INFORMATION!

Før du anvender løsningerne, så husk at læs betingelserne for løsningerne, som du kan finde på hjemmesiden, eller her:
http://matematikhfsvar.page.tl/%26%238226%3B-Betingelser-matematik-B.htm

Matematik B STX 22. maj 2014
Løsningsforslag
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

Tallet 7 % omregnes til fremskrivningsfaktoren
$a = 1 + \frac{7}{100} \Rightarrow a = 1.07$
Dermed er forskriften
$L(t) = 120 \cdot 1.07^t$
Hvor $L(t)$ er mængden, målt i mio/L af alger til tidspunktet t, målt i timen.

Opgave 2

Udtrykket reduceres.
$(a+b)^2 - a^2 - a \cdot b$
$= a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b - a^2 - a \cdot b$
$= b^2 + a \cdot b$
Bemærk, at første kvadratsætning blev anvendt.

Opgave 3

Andengradsligningen løses.
$x^2 + 2x - 8 = 0$
Denne kan faktoriseres ved at se, hvilke to tal lagt sammen giver 2, men ganget sammen giver -8, man ser, at 4 og -2 virker, da $4 - 2 = 2$ og $4 \cdot (-2) = -8$, så
$x = -4 \vee x = 2$.

Læseren kan evt. løse ligningen på alm. diskriminant metode, eller kvadratkomplettering.

Opgave 4

Funktionen $f(x) = x^2 - 5x + 1$ har flg. fortegn:
$a > 0, b < 0, c > 0$.
Grafen for C har $a < 0$, så den udelukkes.
Grafen for B skærer y-aksen længere oppe end ved $(0; 1)$, så c − værdien i funktionen for B må være større end 1, så

Grafen for A er svaret.

Opgave 5

Arealet er 24, og højden er $h = 6$. Så er

$$24 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot g \Leftrightarrow 48 = 6 \cdot g \Leftrightarrow \frac{48}{6} = g \Leftrightarrow g = 8$$

En lille trick er, at man kan sige "3-4-5" tilfældet, det samme gælder her. "6-8-10" tilfældet, men den går ikke til eksamen, så

$$c = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{10^2} = 10$$

Opgave 6

Først kan man tegne en ret linje ned $t = 4$, og så kan man aflæse to punkter og bestemme hældningen for $N'(4)$.

To punkter findes (grafisk):

$A(2; 1000)$, $B(7; 800)$

Dermed er

$$a = \frac{800 - 1000}{7 - 2} = \frac{-200}{5} = -40$$

Dvs. efter 4 døgn aftager populationen med 40 medlemmer hvert døgn.

NB: Da linjen formentlig ikke er helt nøjagtig, så kan den måske godt afvige lidt.

Grafen:

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Opgave 7

$restart:; with(Gym):$

Oplysningerne defineres.
$L1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6]$:
$L2 := [62.01, 62.25, 62.47, 62.75, 62.77, 63.00, 63.08]$:

Spgm. a

Der anvendes lineær regression.
$f(x) := LinReg(L1, L2, x)$:
$evalf[5](f(x))$

$$0.17893\, x + 62.082 \tag{7.1.1}$$

Dermed er $a = 0.17893$ og $b = 61.617$.

Spgm. b

2014 svarer til $x = 8$, så
$f(8)$

$$63.5132142857143 \tag{7.2.1}$$

Dvs. i år 2014 vil den gennemsnitlige tlbagetrækningsalder være 63.5

Tallet a fortæller, at for hvert år der går, stiger den gennemsnitlige tlbagetrækningsalder med 0.28607

Spgm. c

Her løses ligningen $f(x) = 65$, så
$f(x) = 65 \xrightarrow{\text{solve}} 16.30938124 \xrightarrow{\text{ceiling}} 17$
Så i slutningen af år 2023 vil man opleve, at den gennemsnitlige tlbagetrækningsalder er 65.

