MATEMATIK B til A

Vejledende løsning på
eksamensopgaven fra
27 maj 2016 STX

Anders Jørgensen & Mark Kddafi

2016

MATEMATIK
Vejledende eksempler på eksamensopgaver

Dette sæt indeholder et vejledende eksempel på eksamenssættet fra 27 maj 2016. Der vil blive foretaget beregninger samt illustrationer i CAS programmer herunder GeoGebra. Maple 2016 anvendes til de mere komplicerede udregninger, idet man forudsætter, at man kan anvende CAS til eksamen. Desuden løses delprøve 1 uden hjælpemidler. Følgende eksamenssæt anvendes:

- Matematik B->A, STX 27 maj 2016 1. WordMat
- Matematik B->A, STX 27 maj 2016 2. Maple 2016

For anvendelse af dokumentet, anbefales det, at man prøver at løse opgaven først, inden man anvender løsningerne.

Anders Jørgensen & Mark Kddafi
2016

Vejledende eksempler på eksamensopgaver

Matematik B->A, STX - **27 maj 2016** delprøve 1

Opgave 1

Reducér

$$(x+5)^2-25\ .$$

Udtrykket

$$(x+5)^2-25$$

Reduceres på baggrund af første kvadratsætning.

$$x^2+10x+25-25=x^2+10x=x(x+10)$$

Som er det korteste man kan reducere.

Opgave 2

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}\ \text{og}\ \vec{b}=\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}.$$

Bestem determinanten af $\vec{a}$ og $\vec{b}$.

Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er givet ved

$$\vec{a}=\begin{bmatrix}3\\-7\end{bmatrix},\qquad \vec{b}=\begin{bmatrix}8\\5\end{bmatrix}$$

Her anvendes determinanten.

$$\det(\vec{a},\vec{b})=\begin{vmatrix}3 & 8\\-7 & 5\end{vmatrix}=3\cdot5-(-7)\cdot8=15+56=71$$

Opgave 3

En bestemt kommune havde i 2010 en indtægt fra parkering på 15 mio. kr. I de efterfølgende år voksede indtægten med 11,8% om året.

Indfør passende variable, og opstil en model, der beskriver udviklingen i kommunens indtægt fra parkering.

Her er år 2010 begyndelsesåret, dvs. $b = 15mio$. Man kender ligeledes renten, som er $r = 11.8\%$, dvs. den er voksende. Dermed mangler man fremskrivningsfaktoren a.

$$a = 1 + r, \qquad a = 1 + \left(\frac{11.8}{100}\right) = 1 + 0.118 = 1.118$$

Hermed har man funktionsforskriften (af en eksponentiel model) som er

$$f(x) = 15 \cdot 1.118^x$$

Som beskriver udviklingen af de kedelige penge som kommunen indtjener for parkeringen. Dette forventes stigende med 11.8% for hvert år der går efter år 2010.

Opgave 4

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 + 10x.$$

Bestem den stamfunktion til f, hvis graf går gennem punktet $P(2,20)$.

Man anvender integralregning. Lad funktionen være givet.

$$f(x) = x^3 + 10x$$

Denne integreres.

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 5x^2 + k$$

Så løses en ligning for k

$$\begin{aligned}
&20 = \frac{1}{4} \cdot 2^4 + 5 \cdot 2^2 + k \Leftrightarrow \\
&20 = 4 + 20 + k \Leftrightarrow \\
&20 = 24 + k \Leftrightarrow \\
&k = -4
\end{aligned}$$

Så stamfunktionen til f er

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 5x^2 - 4$$

Opgave 5

> En funktion f er givet ved
>
> $$f(x) = 5e^x + x .$$
>
> Undersøg, om f er en løsning til differentialligningen
>
> $$\frac{dy}{dx} = y - x + 1 .$$

Der undersøges, om $f(x)$ er løsning til differentialligningen. Dette indsættes direkte.

$$f(x) = 5 \cdot \mathrm{e}^x + x, \qquad f'(x) = 5 \cdot \mathrm{e}^x + 1$$

Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = y - x + 1$$

Så er

$$5 \cdot \mathrm{e}^x + 1 = 5 \cdot \mathrm{e}^x + x - x + 1$$
$$5 \cdot \mathrm{e}^x + 1 = 5 \cdot \mathrm{e}^x + 1$$

Disse er identiske, derved er f løsningen til differentialligningen.

