac{ع س}{\sqrt{أ + ب س - جـ س^{٢}}} = \int \frac{١}{\sqrt{جـ}} \frac{ع ص}{\sqrt{ك^{٢} - ص^{٢}}} = \frac{١}{\sqrt{جـ}}$ جا$^{-١}$ $\frac{ص}{ك} + ث$ (انظر رقم ٤٦)

$$= \frac{١}{\sqrt{جـ}}$$ جا$^{-١}$ $\frac{٢جـس - ب}{\sqrt{ب^{٢} + ٤أ جـ س}} + ث$

٨٤ $\int \sqrt{أ + ب س - جـ س^{٢}}\, ع س = \int \frac{١}{\sqrt{جـ}} \sqrt{ك^{٢} - ص^{٢}}\, ع ص$ (انظر رقم ٥١)

$$= \frac{ص}{٢\sqrt{جـ}} \sqrt{ك^{٢} - ص^{٢}} + \frac{ك^{٢}}{٢\sqrt{جـ}}$$ جا$^{-١}$ $\frac{ص}{ك} + ث$

$$= \frac{٢جـس + ب}{٤جـ} \sqrt{أ + ب س - جـ س^{٢}} - \frac{ب^{٢} + ٤أ جـ س}{٨\sqrt{جـ^{٣}}}$$ جا$^{-١}$ $\frac{٢جـس - ب}{\sqrt{ب^{٢} + ٤أ جـ س}} + ث$

٨٥ $\int \frac{س ع س}{\sqrt{أ + ب س - جـ س^{٢}}} = \int \frac{-١}{٢جـ} \frac{-٢جـس + ب - ب}{\sqrt{أ + ب س - جـ س^{٢}}} ع س$

$$= \frac{-١}{٢جـ} \int \frac{-٢جـس + ب}{\sqrt{أ + ب س - جـ س^{٢}}} ع س + \frac{ب}{٢جـ} \int \frac{ع س}{\sqrt{أ + ب س - جـ س^{٢}}}$$ (انظر رقم ٨٣)

$$= -\frac{\sqrt{أ + ب س - جـ س^{٢}}}{جـ} + \frac{ب}{٢\sqrt{جـ^{٣}}}$$ جا$^{-١}$ $\frac{٢جـس - ب}{\sqrt{ب^{٢} + ٤أ جـ س}} + ث$

٨٦ $\int \sqrt{\frac{أ+س}{ب+س}}\, ء س = ت$

$\Leftarrow ت = \int \frac{أ+س}{\sqrt{أب+(أ+ب)س+س^{٢}}}\, ء س$

$= \frac{١}{٢}\int \frac{٢س+أ+ب}{\sqrt{أب+(أ+ب)س+س^{٢}}}\, ء س + \frac{١}{٢}\int \frac{أ-ب}{\sqrt{أب+(أ+ب)س+س^{٢}}}\, ء س$ (انظر رقم ٧٩)

$= \sqrt{أب+(أ+ب)س+س^{٢}} + \frac{أ-ب}{٢}\,لو\left(٢س+(أ+ب)+٢\sqrt{أب+(أ+ب)س+س^{٢}}\right)+ث$

$= \sqrt{أب+(أ+ب)س+س^{٢}} + \frac{أ-ب}{٢}\,لو\left(\sqrt{أ+س}+\sqrt{ب+س}\right)^{٢}+ث$

$= \sqrt{(أ+س)(ب+س)} + (أ-ب)\,لو\left(\sqrt{أ+س}+\sqrt{ب+س}\right)+ث$

٨٧ $\int \sqrt{\frac{أ-س}{ب+س}}\, ء س = ت$

$\Leftarrow ت = \int \frac{أ-س}{\sqrt{أب+(أ-ب)س+س^{٢}}}\, ء س$

$= \frac{١}{٢}\int \frac{-٢س+أ-ب}{\sqrt{أب+(أ-ب)س+س^{٢}}}\, ء س + \frac{١}{٢}\int \frac{أ+ب}{\sqrt{أب+(أ-ب)س+س^{٢}}}\, ء س$

$= \sqrt{(أ-س)(ب+س)} + \frac{١}{٢}\int \frac{\sqrt{أ+ب}\times\sqrt{أ+ب}}{\sqrt{أ-س}\times\sqrt{ب+س}}\, ء س$

نفرض أن : $ص = \sqrt{\frac{س+ب}{أ+ب}} \Leftarrow ء س = ٢ص(أ+ب)\, ء ص$

$ص^{٢} = \frac{س+ب}{أ+ب} \Leftarrow ١-ص^{٢} = \frac{أ-س}{أ+ب}$

$\Leftarrow ت = \sqrt{(أ-س)(ب+س)} + \frac{١}{٢}\int \frac{٢ص(أ+ب)}{\sqrt{١-ص^{٢}}}\, ء ص$

$= \sqrt{(أ-س)(ب+س)} + (أ+ب)\,جا^{-١}\, ص + ث$

$= \sqrt{(أ-س)(ب+س)} + (أ+ب)\,جا^{-١}\sqrt{\frac{س+ب}{أ+ب}} + ث$

٨٨ $\int \sqrt{\frac{ا+س}{ب-س}}\, د س = ت$

$\Leftarrow ت = \int \frac{ا+س}{\sqrt{اب-(ا-ب)س-س^{٢}}}\, د س$

$= -\frac{١}{٢}\int \frac{-٢س-ا+ب}{\sqrt{اب-(ا-ب)س-س^{٢}}}\, د س + \frac{١}{٢}\int \frac{ا+ب}{\sqrt{اب-(ا-ب)س-س^{٢}}}\, د س$

$= -\sqrt{(ا+س)(ب-س)} + \frac{١}{٢}\int \frac{\sqrt{ا+ب}\times\sqrt{ا+ب}}{\sqrt{ا+س}\times\sqrt{ب-س}}\, د س$

نفرض أن : $ص = \sqrt{\frac{ب-ا}{ا+ب}}$ $\Leftarrow$ $د س = -٢ص(ا+ب)د ص$

$ص^{٢} = \frac{ب-ا}{ا+ب}$ $\Leftarrow$ $\frac{ا+س}{ا+ب} = ١-ص^{٢}$

$\Leftarrow ت = -\sqrt{(ا+س)(ب-س)} + \frac{١}{٢}\int \frac{٢ص(ا+ب)}{\sqrt{١-ص^{٢}}}\, د ص$

$= -\sqrt{(ا+س)(ب-س)} - (ا+ب)\text{جا}^{-١} ص + ث$

$= -\sqrt{(ا+س)(ب-س)} - (ا+ب)\text{جا}^{-١}\sqrt{\frac{ب-س}{ا+ب}} + ث$

٨٩ $\int \sqrt{\frac{١+س}{١-س}}\, د س = \int \frac{١+س}{\sqrt{١-س^{٢}}}\, د س$

$= \frac{١}{٢}\int \frac{-٢س}{\sqrt{١-س^{٢}}}\, د س - \int \frac{د س}{\sqrt{١-س^{٢}}}$

$= -\sqrt{١-س^{٢}} + \text{جا}^{-١} س + ث$

طريقة أخرى

$$\int \sqrt{\frac{س+1}{س-1}}\, د س = ت$$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف\, د هـ = ف هـ - \int هـ\, د ف$

نفرض أن : $ف = \sqrt{س+1} \Leftarrow د ف = \frac{د س}{2\sqrt{س+1}}$

$د هـ = \frac{د س}{\sqrt{س-1}} \Leftarrow هـ = -2\sqrt{س-1}$

$$\Leftarrow ت = -2\sqrt{س-1}\sqrt{س+1} - \int -2\sqrt{س-1}\frac{\sqrt{س-1}}{\sqrt{س+1}}\, د س \left(\frac{1-س}{\sqrt{1-س^2}}\right)$$

$$= -2\sqrt{س-1}\sqrt{س+1} - \int \frac{2(س-1)}{\sqrt{1-س^2}}\, د س$$

$$= -2\sqrt{س-1}\sqrt{س+1} - \int \frac{2س}{\sqrt{1-س^2}}\, د س + \int \frac{2}{\sqrt{1-س^2}}\, د س$$

$$= -2\sqrt{س-1}\sqrt{س+1} - \int \frac{2س}{\sqrt{1-س^2}}\, د س + 2 جا^{-1} س + ث$$

$$= -\int \frac{2س}{\sqrt{1-س^2}}\, د س + 2 جا^{-1} س + ث$$

٩٠ $\int \frac{د س}{\sqrt{(س-ا)(ب-س)}} = ت$

نفرض أن : $ص = \sqrt{\frac{س-ا}{ب-ا}} \Leftarrow د س = 2ص(ب-ا) د ص$

$س - ا = ص^2(ب-ا)$ ، $ب - س = (ب-ا)(1-ص^2)$

$$\Leftarrow ت = \int \frac{2ص(ب-ا)}{\sqrt{ص^2(ب-ا)^2(1-ص^2)}} د ص = \int \frac{2 د ص}{\sqrt{1-ص^2}}$$

$$= 2 جا^{-1} ص + ث$$

$$= 2 جا^{-1}\sqrt{\frac{س-ا}{ب-ا}} + ث$$

المجموعة الثامنة

الدوال الأسية والمثلثية (١)

