G03-Hamilton-EA-200324.tex, 200403

3. Hamilton körök és utak

Dr. Szalkai István,

2020.03.24.

Definíció: *A $C \subseteq G$ út/kör a gráf* **Hamilton útja/köre** *ha G minden csúcsát pontosan egyszer tartalmazza, azaz ha C -ben érintett csúcsok sorrendben $C = (c_1, ..., c_n)$, akkor ezek a $(c_1, ..., c_n)$ csúcsok sorozata egyszeresen kiadja a G gráf V csúcsainak halmazát.* □

Szavakkal: G minden csúcsán pontosan egyszer haladunk át.

Megjegyzések:

Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) ír matematikus

Például sakktábla bejárása, utazó ügynök probléma.

!!! Csak egy szóban ("csúcs"/"él") különbözik az Euler köröktől, de hatalmas különbség !!!

A G gráfban többszörös élek és hurokélek lényegtelenek.

A Hamilton körben/útban nincs csúcs- (és így él-) ismétlődés sem, tehát *egyszerű* utak és körök.

A G gráf szükségképpen összefüggő.

A $C = (c_1, ..., c_n)$ felsorolás a V csúcsoknak egy *permutációja*!

=> **Algoritmus:** Ellenőrizzük a V csúcshalmaz összes permutációját: éleken keresztül haladva megvalósítható-e.

DE: $|V| = n$ esetén ez $n!$ lépés, ami már $n = 50 - 100$ esetén is évmilliárdokig tartó programfutás!

Nem ismert rá *gyors* algoritmus! DE:

Tétel: A Hamilton körök (általános) problémája (=van/nincs) $\mathcal{NP}$ - *teljes* (Nondeterministic Polynomial Complete). □

Definíció: Egy számítástechnikai Π probléma $\mathcal{NP}$ - *teljes,* ha a következő implikáció teljesül:

" *Ha a Π problémára lenne gyors algoritmus, AKKOR a világ összes problémájára is lenne gyors algoritmus.* "

Negatív tételek

Nyakkendő és **szélkerék gráf**

1. Állítás: *Ha a G gráfban van k db olyan csúcs, hogy e csúcsokat a hozzájuk tartozó élekkel együtt G -ből elhagyva a gráf* k *-nál* több *komponensre esik szét, akkor a gráfban nincs Hamilton* **kör** *.* $\square$

Definíció: *Ez a k pont* **elvágó** **pontrendszer.** $\square$

2. Állítás: *Ha a G gráfban van k db olyan csúcs, hogy e csúcsokat a hozzájuk tartozó élekkel együtt G -ből elhagyva a gráf* $k+1$ *-nél* több *komponensre esik szét, akkor a gráfban nincs Hamilton* **út** *.* $\square$

Definíció: *Ez a k pont* **erősen elvágó** **pontrendszer.** $\square$

Figyelem: egyik állítás sem fordítható meg !

Pozitív tételek

"Sok élt (nagy fokszámú pontokat) tartalmazó gráfokban van H-kör/út ".

Tétel (Dirac Gábor, 1952)**:** *Ha egy egyszerű gráfban minden pont foka*

$$\delta(v) \geq \frac{|V|}{2} \tag{1}$$

$(|V| \geq 3)$, *akkor a gráfban van Hamilton -kör.* $\square$

Tétel (Oysein Ore, dán, 1960)**:** *Ha egy egyszerű gráfban tetszőleges* $u, v \in V$ *csúcsokra, ha* $\{u, v,\} \notin E$,

$$\delta(u) + \delta(v) \geq |V| \quad , \tag{2}$$

$(|V| \geq 3)$, *akkor a gráfban van Hamilton -kör.* $\square$

Tétel (Pósa Lajos, 1962)**:** *Ha* $G = (V, E)$ *egyszerű gráf,* $n = |V| \geq 3$ *és minden* $k \leq \frac{n}{2}$ *természetes számra igaz, hogy a legfeljebb* k*-fokú pontok száma* <u>kisebb</u>*, mint* k*, akkor van* G*- ben Hamilton* <u>*-kör*</u>*.* $\square$