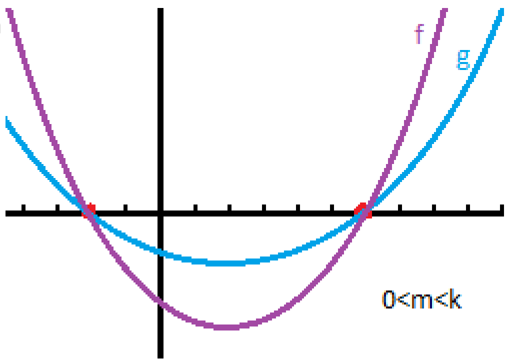
Opgave 6

> To andengradspolynomier f og g er givet ved
>
> $$f(x) = k \cdot (x+2) \cdot (x-6)$$
> $$g(x) = m \cdot (x+2) \cdot (x-6),$$
>
> hvor $0 < m < k$.
>
> Skitsér i samme koordinatsystem en mulig graf for hver af funktionerne f og g.

Begge funktioner er givet (i faktoriseret form) ved

$$f(x) = k \cdot (x+2) \cdot (x-6)$$
$$g(x) = m \cdot (x+2) \cdot (x-6)$$

Det ses, at begge grafer skal skære hinanden i førsteaksen. Der er m større end 0 og mindre end k, så må det gælde, at: ->



Matematik A eksamen
27. maj 2016

www.matematikhfsvar.page.tl

Info: *I denne eksamensopgave anvendes der* *punktum*
som decimaltal istedet for *komma*.
Eks. 3.14 *istedet for* 3,14

Opgave 7 - lineære funktioner

Tabellen viser udviklingen i gennemsnitslevealderen for mænd i perioden 2000-2014.

Årstal	2000	2002	2004	2006	2008	2010	2012	2014
Gennemsnitslevealder (år)	74,3	74,7	75,2	75,9	76,3	77,1	77,9	78,5

I en model antages det, at gennemsnitslevealderen for mænd (målt i år) som funktion af tiden (målt i antal år efter 2000) kan beskrives ved en lineær funktion f.

a) Benyt tabellens data til at bestemme en forskrift for f.

Det oplyses, at i modellen kan udviklingen i gennemsnitslevealderen for kvinder i samme periode beskrives ved

$$g(x) = 0{,}26 \cdot x + 79 \,,$$

hvor $g(x)$ betegner gennemsnitslevealderen for kvinder (målt i år), og x betegner tiden (målt i antal år efter 2000).

b) Gør rede for, hvad tallene 0,26 og 79 fortæller om udviklingen i gennemsnitslevealderen for kvinder.

c) Benyt modellen til at bestemme gennemsnitslevealderen for mænd til det tidspunkt, hvor gennemsnitslevealderen for kvinder er 81 år.

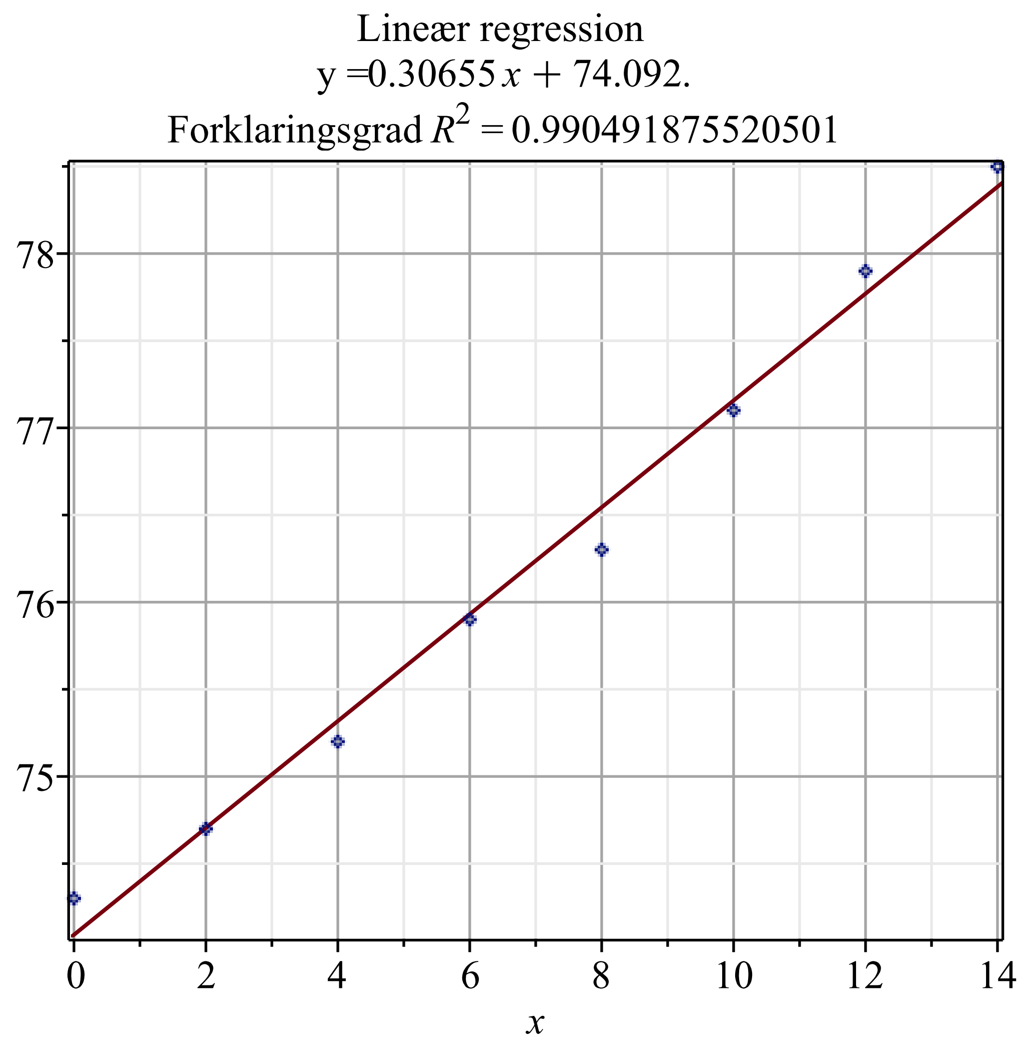
Kilde: Politiken 13. *feb* 2015 *(Danmarks Statistik)*