٩١ $\int أ^{س}\ د س = \frac{أ^{س}}{لو أ} + ث$

٩٢ $\int هـ^{س}\ د س = هـ^{س} + ث$

٩٣ $\int هـ^{أ س}\ د س = \frac{هـ^{أ س}}{أ} + ث$

٩٤ $\int جاس\ د س = -جتاس + ث$

٩٥ $\int جتاس\ د س = جاس + ث$

٩٦ $\int ظاس\ د س = -لو|جتاس| + ث$

٩٧ $\int ظتاس\ د س = لو|جاس| + ث$

٩٨ $\int قاس\ د س = لو|(قاس + ظاس)| + ث = لو\left|ظا\left(\frac{ط}{٤} + \frac{س}{٢}\right)\right| + ث$

٩٩ $\int قتاس\ د س = لو|(قتاس - ظتاس)| + ث = لو\left|ظا\ \frac{س}{٢}\right| + ث$

١٠٠ $\int قا^{٢}س\ د س = ظاس + ث$

١٠١ $\int قتا^{٢}س\ د س = -ظتاس + ث$

١٠٢ $\int قاس ظاس\ د س = قاس + ث$

١٠٣ $\int قتاس ظتاس\ د س = -قتاس + ث$

١٠٤ $\int جا^{٢}س\ د س = \frac{س}{٢} - \frac{١}{٤}جا٢س + ث$

١٠٥ $\int جتا^{٢}س\ د س = \frac{س}{٢} + \frac{١}{٤}جا٢س + ث$

١٠٦ $\int جا^{ن} س \, ى س = -\frac{جا^{ن-١} س جتا س}{ن} + \frac{ن-١}{ن} \int جا^{ن-٢} س \, ى س$

١٠٧ $\int جتا^{ن} س \, ى س = \frac{جتا^{ن-١} س جا س}{ن} + \frac{ن-١}{ن} \int جتا^{ن-٢} س \, ى س$

١٠٨ $\int \frac{ى س}{جا^{ن} س} = -\frac{١}{ن-١} \times \frac{جتا س}{جا^{ن-١} س} + \frac{ن-٢}{ن-١} \int \frac{ى س}{جا^{ن-٢} س}$

١٠٩ $\int \frac{ى س}{جتا^{ن} س} = \frac{١}{ن-١} \times \frac{جا س}{جتا^{ن-١} س} + \frac{ن-٢}{ن-١} \int \frac{ى س}{جتا^{ن-٢} س}$

المشاركون في حل المجموعة الثامنة

رقم التكامل	المشاركون
من ٩١ إلى ٩٧	عبد العاطي وفا
٩٨	عبد العاطي وفا ppu - mourad24000
٩٩	عبد العاطي وفا mourad24000
من ١٠٠ إلى ١٠٣	عبد العاطي وفا
١٠٤	عبد العاطي وفا mourad24000
١٠٥	عبد العاطي وفا mourad24000
من ١٠٦ إلى ١٠٩	عبد العاطي وفا

٩١ $\int أ^{س}\ د س = ت$

نفرض أن : $ص = أ^{س} \Leftarrow لو ص = س لو أ \Leftarrow س = هـ^{س لو أ}$

$$\Leftarrow \int هـ^{س لو أ}\ د ص = \frac{١}{لو أ} هـ^{س لو أ} + ت = \frac{أ^{س}}{لو أ} + ت$$

٩٢ $\int هـ^{س}\ د س = \int د(هـ^{س}) = هـ^{س} + ت$

٩٣ $\int هـ^{أ س}\ د س = \frac{١}{أ} \int أ هـ^{أ س}\ د س = \frac{هـ^{أ س}}{أ} + ت$

٩٤ $\int جاس\ د س = \int د(-جتاس) = -جتاس + ت$

٩٥ $\int جتاس\ د س = \int د(جاس) = جاس + ت$

٩٦ $\int ظاس\ د س = \int \frac{جاس}{جتاس}\ د س = -لو جتاس + ت$

٩٧ $\int ظتاس\ د س = \int \frac{جتاس}{جاس}\ د س = لو\ جاس + ت$

٩٨ $\int قاس\ د س = \int \frac{قاس(قاس + ظاس)}{قاس + ظاس}\ د س = لو(قاس + ظاس) + ت = -لو ظا\left(\frac{س}{٢} + \frac{ط}{٤}\right) + ت$

$$قاس + ظاس = \frac{١}{جتاس} + \frac{جاس}{جتاس} = \frac{١ + ٢جا\frac{س}{٢} جتا\frac{س}{٢}}{جتا^{٢}\frac{س}{٢} - جا^{٢}\frac{س}{٢}} = \frac{\left(جا\frac{س}{٢} + جتا\frac{س}{٢}\right)^{٢}}{\left(جتا\frac{س}{٢} - جا\frac{س}{٢}\right)\left(جتا\frac{س}{٢} + جا\frac{س}{٢}\right)}$$

$$ظا\left(\frac{س}{٢} + \frac{ط}{٤}\right) = \frac{١ + ظا\frac{س}{٢}}{١ - ظا\frac{س}{٢}} = \frac{جا\frac{س}{٢} + جتا\frac{س}{٢}}{جتا\frac{س}{٢} - جا\frac{س}{٢}} =$$

٩٩ $\left.\begin{array}{l}\text{قتاس ء س} \\ \end{array}\right| = \left.\begin{array}{l}\dfrac{\text{قتاس}(\text{قتاس}-\text{ظتاس})}{\text{قتاس}-\text{ظتاس}} \\ \end{array}\right|$ ء س $=$ لـو $(\text{قتاس}-\text{ظتاس})+$ ث $=$ لـوظا $\dfrac{\text{س}}{٢}+$ ث

$$\text{قتاس}-\text{ظتاس}=\frac{١}{\text{جاس}}-\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}=\frac{١-\text{جتاس}}{\text{جاس}}=\frac{١-\text{١-٢جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}{٢\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}\text{جتا}\frac{\text{س}}{٢}}=\frac{٢\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}}{٢\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}}=\text{ظا}\frac{\text{س}}{٢}$$

طريقة أخرى لحل ٩٨ و ٩٩

نفرض أن : ص $=$ ظا $\dfrac{\text{س}}{٢}$ $\Leftarrow$ س $=$ ٢ظا$^{-١}$ ص

ء س $=\dfrac{٢\text{ء ص}}{١+\text{ص}^{٢}}$ ، جا س $=\dfrac{١-\text{ص}^{٢}}{١+\text{ص}^{٢}}$ ، جتا س $=\dfrac{٢\text{ص}}{١+\text{ص}^{٢}}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{قاس ء س} \\ \end{array}\right| = \left.\begin{array}{l}\dfrac{\text{ء س}}{\text{جتاس}} \\ \end{array}\right| = \left.\begin{array}{l}\dfrac{١+\text{ص}^{٢}}{١-\text{ص}^{٢}}\times\dfrac{٢}{١+\text{ص}^{٢}}\text{ء ص} \\ \end{array}\right| = \left.\begin{array}{l}\dfrac{٢}{١-\text{ص}^{٢}}\text{ء ص} \\ \end{array}\right|$$

$$= \text{لـو}\frac{١+\text{ص}}{١-\text{ص}}+\text{ث}$$

$$= \text{لـو}\frac{١+\text{ظا}\frac{\text{س}}{٢}}{١-\text{ظا}\frac{\text{س}}{٢}}+\text{ث}$$