Opgave 8

$restart$:; $with(Gym)$:
Længderne defineres uden | symbolet.
$AB := 25$:; $BC := 14$:; $AC := 27$:

Spgm. a

Vinkel A og B bestemmes.

$$A := invCos\left(\frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2 \cdot AC \cdot AB}\right)$$

$$A := 30.93201990 \tag{8.1.1}$$

$$B := invCos\left(\frac{BC^2 + AB^2 - AC^2}{2 \cdot BC \cdot AB}\right)$$

$$B := 82.44784818 \tag{8.1.2}$$

Dermed fandt man de ønskede vinkler.

Spgm. b

Arealet af trekanten bestemmes ved ½appelsinformlen.

$$T = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot Sin(A)$$

$$T = 173.4819876 \tag{8.2.1}$$

Den modstående vinkel, hvor v_B skærer AC betegnes med P, så er vinkel P :

$P := 180 - A - \frac{B}{2}$

$$P := 107.8440560 \quad \textbf{(8.2.2)}$$

Sinusrelationerne anvendes til at finde længden af $v_B = BP$.

$\frac{Sin(A)}{BP} = \frac{Sin(P)}{25}$

$$\frac{0.5140207038}{BP} = 0.03807576221 \quad \textbf{(8.2.3)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for BP}}$

$$[[BP = 13.49994521]] \quad \textbf{(8.2.4)}$$

Dermed fandt man den ønskede længde.

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

$f(t) := 12 \cdot 0.97^t$:

Tallet $b = 12$ fortæller, at i år 2014 var mængden af det radioaktive stof på 12g, hvorved dette aftager hvert år med 3 %, da

$r = (0.97 - 1) \cdot 100$

$$r = -3.00 \quad \textbf{(9.1.1)}$$

Spgm. b

Halveringstiden er

$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(0.97)} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} T_{\frac{1}{2}} = 22.757$

Stoffet halveres hvert. 22.75 år.

Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :

$f(x) := 2x^3 - 57x^2 - 120x - 5$:

Spgm. a

Tangenten for $f(x)$ er:

$f(1)$

$$-180 \quad \textbf{(10.1.1)}$$

$f'(1)$

$$-228 \quad \textbf{(10.1.2)}$$

Så

$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$

$$y = -228x + 48 \quad \textbf{(10.1.3)}$$

Spgm. b

Monotoniforholdene for $f(x)$ undersøges.

$f'(x) = 0$

$$6x^2 - 114x - 120 = 0 \tag{10.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 20], [x = -1]] \tag{10.2.2}$$