restart
with(*Gym*) :
Først og fremmest defineres alle oplysninger nedenfor:

$L1 := [0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14]$:; $L2 := [74.3, 74.7, 75.2, 75.9, 76.3, 77.1, 77.9, 78.5]$:
$g(x) := 0.26 \cdot x + 79$:

Delopgave a)

Forskriften for funktionen findes ved at anvende lineære regression.
$LinReg(L1, L2)$



Da forklaringsgraden er større end 0.95 accepteres denne, og hermed har man fået angivet tallene a og b til at kunne opstille en forskrift (ovenstående).
Forskriften defineres.
$f(x) := 0.30655 \cdot x + 74.092$:
Som beskriver gennemsnitslevealderen for mænd i perioden 2000-2014

Delopgave b)

For kvinder gælder modellen
$g(x)$

$$0.26\,x + 79 \qquad \textbf{(1.2.1)}$$

Tallet a fortæller, at for hvert år der går, øges kvindernes gennemsnitlige levealder med 0.26år eller ca. 95 dage. Tallet b fortæller, at i år 2000 var den gennemsnitlige levealder for kvinder 79 år og dette stiges.

Delopgave c)

Hvis gennemsnitslevealderen for kvinder er 81 år, har man en ligning.
$g(x) = 81$

$$0.26\,x + 79 = 81 \tag{1.3.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 7.692307692]] \tag{1.3.2}$$

Dette tal indsættes i mændenes funktion.
$f(7.692307692)$

$$76.45007692 \tag{1.3.3}$$

Så til tidspunktet (år 2007-2008) var kvindernes gennemsnitlige levealder 81 år og derved har mændene en gennemsnitlig levealder på 76.5 år.

Opgave 8 - Differentialregning

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 - 7x^2 - 30x\ .$$

a) Tegn grafen for f, og løs ligningen $f(x) = 0$.