$$= \text{لـوظا}\left(\frac{\text{س}}{٢}+\frac{\text{ط}}{٤}\right)+\text{ث}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{قتاس ء س} \\ \end{array}\right| = \left.\begin{array}{l}\dfrac{\text{ء س}}{\text{جاس}} \\ \end{array}\right| = \left.\begin{array}{l}\dfrac{١+\text{ص}^{٢}}{٢\text{ص}}\times\dfrac{٢}{١+\text{ص}^{٢}}\text{ء ص} \\ \end{array}\right| = \left.\begin{array}{l}\dfrac{\text{ء ص}}{\text{ص}} \\ \end{array}\right| = \text{لـو ص}+\text{ث}$$

$$= \text{لـوظا}\frac{\text{س}}{٢}+\text{ث}$$

١٠٠ $\int$ قا^{٢} س ء س $=$ $\int$ ء(ظاس) $=$ ظاس $+$ ث

١٠١ $\int$ قتا^{٢} س ء س $=$ $\int$ ء($-$ ظتاس) $=-$ ظتاس $+$ ث

١٠٢ $\int$ قاس ظاس ء س $=$ $\int$ ء(قاس) $=$ قاس $+$ ث

١٠٣ $\int$ قتاس ظتاس ء س $=$ $\int$ ء($-$ قتاس) $=-$ قتاس $+$ ث

١٠٤ $\int$ جا^{٢} س ء س $=\frac{١}{٢}\int$ (١ $-$ جتا ٢س) ء س $=\frac{س}{٢}-\frac{١}{٤}$ جا٢س $+$ ث

١٠٥ $\int$ جتا^{٢} س ء س $=\frac{١}{٢}\int$ (١ $+$ جتا ٢س) ء س $=\frac{س}{٢}+\frac{١}{٤}$ جا٢س $+$ ث

طريقة أخرى لحل ١٠٤ و ١٠٥

$\int$ جا^{٢} س ء س $=$ ت ، $\int$ جتا^{٢} س ء س $=$ ك

$\Leftarrow$ ت $+$ ك $=\int$ ء س $=$ س $+$ ث$_{١}$ (١) ، ت $-$ ك $=\int$ جتا٢س ء س $=\frac{١}{٢}$ جا٢س $+$ ث$_{٢}$ (٢)

بطرح (٢) من (١) : ٢ت $=$ س $-\frac{١}{٢}$ جا٢س $+$ ث $\Leftarrow$ ت $=\frac{س}{٢}-\frac{١}{٤}$ جا٢س $+$ ث

بجمع (١) و (٢) : ٢ك $=$ س $+\frac{١}{٢}$ جا٢س $+$ ث $\Leftarrow$ ك $=\frac{س}{٢}+\frac{١}{٤}$ جا٢س $+$ ث

١٠٦ $\int جا^{ن} س \, د س = \int جا^{ن-١} س \, جا س \, د س = ت_{ن}$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف \, د هـ = ف \, هـ - \int هـ \, د ف$

نفرض أن : $ف = جا^{ن-١} س \Leftarrow د ف = (ن-١) جا^{ن-٢} س \, جتا س \, د س$

$د هـ = جا س \, د س \Leftarrow هـ = - جتا س$

$\Leftarrow ت_{ن} = - جا^{ن-١} س \, جتا س + (ن-١) \int جا^{ن-٢} س \, جتا^{٢} س \, د س$

$= - جا^{ن-١} س \, جتا س + (ن-١) \int جا^{ن-٢} س (١ - جا^{٢} س) \, د س$

$= - جا^{ن-١} س \, جتا س + (ن-١) \int جا^{ن-٢} س \, د س - (ن-١) \int جا^{ن} س \, د س$

$= - جا^{ن-١} س \, جتا س + (ن-١) \int جا^{ن-٢} س \, د س - (ن-١) ت_{ن}$

$\Leftarrow ن ت_{ن} = - جا^{ن-١} س \, جتا س + (ن-١) \int جا^{ن-٢} س \, د س$

$\Leftarrow ت_{ن} = - \frac{جا^{ن-١} س \, جتا س}{ن} + \frac{ن-١}{ن} \int جا^{ن-٢} س \, د س$

١٠٧ $\int$ جتا^{ن} س ء س $=$ $\int$ جتا$^{ن-١}$ س جتا س ء س $=$ ت$_{ن}$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int$ ف ء هـ $=$ ف هـ $-$ $\int$ هـ ء ف

نفرض أن : ف $=$ جتا$^{ن-١}$ س $\Leftarrow$ ء ف $=-(ن-١)$جتا$^{ن-٢}$ س جاس ء س

ء هـ $=$ جتاس ء س $\Leftarrow$ هـ $=$ جاس

$\Leftarrow$ ت$_{ن}$ $=$ جتا$^{ن-٢}$ س جاس $+(ن-١)$ $\int$ جتا$^{ن-٢}$ س جا^{٢} س ء س

$=$ جتا$^{ن-٢}$ س جاس $+(ن-١)$ $\int$ جتا$^{ن-٢}$ س $(١-$ جتا^{٢} س$)$ ء س

$=$ جتا$^{ن-٢}$ س جاس $+(ن-١)$ $\int$ جتا$^{ن-٢}$ س ء س $-(ن-١)$ $\int$ جتا^{ن} س ء س

$=$ جتا$^{ن-٢}$ س جاس $+(ن-١)$ $\int$ جتا$^{ن-٢}$ س ء س $-(ن-١)$ت$_{ن}$

$\Leftarrow$ ن ت$_{ن}$ $=$ جتا$^{ن-٢}$ س جاس $+(ن-١)$ $\int$ جتا$^{ن-٢}$ س ء س

$\Leftarrow$ ت$_{ن}$ $=-\frac{\text{جتا}^{ن-٢}\text{ س جاس}}{ن}+\frac{ن-١}{ن}$ $\int$ جتا$^{ن-٢}$ س ء س

١٠٨ $\int \frac{د س}{جا^{ن} س} = \int قتا^{ن} س \, د س = \int قتا^{ن-٢} س \, قتا^{٢} س \, د س = ت_{ن}$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف \, د هـ = ف \, هـ - \int هـ \, د ف$

نفرض أن : $ف = قتا^{ن-٢} س \Leftarrow د ف = -(ن-٢) قتا^{ن-٢} س \, ظتا س \, د س$

$د هـ = قتا^{٢} س \, د س \Leftarrow هـ = -ظتا س$

$\Leftarrow ت_{ن} = -قتا^{ن-٢} س \, ظتا س - (ن-٢) \int قتا^{ن-٢} س \, ظتا^{٢} س \, د س$

$= -\frac{جتا س}{جا^{ن-١} س} - (ن-٢) \int قتا^{ن-٢} س \left(قتا^{٢} س - ١\right) د س$

$= -\frac{جتا س}{جا^{ن-١} س} - (ن-٢) \int قتا^{ن} س \, د س + (ن-٢) \int قتا^{ن-٢} س \, د س$

$= -\frac{جتا س}{جا^{ن-١} س} - (ن-٢) ت_{ن} + (ن-٢) \int قتا^{ن-٢} س \, د س$

$\Leftarrow (ن-١) ت_{ن} = -\frac{جتا س}{جا^{ن-١} س} + (ن-٢) \int قتا^{ن-٢} س \, د س$

$\Leftarrow ت_{ن} = -\frac{١}{ن-١} \times \frac{جتا س}{جا^{ن-١} س} + \frac{ن-٢}{ن-١} \int \frac{د س}{جا^{ن-٢} س}$

١٠٩ $\int \frac{د س}{جتا^{ن} س} = \int قا^{ن} س \, د س = \int قا^{ن-٢} س \, قا^{٢} س \, د س = ت_{ن}$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف \, د هـ = ف \, هـ - \int هـ \, د ف$

نفرض أن : $ف = قا^{ن-٢} س \Leftarrow د ف = (ن-٢) قا^{ن-٢} س ظا س \, د س$

$د هـ = قا^{٢} س \, د س \Leftarrow هـ = ظا س$

$\Leftarrow ت_{ن} = قا^{ن-٢} س ظا س - (ن-٢) \int قا^{ن-٢} س ظا^{٢} س \, د س$

$= \frac{جا س}{جتا^{ن-١} س} - (ن-٢) \int قا^{ن-٢} س (قا^{٢} س - ١) \, د س$

$= \frac{جا س}{جتا^{ن-١} س} - (ن-٢) \int قا^{ن} س \, د س + (ن-٢) \int قا^{ن-٢} س \, د س$