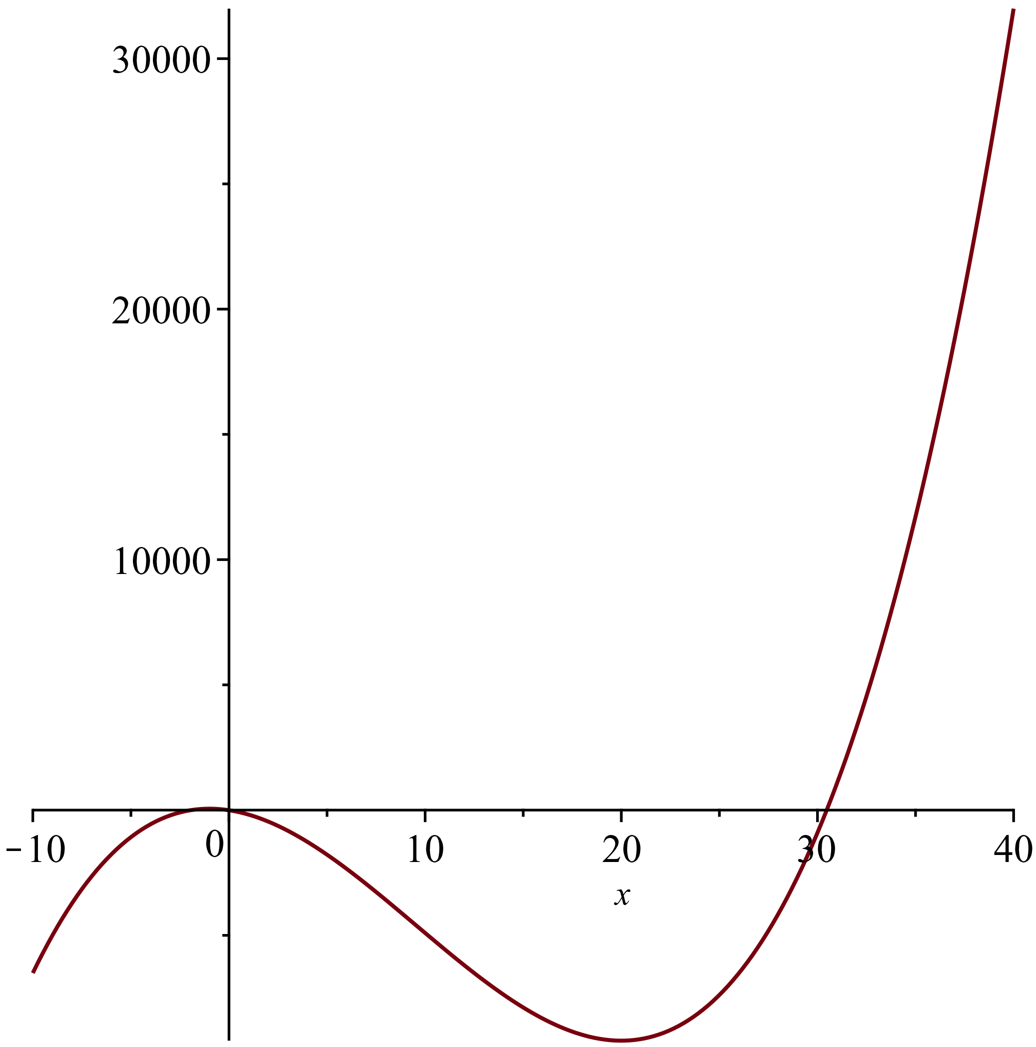
Fortegnsvariation for $f'(x)$ undersøges.

$f'(-2); f'(5); f'(21)$

$$132$$
$$-540$$
$$132 \tag{10.2.3}$$

Monotoniskemaet overlades til læseren. Du kan se, at der er "plus-minus-plus" tilfælde, så
$f(x)$ er voksende i intervallet $x \in (-\infty; -1] \cup [20; \infty)$.
$f(x)$ er aftagende i intervallet $x \in [-1; 20]$.

$plot(f(x), x = -10..40)$



Opgave 11

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + 2x, x > 0.$ (overvej hvorfor)

$F(x)$ bestemmes. Bemærk, at $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{-\frac{1}{2}}$, så er

$$F(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} x^{-\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{1+1} x^{1+1} + C = \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + x^2 + C = 2\sqrt{x} + x^2 + C$$

Så findes C vha punktet P.

$10 = 2\sqrt{4} + 4^2 + C \Leftrightarrow 10 = 4 + 16 + C \Leftrightarrow C = -10$, forskriften er

$F(x) = 2\sqrt{x} + x^2 - 10.$

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

De forventede værdier udregnes således:

$\frac{22.1}{100} \cdot 500$

$$110.5000000 \tag{12.1.1}$$

$\frac{17.2}{100} \cdot 500$

$$86.00000000 \tag{12.1.2}$$

$\frac{13.4}{100} \cdot 500$

$$67.00000000 \tag{12.1.3}$$

$\frac{10.4}{100} \cdot 500$

$$52.00000000 \tag{12.1.4}$$

$\frac{8.1}{100} \cdot 500$

$$40.50000000 \tag{12.1.5}$$

$\frac{6.3}{100} \cdot 500$

$$31.50000000 \tag{12.1.6}$$

$\frac{22.5}{100} \cdot 500$

$$112.5000000 \tag{12.1.7}$$

Så er

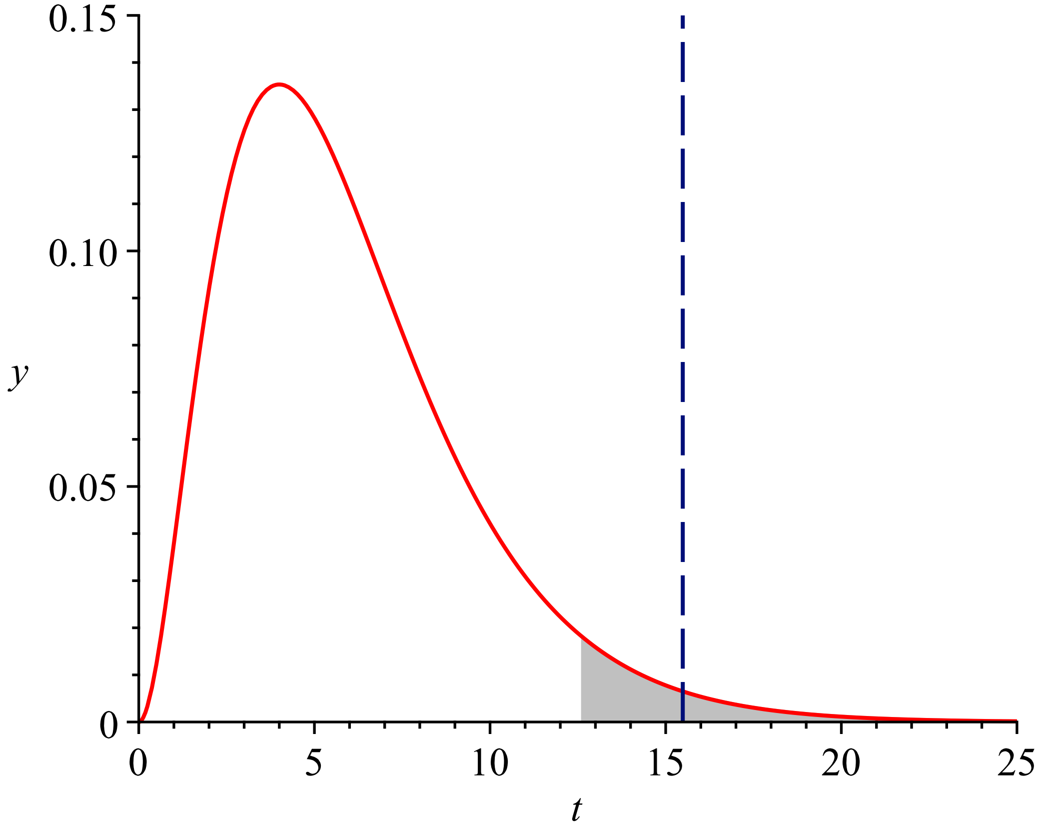
forv := [110.5, 86, 67, 52, 40.5, 31.5, 112.5] :

obs := [90, 70, 75, 50, 45, 45, 125] :

Spgm. b

Der anvendes en kommando for en GOF test.
$ChiKvadratGOFtest(obs, forv, level = 0.05)$

χ^2-teststørrelse = 15.487
Frihedsgrader = 6
Kritisk værdi = 12.592
p-værdi = 0.016791



Da teststørrelsen er større end den kritiske værdi, afvises hypotesen. Det viser sig, at ventetiden har ændret sig.

Opgave 13

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Længden af porten er 240 cm, svarende til, at hver side, symmetrisk om y-aksen er 120cm, så dermed er $x = \pm 120$. Toppunktet kendes, som så er $T = (0, 210)$.
Så af a, b og c kendes b og c, da $c = 210$, pga. $b = 0$. (se figuren). Dermed skal man kun finde a.
Man kan bruge det faktoriserede andengradspolynomium (overlades til læseren) eller

$$185 = a \cdot 120^2 + 0 \cdot 120 + 210 \Leftrightarrow 185 = 14400\, a + 210 \Leftrightarrow -25 = 14400\, a \Leftrightarrow a = -\frac{25}{14400} = -0.001736$$

, dermed er forskriften som angivet.
$f(x) = -0.001736 \cdot x^2 + 210$

$$f(x) = -0.001736\,x^2 + 210 \tag{13.1.1}$$

Spgm. b

Arealet af porten er

$A = \int_{-120}^{120} \left(-0.001736 \cdot x^2 + 210\right) \mathrm{d}x$

$$A = 48400.12800 \tag{13.2.1}$$

Dvs. arealet er 48400.12800 cm^2