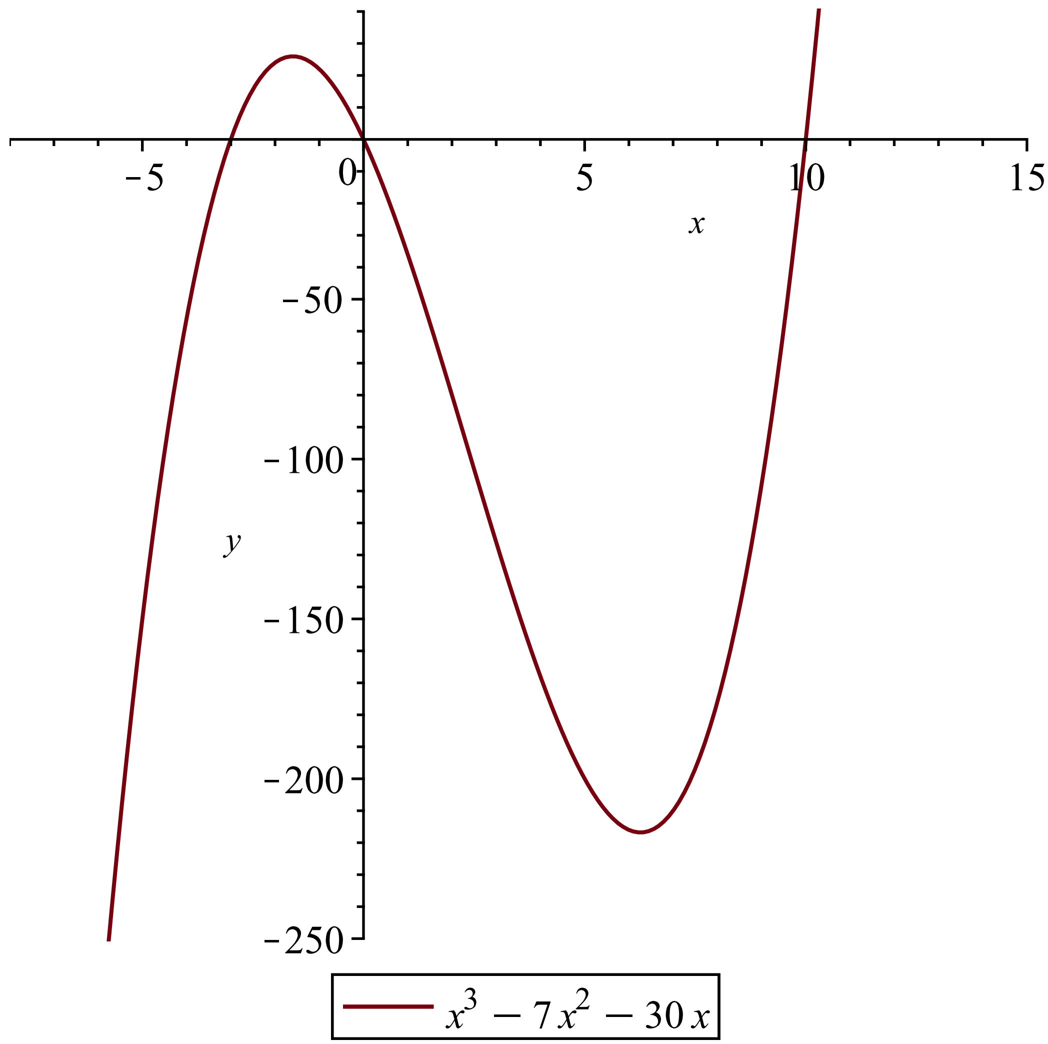
b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $Q(3, f(3))$.

c) Bestem monotoniforholdene for f.

restart
with(*Gym*) :
Det hele defineres først. $f(x) := x^3 - 7\,x^2 - 30\,x$:

Delopgave a)

Grafen for f kan tegnes ved anvendelse af plot kommandoen:
$plot([f(x)], x = -8..15, y = -250..40, legend = [f(x)])$



Derved har man sit tredjegradspolynomium tegnet. Det ses, at der hvor $f(x) = 0$ har den tre steder den rammer. Man kan også - traditionelt - løse en ligning.

$f(x) = 0$

$$x^3 - 7x^2 - 30x = 0 \tag{2.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 0], [x = 10], [x = -3]] \tag{2.1.2}$$

Hvor $x \in \mathbb{R}$.

Delopgave b)

Ligningen for tangenten kan bestemmes ud fra funktionen, den afledede funktion og et punkt i funktionen Så har man ligningen for tangenten. Punkter (dvs. punktet $Q(3, f(3))$) og funktioner indsættes i tangentligningen og man har så

$y = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$

$$y = -45x + 9 \tag{2.2.1}$$

Hermed har man tangenten for funktionen f.

Delopgave c)

Monotoniforholdene kan bestemmes ud fra den afledede, således man kan se den oprindelige funktions forløb. (Godt nok kan man se det i delopgave a). Den afledede funktion sættes lig med

0, så man har
$f'(x) = 0$

$$3x^2 - 14x - 30 = 0 \tag{2.3.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{139}\right], \left[x = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{139}\right]\right] \tag{2.3.2}$$

$x = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{139}$

$$x = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{139} \tag{2.3.3}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$x = 6.2633 \tag{2.3.4}$$

$x = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{139}$

$$x = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{139} \tag{2.3.5}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$x = -1.5967 \tag{2.3.6}$$

Man kunne traditionelt også løse den pr. håndkraft - også mht. differentiering. Da man har to rødder er det nu muligt at gå den traditionelle vej med at gøre prøve, eller blot at anvende den dobbelte afledede af f. Det sidstenævnte udføres.