$= \frac{جا س}{جتا^{ن-١} س} - (ن-٢) ت_{ن} + (ن-٢) \int قا^{ن-٢} س \, د س$

$\Leftarrow (ن-١) ت_{ن} = \frac{جا س}{جتا^{ن-١} س} + (ن-٢) \int قا^{ن-٢} س \, د س$

$\Leftarrow ت_{ن} = \frac{١}{ن-١} \times \frac{جا س}{جتا^{ن-١} س} + \frac{ن-٢}{ن-١} \int \frac{د س}{جتا^{ن-٢} س}$

المجموعة التاسعة

الدوال الأسية والمثلثية (٢)

١١٠ $$\int جا س جتا^{ن} س \, ى س = -\frac{جتا^{ن+١} س}{ن+١} + ث$$

١١١ $$\int جا^{ن} س جتا س \, ى س = \frac{جا^{ن+١} س}{ن+١} + ث$$

١١٢ $$\int جتا^{م} س \, جا^{ن} س \, ى س = \frac{جتا^{م-١} س \, جا^{ن+١} س}{ن+م} + \frac{م-١}{ن+م} \int جتا^{م-٢} س \, جا^{ن} س \, ى س \quad ، \quad ن > م$$

١١٣ $$\int جتا^{م} س \, جا^{ن} س \, ى س = -\frac{جا^{ن-١} س \, جتا^{م+١} س}{ن+م} + \frac{ن-١}{ن+م} \int جتا^{م} س \, جا^{ن-٢} س \, ى س \quad ، \quad ن < م$$

١١٤ $$\int جا م س جا ن س \, ى س = -\frac{جا(م+ن) س}{٢(ن+م)} + \frac{جا(م-ن) س}{٢(ن-م)} + ث \quad ، \quad ن \neq م$$

١١٥ $$\int جتا م س جتا ن س \, ى س = \frac{جا(م+ن) س}{٢(ن+م)} + \frac{جا(م-ن) س}{٢(ن-م)} + ث \quad ، \quad ن \neq م$$

١١٦ $$\int جا م س جتا ن س \, ى س = -\frac{جتا(م+ن) س}{٢(ن+م)} + \frac{جتا(م-ن) س}{٢(ن-م)} + ث \quad ، \quad ن \neq م$$

١١٧ $$\int \frac{ى س}{أ + ب جتا س} = \frac{٢}{\sqrt{أ^{٢} - ب^{٢}}} ظا^{-١} \left(\sqrt{\frac{أ-ب}{أ+ب}} ظا \frac{س}{٢} \right) + ث \quad ، \quad أ > ب$$

١١٨ $$\int \frac{ى س}{أ + ب جتا س} = \frac{١}{\sqrt{ب^{٢} - أ^{٢}}} لو \frac{\sqrt{ب+أ} + \sqrt{ب-أ} ظا \frac{س}{٢}}{\sqrt{ب+أ} - \sqrt{ب-أ} ظا \frac{س}{٢}} + ث \quad ، \quad ب > أ$$

١١٩ $\int \frac{د س}{ا + ب جاس} = \frac{٢}{\sqrt{ا^٢ - ب^٢}}$ ظا$^{-١}$ $\frac{ا ظا \frac{س}{٢} + ب}{\sqrt{ا^٢ - ب^٢}}$ + ث ، ا < ب

١٢٠ $\int \frac{د س}{ا + ب جاس} = \frac{١}{\sqrt{ب^٢ - ا^٢}}$ لو $\frac{ا ظا \frac{س}{٢} + ب - \sqrt{ب^٢ - ا^٢}}{ا ظا \frac{س}{٢} + ب + \sqrt{ب^٢ - ا^٢}}$ + ث ، ا > ب

١٢١ $\int \frac{د س}{ا^٢ جتا^٢ س + ب^٢ جا^٢ س} = \frac{١}{ا ب}$ ظا$^{-١}$ $\left(\frac{ب ظاس}{ا} \right)$ + ث

المشاركون في حل المجموعة التاسعة

رقم التكامل	المشاركون
١١٠	عبد العاطي وفا
١١١	عبد العاطي وفا
١١٢	عبد العاطي وفا
١١٣	عبد العاطي وفا
١١٤	عبد العاطي وفا alimaarouf
١١٥	عبد العاطي وفا alimaarouf
١١٦	عبد العاطي وفا alimaarouf
١١٧	عبد العاطي وفا
١١٨	عبد العاطي وفا
١١٩	عبد العاطي وفا mourad24000
١٢٠	عبد العاطي وفا mourad24000
١٢١	mourad24000

١١٠ $\int$ جا س جتا^{ن} س ء س $= -\int$ جتا^{ن} س ٠ ء (جتا س) $= -\frac{\text{جتا}^{ن+١}\ س}{ن+١} + ث$

١١١ $\int$ جا^{ن} س جتا س ء س $= \int$ جا^{ن} س ٠ ء (جا س) $= \frac{\text{جا}^{ن+١}\ س}{ن+١} + ث$

١١٢ $\int$ جتا^{م} س جا^{ن} س ء س $= ت_{م،ن}$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int$ ف ء هـ = ف هـ $-\int$ هـ ء ف

نفرض أن : ف = جتا$^{م-١}$ س $\Leftarrow$ ء ف $= -(م-١)$ جتا$^{م-٢}$ س جا س ء س

ء هـ = جتا س جا^{ن} س ء س $\Leftarrow$ هـ $= \frac{\text{جا}^{ن+١}\ س}{ن+١}$

$\Leftarrow ت_{م،ن} = \frac{\text{جتا}^{م-١}\ س \text{ جا}^{ن+١}\ س}{ن+١} + \int \text{جتا}^{م-٢}\ س \text{ جا}^{ن+٢}\ س \ \frac{م-١}{ن+١}$ ء س

$= \frac{\text{جتا}^{م-١}\ س \text{ جا}^{ن+١}\ س}{ن+١} + \int \text{جتا}^{م-٢}\ س \text{ جا}^{ن}\ س \text{ جا}^{٢}\ س \ \frac{م-١}{ن+١}$ ء س

$= \frac{\text{جتا}^{م-١}\ س \text{ جا}^{ن+١}\ س}{ن+١} + \int \text{جتا}^{م-٢}\ س \text{ جا}^{ن}\ س\ (١ - \text{جتا}^{٢}\ س) \ \frac{م-١}{ن+١}$ ء س

$= \frac{\text{جتا}^{م-١}\ س \text{ جا}^{ن+١}\ س}{ن+١} + \int \text{جتا}^{م-٢}\ س \text{ جا}^{ن}\ س \ \frac{م-١}{ن+١} - \int \text{جتا}^{م}\ س \text{ جا}^{ن}\ س$ ء س

$= \frac{\text{جتا}^{م-١}\ س \text{ جا}^{ن+١}\ س}{ن+١} + \int \text{جتا}^{م-٢}\ س \text{ جا}^{ن}\ س \ \frac{م-١}{ن+١} - \frac{م-١}{ن+١} \times ت_{م،ن}$

$\Leftarrow \frac{ن+م}{ن+١} ت_{م،ن} = \frac{\text{جتا}^{م-١}\ س \text{ جا}^{ن+١}\ س}{ن+١} + \int \text{جتا}^{م-٢}\ س \text{ جا}^{ن}\ س \ \frac{م-١}{ن+١}$ ء س

$\Leftarrow ت_{م،ن} = \frac{\text{جتا}^{م-١}\ س \text{ جا}^{ن+١}\ س}{ن+م} + \int \text{جتا}^{م-٢}\ س \text{ جا}^{ن}\ س \ \frac{م-١}{ن+م}$ ء س

١١٣ $\int جتا^{م} س\, جا^{ن} س\, ى س = ت_{م،ن}$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف\, ى ه = ف\, ه - \int ه\, ى ف$

نفرض أن : $ف = جا^{ن-١} س \quad \Leftarrow \quad ى ف = (ن-١) جا^{ن-٢} س\, جتا س\, ى س$