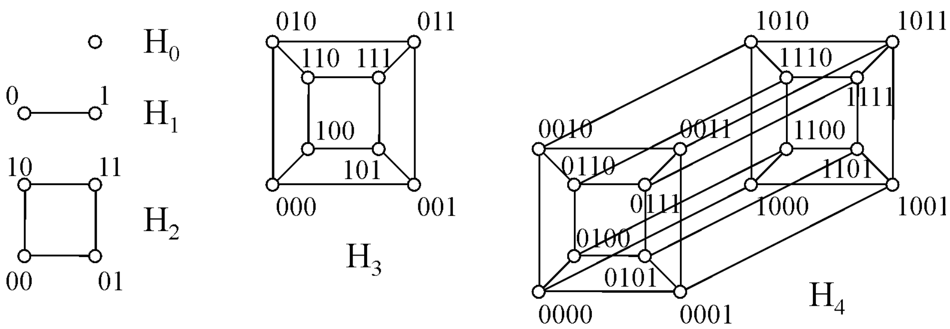
Tétel (Erdős Pál)**:** *Ha* $G = (V, E)$ *egyszerű gráf,* $n = |V| > 2$ *és minden* $k \leq \frac{n-1}{2}$ *természetes számra igaz hogy a legfeljebb* k*-fokú pontok száma* <u>legfeljebb</u> k*, akkor van* G*- ben Hamilton* <u>*-út*</u>*.* $\square$

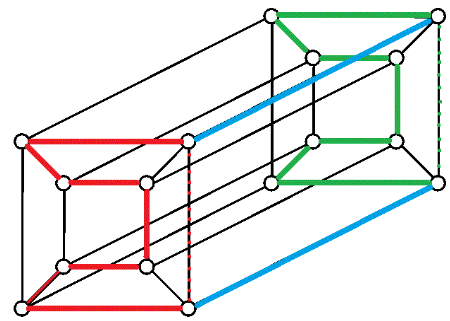
Kockagráfok és Gray-kódok

Definíció: $(n \in \mathbb{N})$ **n-dimenziós kockagráfok** és *csúcsaik* **standard címkéi**:

$\mathbf{H_0}$:= *egyetlen pont él nélkül, címkéje legyen* (0) .

$\mathbf{H_{n+1}}$:= *két példány* H_n *és a megfelelő csúcsokat kössük össze egy-egy új éllel, majd egyik példány* H_n *csúcsai eredeti címkéi elé írjunk* 0 *-át,*
másik példány H_n *csúcsai eredeti címkéi elé írjunk* 1 *-et.* □





Állítás: H_n *-ben,* $n \geq 2$ *esetén mindig létezik Hamilton kör.*

Bizonyítás: Indukcióval $n \in \mathbb{N}$ -re. $H_2 = C_4$ (négyzet), amiben láthatóan van Hamilton - kör.
Indukciós lépés $n+1$ -re: H_n két példányában az indukciós feltétel szerint létező Hamilton köröket azonos helyen megszakítjuk, és a H_n két példányában levő megfelelő végpontokat összekötő új élekkel e két megszakított Hamilton kört összekötjük. □

Állítás: H_n *-ben az éllel összekötött (szomszédos) csúcsok standard kódjai pontosan egy számjegyben (digit) térnek el egymástól.*
Bizonyítás: n-re vonatkozó indukcióval. □

Definíció: *Az* $(s_1, ..., s_k) \subseteq \{0,1\}^n$ *jelsorozat* **k hosszúságú Gray kód**, *ha a szomszédos* s_i, s_{i+1} $(i < k)$ ÉS *az* s_k, s_1 *sorozatok pontosan egy koordinátájukban (bit) térnek el egymástól.* □

Tehát: Hamilton kör => 2^n (max) hosszú Gray kód. □

A kockagráfok további tulajdonságai:

Állítás: *Tetszőleges dimenziós kockagráfban*

a) H_n *-nek* 2^n *csúcsa van, és a címkék az összes* n *-hosszúságú 0-1 sorozatok.*

b) H_n *-ben minden,* 2^n *-nél nem hosszabb* páros *hosszúságú kör megtalálható.*

c) H_n *éleinek* $\mathbf{e_n}$ *számára fennáll a köv. rekurzió:*

$$\mathbf{e_{n+1}} = 2\mathbf{e_n} + 2^n \ , \qquad \mathbf{e_0} = 0$$

d) H_n $\quad n$ *-reguláris gráf.*

e) H_n $\quad$ *kétpólusú* vagyis páros *gráf.*

f) H_n *-ben bármely két csúcs távolsága éppen annyi, mint ahány helyen a (standard) címkéjük eltér egymástól.*

g) H_n *átmérője* n .

h) H_n *derékbősége* $\quad girth\,(H_n) = 4$.

Bizonyítás: $\quad$ Indukcióval n -re.