$f''\left(\frac{7}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{139}\right)$

$$2\sqrt{139} \tag{2.3.7}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$23.580 \tag{2.3.8}$$

Her er $23.580 > 0$, dvs. lokalt minimum for funktionen $f(x)$.

$f''\left(\frac{7}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{139}\right)$

$$-2\sqrt{139} \tag{2.3.9}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$-23.580 \tag{2.3.10}$$

Her er $-23.580 < 0$, dvs. lokalt maksimum for funktionen $f(x)$.

Altså er konklusionen:
f er voksende i intervallet $]-\infty; -1.5967]$ og $[6.2633; \infty[$ samt aftagende i intervallet $[-1.5967; 6.2633]$.

Opgave 9 - Statistik

Tabellen viser fordelingen i en stikprøve blandt dimittender siden 2005 fra tre gymnasier fordelt efter uddannelsesvalg.

	Ingeniør eller naturvidenskab	Anden mellemlang videregående uddannelse	Anden lang videregående uddannelse
Gymnasium 1	9	20	71
Gymnasium 2	5	41	50
Gymnasium 3	22	51	89

a) Opstil en nulhypotese, der kan benyttes til at teste, om uddannelsesvalg og gymnasievalg er uafhængige af hinanden, og bestem de tilhørende forventede værdier.

b) Benyt et statistisk test med et signifikansniveau på 5% til at afgøre, om nulhypotesen kan forkastes.

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Nulhypotesen opstilles og man har
H = *uddannelsesvalg og gymnasievalg er uafhængige af hinanden.*

De forventede værdier kan udregnes ved først at man kender de observerende værdier.

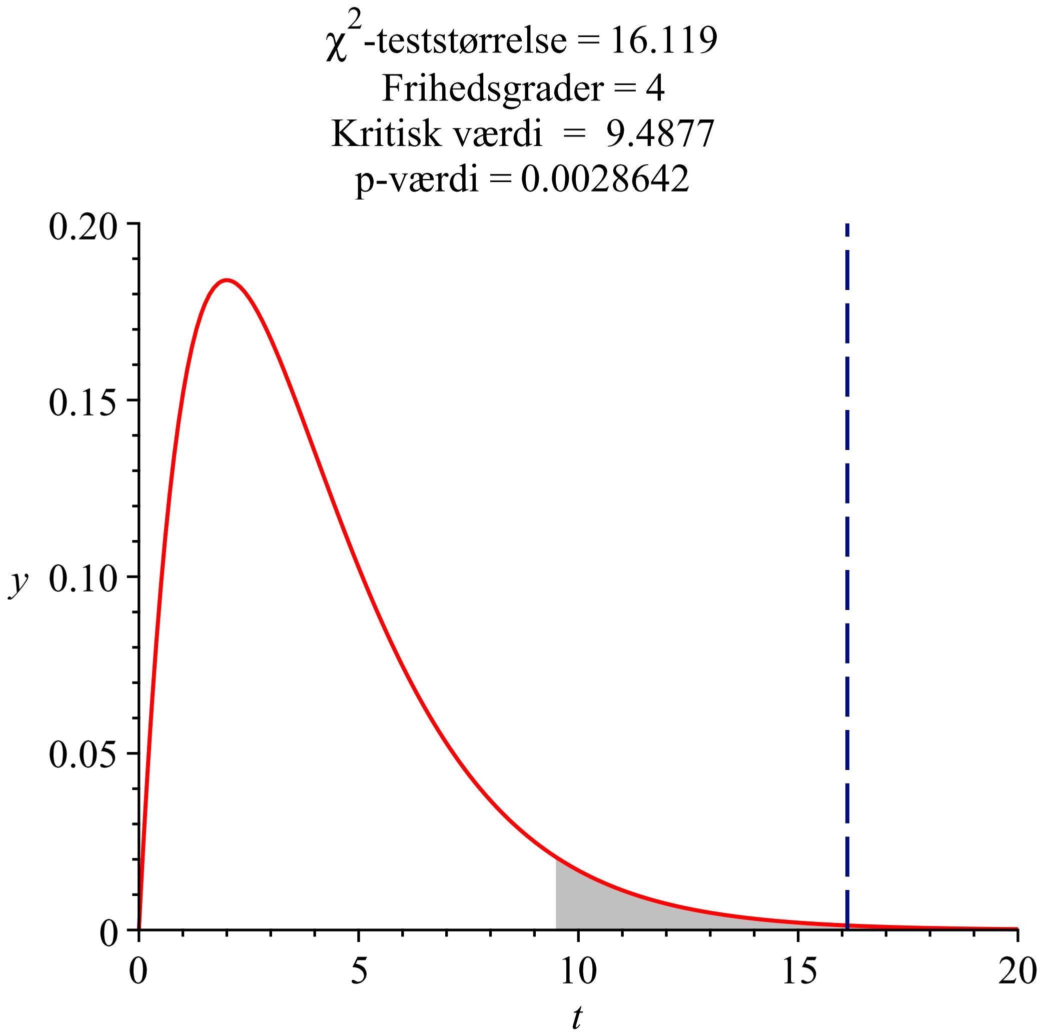
$$obs := \begin{bmatrix} 9 & 20 & 71 \\ 5 & 41 & 50 \\ 22 & 51 & 89 \end{bmatrix} : forventet(obs)$$