$ى ه = جا س\, جتا^{م} س\, ى س \quad \Leftarrow \quad ه = -\frac{جتا^{م+١} س}{م+١}$

$$\Leftarrow ت_{م،ن} = -\frac{جا^{ن-١} س\, جتا^{م+١} س}{م+١} + \int \frac{ن-١}{م+١} جتا^{م+٢} س\, جا^{ن-٢} س\ ى س$$

$$= -\frac{جا^{ن-١} س\, جتا^{م+١} س}{م+١} + \int \frac{ن-١}{م+١} جتا^{م} س\, جا^{ن-٢} س\, جتا^{٢} س\, ى س$$

$$= -\frac{جا^{ن-١} س\, جتا^{م+١} س}{م+١} + \int \frac{ن-١}{م+١} جتا^{م} س\, جا^{ن-٢} س\, (١-جا^{٢} س)\, ى س$$

$$= -\frac{جا^{ن-١} س\, جتا^{م+١} س}{م+١} + \int \frac{ن-١}{م+١} جتا^{م} س\, جا^{ن-٢} س\, ى س - \int \frac{ن-١}{م+١} جتا^{م} س\, جا^{ن} س\, ى س$$

$$= -\frac{جا^{ن-١} س\, جتا^{م+١} س}{م+١} + \int \frac{ن-١}{م+١} جتا^{م} س\, جا^{ن-٢} س\, ى س - \frac{ن-١}{م+١} \times ت_{م،ن}$$

$$\Leftarrow \frac{ن+م}{م+١} ت_{م،ن} = -\frac{جا^{ن-١} س\, جتا^{م+١} س}{م+١} + \int \frac{ن-١}{م+١} جتا^{م} س\, جا^{ن-٢} س\, ى س$$

$$\Leftarrow ت_{م،ن} = -\frac{جا^{ن-١} س\, جتا^{م+١} س}{ن+م} + \int \frac{ن-١}{ن+م} جتا^{م} س\, جا^{ن-٢} س\, ى س$$

١١٤ $\int جا م س\, جا ن س\, ى س = \frac{١}{٢} \int [جتا(م+ن) س - جتا(م-ن) س]\, ى س$

$$= -\frac{جا(م+ن) س}{٢(م+ن)} + \frac{جا(م-ن) س}{٢(م-ن)} + ث$$

١١٥ $\int جتا م س جتا ن س \, ى س = \frac{١}{٢} \int [جتا(م+ن)س + جتا(م-ن)س] \, ى س$

$= \frac{جا(م+ن)س}{٢(م+ن)} + \frac{جا(م-ن)س}{٢(م-ن)} + ث$

١١٦ $\int جا م س جتا ن س \, ى س = \frac{١}{٢} \int [جا(م+ن)س + جا(م-ن)س] \, ى س$

$= -\frac{جتا(م+ن)س}{٢(م+ن)} - \frac{جتا(م-ن)س}{٢(م-ن)} + ث$

في المسائل من ١١٧ إلى ١٢٠ :

نفرض أن : $ص = ظا\frac{س}{٢} \Leftarrow ى س = \frac{٢ى ص}{١+ص^٢}$

$جاس = \frac{٢ص}{١+ص^٢}$ ، $جتاس = \frac{١-ص^٢}{١+ص^٢}$

١١٧ $\int \frac{ى س}{ا + ب جتاس} = \int \frac{\frac{٢ى ص}{١+ص^٢}}{\frac{١-ص^٢}{١+ص^٢} \cdot ب + ا}$

$= \int \frac{٢ى ص}{ا(١+ص^٢) + ب(١-ص^٢)}$

$= \int \frac{٢ى ص}{(ا+ب) + (ا-ب)ص^٢}$ ، $ا > ب$

$= \frac{٢}{\sqrt{ا^٢ - ب^٢}} ظا^{-١}\left(ص \sqrt{\frac{ا-ب}{ا+ب}} \right) + ث$

$= \frac{٢}{\sqrt{ا^٢ - ب^٢}} ظا^{-١}\left(ظا\frac{س}{٢} \sqrt{\frac{ا-ب}{ا+ب}} \right) + ث$

١١٨ $$\int \frac{\mathrm{d}س}{أ+ب\,جتاس} = \int \frac{\frac{٢\,\mathrm{d}ص}{١+ص^{٢}}}{أ+ب\cdot\frac{١-ص^{٢}}{١+ص^{٢}}}$$

$$= \int \frac{٢\,\mathrm{d}ص}{أ(١+ص^{٢})+ب(١-ص^{٢})}$$

$$= \int \frac{٢\,\mathrm{d}ص}{(أ+ب)-(ب-أ)ص^{٢}} \quad ، \quad أ>ب$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{ب^{٢}-أ^{٢}}}\,\text{ظاز}^{-١}\left(\sqrt{\frac{ب-أ}{ب+أ}}\,ص\right)+ث$$

$$= \frac{١}{\sqrt{ب^{٢}-أ^{٢}}}\,\text{لو}\frac{\sqrt{ب-أ}\;ص+\sqrt{ب+أ}}{\sqrt{ب-أ}\;ص-\sqrt{ب+أ}}+ث$$

$$= \frac{١}{\sqrt{ب^{٢}-أ^{٢}}}\,\text{لو}\frac{\sqrt{ب-أ}\;\text{ظا}\frac{س}{٢}+\sqrt{ب+أ}}{\sqrt{ب-أ}\;\text{ظا}\frac{س}{٢}-\sqrt{ب+أ}}+ث$$

١١٩ $$\int \frac{\mathrm{d}س}{أ+ب\,جاس} = \int \frac{\frac{٢\,\mathrm{d}ص}{١+ص^{٢}}}{أ+ب\cdot\frac{٢ص}{١+ص^{٢}}}$$

$$= \int \frac{٢\,\mathrm{d}ص}{أ(١+ص^{٢})+٢ب\,ص}$$

$$= \frac{٢}{أ}\int \frac{\mathrm{d}ص}{\left(\frac{ب^{٢}}{أ^{٢}}-١\right)+\left(ص+\frac{ب}{أ}\right)^{٢}} \quad ، \quad أ<ب$$

$$= \frac{٢}{أ}\cdot\frac{أ}{\sqrt{أ^{٢}-ب^{٢}}}\,\text{ظا}^{-١}\left(\frac{أ}{\sqrt{أ^{٢}-ب^{٢}}}\times\left(ص+\frac{ب}{أ}\right)\right)+ث$$

$$= \frac{٢}{\sqrt{أ^{٢}-ب^{٢}}}\,\text{ظا}^{-١}\frac{أ\,\text{ظا}\frac{س}{٢}+ب}{\sqrt{أ^{٢}-ب^{٢}}}+ث$$

١٢٠ $\int \frac{د س}{أ + ب جا س} = \int \frac{\frac{٢ د ص}{١ + ص^{٢}}}{أ + ب . \frac{٢ ص}{١ + ص^{٢}}}$

$= \int \frac{٢ د ص}{أ (١ + ص^{٢}) + ٢ ب ص}$

$= \frac{٢}{أ} \int \frac{د ص}{\left(ص + \frac{ب}{أ}\right)^{٢} - \left(١ - \frac{ب^{٢}}{أ^{٢}}\right)}$ ، $أ > ب$

$= \frac{٢}{أ} \cdot \frac{أ}{\sqrt{أ^{٢} - ب^{٢}}} ظا^{-١} \left(\frac{أ}{\sqrt{أ^{٢} - ب^{٢}}} \times \left(ص + \frac{ب}{أ}\right)\right) + ث$

$= \frac{٢}{\sqrt{أ^{٢} - ب^{٢}}} ظا^{-١} \left(\frac{أ ظا \frac{س}{٢} + ب}{\sqrt{أ^{٢} - ب^{٢}}}\right) + ث$

$= \frac{١}{\sqrt{أ^{٢} - ب^{٢}}} لو \frac{أ ظا \frac{س}{٢} + ب - \sqrt{أ^{٢} - ب^{٢}}}{أ ظا \frac{س}{٢} + ب + \sqrt{أ^{٢} - ب^{٢}}} + ث$

١٢١ $\int \frac{د س}{أ^{٢} جتا^{٢} س + ب^{٢} جا^{٢} س} = \frac{١}{أ^{٢}} \int \frac{د س}{جتا^{٢} س \left(١ + \frac{ب^{٢}}{أ^{٢}} ظا^{٢} س\right)} = \frac{١}{أ^{٢}} \int \frac{قا^{٢} س د س}{١ + \frac{ب^{٢}}{أ^{٢}} ظا^{٢} س} = ث$

نفرض أن : $ص = ظا س$ $\Leftarrow$ $د س = قا^{٢} س د ص$

$\Leftarrow ث = \frac{١}{أ^{٢}} \int \frac{د ص}{١ + \frac{ب^{٢}}{أ^{٢}} ص^{٢}} = \frac{١}{أ ب} \int \frac{\frac{ب}{أ} د ص}{١ + \left(\frac{ب}{أ} ص\right)^{٢}}$

$= \frac{١}{أ ب} ظا^{-١} \left(\frac{ب}{أ} ص\right) + ث$

$= \frac{١}{أ ب} ظا^{-١} \left(\frac{ب ظا س}{أ}\right) + ث$

المجموعة العاشرة

الدوال الأسية والمثلثية (٣)

١٢٢ $\int هـ^{س}(جا س - جتا س)\,ى س = \frac{هـ^{س}(جا س - جتا س)}{٢} + ث$

١٢٣ $\int هـ^{أ س}(أ جا ب س - ب جتا ب س)\,ى س = \frac{هـ^{أ س}(أ جا ب س - ب جتا ب س)}{أ^{٢} + ب^{٢}} + ث$

١٢٤ $\int هـ^{س}(جا س + جتا س)\,ى س = \frac{هـ^{س}(جا س + جتا س)}{٢} + ث$

١٢٥ $\int هـ^{أ س}(ب جا ب س - أ جتا ب س)\,ى س = \frac{هـ^{أ س}(ب جا ب س - أ جتا ب س)}{أ^{٢} + ب^{٢}} + ث$

١٢٦ $\int س هـ^{أ س}\,ى س = \frac{هـ^{أ س}}{أ^{٢}}(أ س - ١) + ث$

١٢٧ $\int س^{ن} هـ^{أ س}\,ى س = \frac{س^{ن} هـ^{أ س}}{أ} - \int س^{ن-١} هـ^{أ س}\,ى س \left[\frac{ن}{أ}\right]$

١٢٨ $\int س أ^{ك س}\,ى س = \frac{س أ^{ك س}}{ك لو أ} - \frac{أ^{ك س}}{(ك لو أ)^{٢}} + ث$

١٢٩ $\int س^{ن} أ^{ك س}\,ى س = \frac{أ^{ك س} س^{ن}}{ك لو أ} - \int أ^{ك س} س^{ن-١}\,ى س \left[\frac{ن}{ك لو أ}\right]$

١٣٠ $\int هـ^{أ س} جتا^{ن} س\,ى س = \frac{هـ^{أ س} جتا^{ن-١} س(أ جتا س + ن جا س)}{أ^{٢} + ن^{٢}} + \int هـ^{أ س} جتا^{ن-٢} س\,ى س \left[\frac{ن(ن-١)}{أ^{٢} + ن^{٢}}\right]$

١٣١ | جاز س ءس = جتاز س + ث

١٣٢ | جتاز س ءس = جاز س + ث

١٣٣ | ظاز س ءس = لـوجتاز س + ث

١٣٤ | ظتاز س ءس = لـوجاز س + ث

١٣٥ | قاز س ءس = ٢لـوظا$^{-١}$ هـ^{س} + ث

١٣٦ | قتاز س ءس = لـوظاز $\frac{س}{٢}$ + ث

١٣٧ | قاز^{٢} س ءس = ظاز س + ث

١٣٨ | قتاز^{٢} س ءس = − ظتاز س + ث

١٣٩ | قاز س ظاز س ءس = قاز س + ث

١٤٠ | قتاز س ظتاز س ءس = − قتاز س + ث

١٤١ | جاز^{٢} س ءس = $-\frac{س}{٢}+\frac{١}{٤}$ جاز ٢س + ث

١٤٢ | جتاز^{٢} س ءس = $\frac{س}{٢}+\frac{١}{٤}$ جاز ٢س + ث

المشاركون في حل المجموعة العاشرة

رقم التكامل	المشاركون
١٢٢	عبد العاطي وفا – طالبة mourad24000
١٢٣	عبد العاطي وفا – طالبة mourad24000
١٢٤	عبد العاطي وفا – طالبة mourad24000
١٢٥	عبد العاطي وفا – طالبة mourad24000
١٢٦	عبد العاطي وفا mourad24000
١٢٧	عبد العاطي وفا mourad24000
١٢٨	عبد العاطي وفا mourad24000
١٢٩	عبد العاطي وفا mourad24000
من ١٣٠ إلى ١٤٢	عبد العاطي وفا

١٢٢ $\int هـ^{س} \text{جا}س \, د س = ت$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف \, د و = ف و - \int و \, د ف$

نفرض أن : $ف = هـ^{س} \Leftarrow د ف = هـ^{س} د س$

$د و = \text{جا}س د س \Leftarrow و = -\text{جتا}س$

$\Leftarrow ت = -هـ^{س} \text{جتا}س + \int هـ^{س} \text{جتا}س \, د س$

باستخدام التكامل بالتجزيء مرة أخرى :

نفرض أن : $ف = هـ^{س} \Leftarrow د ف = هـ^{س} د س$

$د و = \text{جتا}س د س \Leftarrow و = \text{جا}س$

$\Leftarrow ت = -هـ^{س} \text{جتا}س + هـ^{س} \text{جا}س - \int هـ^{س} \text{جا}س \, د س$

$\Leftarrow ٢ت = -هـ^{س} \text{جتا}س + هـ^{س} \text{جا}س + ث$

$\Leftarrow ت = \frac{هـ^{س}(\text{جا}س - \text{جتا}س)}{٢} + ث$

١٢٣ $\int هـ^{أ س} \text{جا} ب س \, د س = ت$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف \, د و = ف و - \int و \, د ف$

نفرض أن : $ف = هـ^{أ س} \Leftarrow د ف = أ هـ^{أ س} د س$

$د و = \text{جا} ب س د س \Leftarrow و = -\frac{١}{ب} \text{جتا} ب س$

$\Leftarrow ت = -\frac{١}{ب} هـ^{أ س} \text{جتا} ب س + \frac{أ}{ب} \int هـ^{أ س} \text{جتا} ب س \, د س$

باستخدام التكامل بالتجزيء مرة أخرى :

نفرض أن : $ف = هـ^{أ س}$ $\Leftarrow$ $ى ف = أ هـ^{أ س} ى س$

$ى ه = جتا ب س ى س$ $\Leftarrow$ $ه = \frac{1}{ب} جا ب س$

$\Leftarrow$ $ت = -\frac{1}{ب} هـ^{أ س} جتا ب س + \frac{أ}{ب^{٢}} هـ^{أ س} جا ب س - \frac{أ^{٢}}{ب^{٢}} \int هـ^{أ س} جا ب س \ ى س$

$\Leftarrow$ $\frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{ب^{٢}} ت = -\frac{1}{ب^{٢}} هـ^{أ س} (أ جا ب س - ب جتا ب س) + ث$

$\Leftarrow$ $ت = \frac{هـ^{أ س} (أ جا ب س - ب جتا ب س)}{أ^{٢} + ب^{٢}} + ث$

١٢٤ $\int هـ^{س} جتا س \ ى س = ت$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف \ ى ه = ف ه - \int ه \ ى ف$

نفرض أن : $ف = هـ^{س}$ $\Leftarrow$ $ى ف = هـ^{س} ى س$

$ى ه = جتا س ى س$ $\Leftarrow$ $ه = جا س$

$\Leftarrow$ $ت = هـ^{س} جا س - \int هـ^{س} جا س \ ى س$

باستخدام التكامل بالتجزيء مرة أخرى :

نفرض أن : $ف = هـ^{س}$ $\Leftarrow$ $ى ف = هـ^{س} ى س$

$ى ه = جا س ى س$ $\Leftarrow$ $ه = -جتا س$

$\Leftarrow$ $ت = هـ^{س} جا س + هـ^{س} جتا س - \int هـ^{س} جتا س \ ى س$

$\Leftarrow$ $٢ت = هـ^{س} جا س + هـ^{س} جتا س + ث$

$\Leftarrow$ $ت = \frac{هـ^{س} (جا س + جتا س)}{٢} + ث$

١٢٥ $\int هـ^{أ س}$ جتا $ب س$ د$س = ت$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف$ د$و = ف و - \int و$ د$ف$