$$\begin{bmatrix} 10.056 & 31.285 & 58.659 \\ 9.6536 & 30.034 & 56.313 \\ 16.291 & 50.682 & 95.028 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(3.1.1)}$$

Så har man sine forventede værdier, som bygger op på de observerende værdier. Alternativt kunne dette udregnes pr. håndkraft i et skema.

Delopgave b)

Her anvendes der en uafhængighedstest (som man også kan udføre pr. håndkraft). Her har man
$ChiKvadratUtest(obs, level = 0.05)$



Her har man at teststørrelsen er større end den kritiske værdi. Med andre ord, *p*-værdien er mindre end signifikansniveauet, derved forkastes nulhypotesen. Der er altså signifikans forskel på uddannelsesvalg og gymnasium man har gået på.

Opgave 10 - Optimering

Den potentielle energi mellem to Argon atomer kan bestemmes ved funktionen U, der er givet ved forskriften

$$U(r)=3{,}988\cdot\left(\left(\frac{3{,}4}{r}\right)^{12}-\left(\frac{3{,}4}{r}\right)^{6}\right),\quad r>0\ ,$$

hvor r er afstanden mellem de to atomer (målt i Ångstrøm), og $U(r)$ er den potentielle energi (målt i kJ/mol).

a) Bestem $U(3{,}4)$, og tegn grafen for U.

b) Løs ligningen $U'(r)=0$, og bestem minimum for den potentielle energi mellem to Argon atomer.

restart
with(*Gym*) :
Det hele defineres, dvs. funktionen

$U(r) := 3.988\cdot\left(\left(\frac{3.4}{r}\right)^{12}-\left(\frac{3.4}{r}\right)^{6}\right)$: her er $r>0$.

Delopgave a)