نفرض أن : $ف = هـ^{أ س}$ $\Leftarrow$ د$ف = أ هـ^{أ س}$ د$س$

د$و =$ جتا $ب س$ د$س$ $\Leftarrow$ $و = \frac{١}{ب}$ جا $ب س$

$\Leftarrow ت = \frac{١}{ب} هـ^{أ س}$ جا $ب س - \int هـ^{أ س}$ جا $ب س$ د$س - \frac{أ}{ب}$

باستخدام التكامل بالتجزيء مرة أخرى :

نفرض أن : $ف = هـ^{أ س}$ $\Leftarrow$ د$ف = أ هـ^{أ س}$ د$س$

د$و =$ جا $ب س$ د$س$ $\Leftarrow$ $و = -\frac{١}{ب}$ جتا $ب س$

$\Leftarrow ت = \frac{١}{ب} هـ^{أ س}$ جا $ب س + \frac{أ}{ب^{٢}} هـ^{أ س}$ جتا $ب س - \int هـ^{أ س}$ جتا $ب س$ د$س - \frac{أ^{٢}}{ب^{٢}}$

$\Leftarrow ت \frac{أ^{٢} + ب^{٢}}{ب^{٢}} = \frac{١}{ب^{٢}} هـ^{أ س} (ب$ جا $ب س + أ$ جتا $ب س) + ث$

$\Leftarrow ت = \frac{هـ^{أ س} (ب$ جا $ب س + أ$ جتا $ب س)}{أ^{٢} + ب^{٢}} + ث$

١٢٦ $\int س هـ^{أ س}$ د$س = ت$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف$ د$و = ف و - \int و$ د$ف$

نفرض أن : $ف = س$ $\Leftarrow$ د$ف =$ د$س$

د$و = هـ^{أ س}$ د$س$ $\Leftarrow$ $و = \frac{١}{أ} هـ^{أ س}$

$\Leftarrow ت = \frac{١}{أ} س هـ^{أ س} - \int هـ^{أ س}$ د$س = \frac{١}{أ} س هـ^{أ س} - \frac{١}{أ^{٢}} هـ^{أ س} + ث$

$= \frac{هـ^{أ س}}{أ^{٢}} (أ س - ١) + ث$

١٢٧ $\int س^{ن} هـ^{أ س} \, د س = ت$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف \, د هـ = ف هـ - \int هـ \, د ف$

نفرض أن : $ف = س^{ن} \Leftarrow د ف = ن س^{ن-١} \, د س$

$د هـ = هـ^{أ س} \, د س \Leftarrow هـ = \frac{١}{أ} هـ^{أ س}$

$\Leftarrow ت = \frac{س^{ن} هـ^{أ س}}{أ} - \int \frac{ن}{أ} س^{ن-١} هـ^{أ س} \, د س$

١٢٨ $\int س \, أ^{س} \, د س = ت$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف \, د هـ = ف هـ - \int هـ \, د ف$

نفرض أن : $ف = س \Leftarrow د ف = د س$

$د هـ = أ^{س} \, د س \Leftarrow هـ = \frac{١}{\ln أ} أ^{س}$

$\Leftarrow ت = \frac{س أ^{س}}{\ln أ} - \int \frac{١}{\ln أ} أ^{س} \, د س = \frac{س أ^{س}}{\ln أ} - \frac{أ^{س}}{(\ln أ)^{٢}} + ت$

١٢٩ $\int س^{ن} \, أ^{س} \, د س = ت$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف \, د هـ = ف هـ - \int هـ \, د ف$

نفرض أن : $ف = س^{ن} \Leftarrow د ف = ن س^{ن-١} \, د س$

$د هـ = أ^{س} \, د س \Leftarrow هـ = \frac{١}{\ln أ} أ^{س}$

$\Leftarrow ت = \frac{أ^{س} \, س^{ن}}{\ln أ} - \int \frac{ن}{\ln أ} أ^{س} \, س^{ن-١} \, د س$

١٣٠ $\int هـ^{أ س}\ جتا^{ن} س\ ى س = ت_{ن}$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\boxed{\int ف\ ى\ و = ف\ و - \int و\ ى\ ف}$

نفرض أن : $ف = جتا^{ن-١} س \quad \Leftarrow \quad ى ف = -(ن-١) جتا^{ن-٢} س\ جاس\ ى س$

$ى و = هـ^{أ س} جتاس\ ى س \quad \Leftarrow \quad و = \frac{هـ^{أ س}(جاس + أ جتاس)}{١+أ^{٢}}$ (انظر رقم ١٢٥)

$\Leftarrow \quad ت_{ن} = \frac{هـ^{أ س} جتا^{ن-١} س(جاس + أ جتاس)}{١+أ^{٢}} + \int هـ^{أ س} جتا^{ن-٢} س\ جاس(جاس + أ جتاس)\ ى س$

$= \frac{هـ^{أ س} جتا^{ن-١} س(جاس + أ جتاس)}{١+أ^{٢}} + \int هـ^{أ س} جتا^{ن-٢} س(جا^{٢} س + أ جتاس جاس)\ ى س$

$= \frac{هـ^{أ س} جتا^{ن-١} س(جاس + أ جتاس)}{١+أ^{٢}} + \int هـ^{أ س} جتا^{ن-٢} س(١ - جتا^{٢} س + أ جتاس جاس)\ ى س$

$= \frac{هـ^{أ س} جتا^{ن-١} س(جاس + أ جتاس)}{١+أ^{٢}} + \int هـ^{أ س} جتا^{ن-٢} س\ ى س$

$- \int هـ^{أ س} جتا^{ن} س\ ى س + \int هـ^{أ س} جتا^{ن-١} س جاس\ ى س$

$ك$

باستخدام التكامل بالتجزيء لايجاد ك :

نفرض أن : $ف = هـ^{أ س} \quad \Leftarrow \quad ى ف = \frac{١}{أ} هـ^{أ س}\ ى س$

$ى و = جتا^{ن-١} س جاس\ ى س \quad \Leftarrow \quad و = -\frac{١}{ن} جتا^{ن} س$

$\Leftarrow \quad ك = -\frac{هـ^{أ س} جتا^{ن} س}{ن} + \int هـ^{أ س} جتا^{ن} س\ ى س$

$$\Leftarrow \quad ت_{ن} = \frac{هـ^{أ س} \, جتا^{ن-١} س \left(جاس + أ جتاس \right)}{١ + أ^{٢}} + \frac{ن - ١}{١ + أ^{٢}} \int هـ^{أ س} \, جتا^{ن-٢} س \, ى س$$

$$- \frac{ن - ١}{١ + أ^{٢}} ت_{ن} + \left(\frac{(ن-١) أ^{٢}}{١ + أ^{٢}} + \frac{هـ^{أ س} \, جتا^{ن} س}{ن} - \int هـ^{أ س} \, جتا^{ن} س \, ى س \right) \frac{١}{ن أ^{٢}}$$

$$= \frac{هـ^{أ س} \, جتا^{ن-١} س \left(جاس + أ جتاس \right)}{١ + أ^{٢}} + \frac{ن - ١}{١ + أ^{٢}} \int هـ^{أ س} \, جتا^{ن-٢} س \, ى س$$

$$- \frac{ن - ١}{١ + أ^{٢}} ت_{ن} + \frac{(ن-١) أ^{٢} \, هـ^{أ س} \, جتا^{ن} س}{ن \left(١ + أ^{٢} \right)} - \frac{ن - ١}{ن \left(١ + أ^{٢} \right)} ت_{ن}$$

$$\Leftarrow \quad \frac{أ^{٢} + ن^{٢}}{ن \left(١ + أ^{٢} \right)} ت_{ن} = \frac{هـ^{أ س} \, جتا^{ن-١} س \left(جاس + أ جتاس \right)}{١ + أ^{٢}} + \frac{ن - ١}{١ + أ^{٢}} \int هـ^{أ س} \, جتا^{ن-٢} س \, ى س$$

$$- \frac{(ن-١) أ^{٢} \, هـ^{أ س} \, جتا^{ن} س}{ن \left(١ + أ^{٢} \right)}$$

$$\Leftarrow \quad ت_{ن} = \frac{ن هـ^{أ س} \, جتا^{ن-١} س \left(جاس + أ جتاس \right)}{أ^{٢} + ن^{٢}} + \frac{(ن-١) ن}{أ^{٢} + ن^{٢}} \int هـ^{أ س} \, جتا^{ن-٢} س \, ى س$$

$$- \frac{(ن-١) أ^{٢} \, هـ^{أ س} \, جتا^{ن} س}{أ^{٢} + ن^{٢}}$$

$$= \frac{هـ^{أ س} \, جتا^{ن-١} س \left(أ جتاس + ن جاس \right)}{أ^{٢} + ن^{٢}} + \frac{(ن-١) ن}{أ^{٢} + ن^{٢}} \int هـ^{أ س} \, جتا^{ن-٢} س \, ى س$$