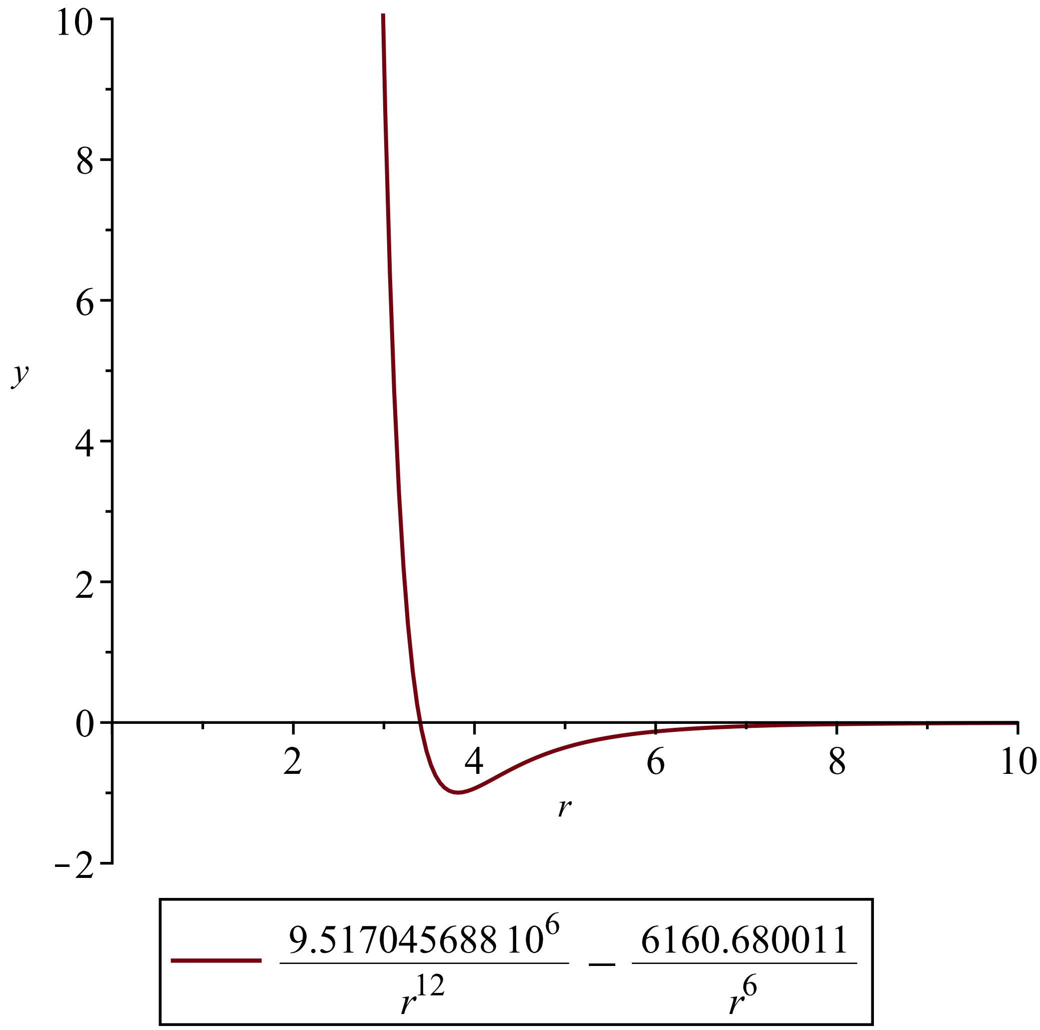
Her bestemmes $U(3.4)$. Så man har

$$3.988\cdot\left(\left(\frac{3.4}{3.4}\right)^{12}-\left(\frac{3.4}{3.4}\right)^{6}\right)=3.998\cdot(1^{12}-1^{6})=3.998\cdot 0=0$$

Der eftertjekkes
$U(3.4)$

$$0. \tag{4.1.1}$$

Hvilket ikke er ved siden af. Nu tegnes funktionen.
plot([$U(r)$], $r=0..10$, $y=-2..10$, *legend*= [$U(r)$])



Derved fik man et overblik over grafen.

Delopgave b)

Her bliver man bedt om at skulle sætte den afledede af $U(r)$ lig med 0, dvs. den skal differentieres.

$U'(r) = 0$

$$-\frac{1.142045483\ 10^8}{r^{13}} + \frac{36964.08007}{r^7} = 0 \tag{4.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for r}}$

$$[[r = 3.816370965], [r = 1.908185482 + 3.305074206\ I], [r = -1.908185482 + 3.305074206\ I], [r = -3.816370965], [r = -1.908185482 - 3.305074206\ I], [r = 1.908185482 - 3.305074206\ I]] \tag{4.2.2}$$

Her på matematik A arbejder man kun med reelle rødder, så de fire komplekse rødder forkastes. Desuden var aftalen, at $r > 0$, så den negative reelle rod forkastes. Altså er roden man skal arbejde med $r = 3.816370965$.

Når man tale om et minimum så går det ud på at gøre prøve og tegne monotoniforhold. Dette udføres ligesom forrige opgave. Man finder den dobbelte afledede og indsætter den afledededes rod.