١٣١ $$\int جاز \, س \, ى س = ى(جتاز \, س) = جتاز \, س + ث$$

١٣٢ $$\int جتاز \, س ى س = ى(جاز \, س) = جاز \, س + ث$$

١٣٣ $\int$ ظا^{٢} س ء س $= \int \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$ ء س $=$ لو$|$جتا س$|$ $+$ ث

١٣٤ $\int$ ظتا^{٢} س ء س $= \int \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}}$ ء س $=$ لو$|$جا س$|$ $+$ ث

١٣٥ $\int$ قا^{٢} س ء س $= \int \frac{٢\text{ء س}}{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{هـ}^{-\text{س}}} = \int ٢ \frac{\text{هـ}^{\text{س}}\text{ء س}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} - ١} = ٢$ لو$|$ظا$^{-١}$ هـ$^{\text{س}}|$ $+$ ث

١٣٦ $\int$ قتا^{٢} س ء س $= \int \frac{٢\text{ء س}}{\text{هـ}^{\text{س}} + \text{هـ}^{-\text{س}}} = \int ٢ \frac{\text{هـ}^{\text{س}}\text{ء س}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} + ١}$

$= \text{لو}\left|\frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١}\right| + \text{ث} = \text{لو}\left|\frac{\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{س}} - \text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{س}}}{\text{هـ}^{\frac{١}{٢}\text{س}} + \text{هـ}^{-\frac{١}{٢}\text{س}}}\right| + \text{ث} = \text{لو}|\text{ظا}\frac{\text{س}}{٢}| + \text{ث}$

١٣٧ $\int$ قا^{٢} س ء س $= \int$ ء(ظا س) $=$ ظا س $+$ ث

١٣٨ $\int$ قتا^{٢} س ء س $= \int$ ء(−ظتا س) $= -$ ظتا س $+$ ث

١٣٩ $\int$ قا س ظا س ء س $= \int$ ء(قا س) $=$ قا س $+$ ث

١٤٠ $\int$ قتا س ظتا س ء س $= \int$ ء(− قتا س) $= -$ قتا س $+$ ث

١٤١ $\int$ جا^{٢} س ء س $= \frac{١}{٢}\int$ (جتا ٢س − ١) ء س $= \frac{\text{س}}{٢} - \frac{١}{٤}$ جا ٢س $+$ ث

١٤٢ $\int$ جتا^{٢} س ء س $= \frac{١}{٢}\int$ (جتا ٢س + ١) ء س $= \frac{\text{س}}{٢} + \frac{١}{٤}$ جا ٢س $+$ ث

المجموعة الحادية عشر

الدوال اللوغاريتمية

١٤٣ $\int لـو\ س\ ءس = س لـو\ س - س + ث$

١٤٤ $\int \frac{ءس}{س لـو\ س} = لـو(لـو\ س) + ث$

١٤٥ $\int س^{ن}\ لـو\ س\ ءس = س^{ن+١}\left[\frac{لـو\ س}{ن+١} - \frac{١}{(ن+١)^{٢}}\right] + ث$

١٤٦ $\int (لـو\ س)^{ن}\ ءس = س(لـو\ س)^{ن} - ن\int (لـو\ س)^{ن-١}\ ءس$

١٤٧ $\int س^{ر}\ (لـو\ س)^{ن}\ ءس = \frac{س^{ر+١}}{ر+١}(لـو\ س)^{ن} - \frac{ن}{ر+١}\int س^{ر}\ (لـو\ س)^{ن-١}\ ءس$

المشاركون في حل المجموعة الحادية عشر

رقم التكامل	المشاركون
١٤٣	عبد العاطي وفا - عبد الواحد
١٤٤	عبد العاطي وفا - عبد الواحد
١٤٥	عبد العاطي وفا - عبد الواحد
١٤٦	عبد العاطي وفا - عبد الواحد
١٤٧	عبد العاطي وفا - عبد الواحد

١٤٣ $\int$ لـوس ء س = ت

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int$ ف ء ه = ف ه − $\int$ ه ء ف

نفرض أن : ف = لـوس $\Leftarrow$ ء ف = $\frac{١}{س}$ ء س

ء ه = ء س $\Leftarrow$ ه = س

$\Leftarrow$ ت = س لـوس − $\int$ ء س = س لـوس − س + ث

١٤٤ $\int \frac{ء س}{س لـوس} = \int \frac{\frac{١}{س}}{لـوس}$ ء س = $\int \frac{(لـوس)'}{لـوس}$ ء س = لـو(لـوس) + ث

١٤٥ $\int$ س^{ن} لـوس ء س = ت

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int$ ف ء ه = ف ه − $\int$ ه ء ف

نفرض أن : ف = لـوس $\Leftarrow$ ء ف = $\frac{١}{س}$ ء س

ء ه = س^{ن} ء س $\Leftarrow$ ه = $\frac{١}{ن+١}$ س$^{ن+١}$

$\Leftarrow$ ت = $\frac{س^{ن+١} لـوس}{ن+١} - \int \frac{١}{ن+١}$ س^{ن} ء س

$= \frac{س^{ن+١} لـوس}{ن+١} - \frac{س^{ن+١}}{(ن+١)^{٢}} + ث$

$= س^{ن+١} \left[\frac{لـوس}{ن+١} - \frac{١}{(ن+١)^{٢}} \right] + ث$

١٤٦ $\int (\text{لـو } س)^{ن} \, د س = ت$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف \, د هـ = ف هـ - \int هـ \, د ف$

نفرض أن : $ف = (\text{لـو } س)^{ن} \Leftarrow د ف = \frac{ن (\text{لـو } س)^{ن-١}}{س} د س$

$د هـ = د س \Leftarrow هـ = س$

$\Leftarrow ت = س (\text{لـو } س)^{ن} - ن \int (\text{لـو } س)^{ن-١} \, د س$

١٤٧ $\int س^{ر} (\text{لـو } س)^{ن} \, د س = \frac{س^{ر+١}}{ر+١} (\text{لـو } س)^{ن} - \frac{ن}{ر+١} \int س^{ر} (\text{لـو } س)^{ن-١} \, د س$

باستخدام التكامل بالتجزيء : $\int ف \, د هـ = ف هـ - \int هـ \, د ف$

نفرض أن : $ف = س^{ر} (\text{لـو } س)^{ن} \Leftarrow د ف = [ر س^{ر-١} (\text{لـو } س)^{ن} + ن س^{ر-١} (\text{لـو } س)^{ن-١}] د س$

$د هـ = د س \Leftarrow هـ = س$

$\Leftarrow ت = س^{ر+١} (\text{لـو } س)^{ن} - ر \int س^{ر} (\text{لـو } س)^{ن} \, د س - ن \int س^{ر} (\text{لـو } س)^{ن-١} \, د س$

$= س^{ر+١} (\text{لـو } س)^{ن} - ر ت - ن \int س^{ر} (\text{لـو } س)^{ن-١} \, د س$

$\Leftarrow (ر+١) ت = س^{ر+١} (\text{لـو } س)^{ن} - ن \int س^{ر} (\text{لـو } س)^{ن-١} \, د س$

$\Leftarrow ت = \frac{س^{ر+١}}{ر+١} (\text{لـو } س)^{ن} - \frac{ن}{ر+١} \int س^{ر} (\text{لـو } س)^{ن-١} \, د س$