$U''(3.816370965)$

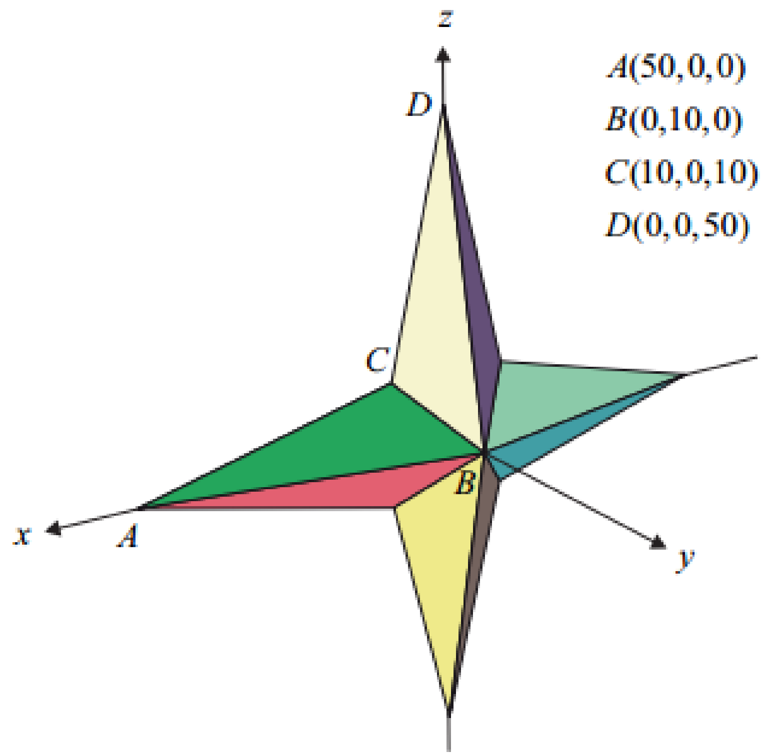
$$4.928633076 \tag{4.2.3}$$

Da $4.928633076 > 0$ har man et lokal minimum og derved er funktionen (som man også så i delopgave a) at den er:
U er aftagende i intervallet $[0; 3.816370965]$ og voksende i $[3.816370965; \infty[$. Så er minimumsværdien
$U(3.816370965)$

$$-0.9970000000 \tag{4.2.4}$$

Altså er den mindste energi på -0.997kJ/mol.

Opgave 11 - Vektorer i rummet



På figuren ses en model af en julestjerne indtegnet i et koordinatsystem i rummet med enheden cm på alle akser. Stjernen består af 16 ens trekanter, hvoraf kun 8 er synlige på figuren. Koordinaterne til nogle af punkterne på stjernen er opgivet på figuren.

a) Bestem en ligning for den plan α, der indeholder trekant ABC.

Det oplyses, at planen β, der indeholder trekant BCD, er bestemt ved ligningen

$$4x+5y+z=50.$$

b) Bestem den stumpe vinkel mellem trekant ABC og trekant BCD.

c) Bestem stjernens samlede overfladeareal.

restart
with(*Gym*) :
Alle punkter defineres.
local D
$A := \langle 50, 0, 0\rangle$:; $B := \langle 0, 10, 0\rangle$:; $C := \langle 10, 0, 10\rangle$:; $D := \langle 0, 0, 50\rangle$:

Delopgave a)

For at bestemme planen til julestjernen så har man punkterne ABC. Der dannes først to vektorer.
$\overrightarrow{AB} := B - A$

$$\begin{bmatrix} -50 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.1.1)}$$

$\overrightarrow{AC} := C - A$

$$\begin{bmatrix} -40 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.1.2)}$$

Her anvendes der krydsprodukt, så man får normalvektoreren til $\overrightarrow{AB}$og $\overrightarrow{AC}$, dvs. den står vinkelret på dem begge.

$linalg[crossprod]\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

$$\begin{bmatrix} 100 & 500 & 400 \end{bmatrix} \quad \textbf{(5.1.3)}$$

Der vælges punktet A, så har man planens ligning.

$\alpha := 100(x-50) + 500(y-0) + 400(z-0) = 0$

$$100\,x - 5000 + 500\,y + 400\,z = 0 \quad \textbf{(5.1.4)}$$

Som er ligningen for planen α.

Delopgave b)

Planen β er givet ved

$\beta := 4\,x + 5\,y - z = 50$

$$4\,x + 5\,y - z = 50 \quad \textbf{(5.2.1)}$$

Den stumpe vinkel mellem planerne kan udelukkende findes ved deres normalvektorer. Altså har man

$\overrightarrow{n_\alpha} := \langle 100, 500, 400 \rangle$:; $\overrightarrow{n_\beta} := \langle 4, 5, 1 \rangle$:

$V_{spids} := invCos\left(\dfrac{\overrightarrow{n_\alpha} . \overrightarrow{n_\beta}}{len\left(\overrightarrow{n_\alpha}\right) \cdot len\left(\overrightarrow{n_\beta}\right)}\right)$

$$38.21321070 \quad \textbf{(5.2.2)}$$

Derved fandt man den spidse vinkel mellem planerne. Den stumpe findes ved at tage vinkelsummen og V_{spids} trukket fra. Altså har man

$V_{stump} = 180 - V_{spids}$

$$V_{stump} = 141.7867893 \quad \textbf{(5.2.3)}$$

Så $v = 141.7867893^o$ er den ønskede vinkel mellem planerne.

Delopgave c)

Man får oplyst, at der er 16 trekanter, men at man kun kan se de 8 af dem. Alle trekanter er identiske, altså er det nok at regne arealet af den første og gange op. Man har så (for trekant ABC) at

$T_{ABC} := \dfrac{1}{2} \cdot len\left(\overrightarrow{n_\alpha}\right)$

$$50\sqrt{42} \quad \textbf{(5.3.1)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$324.04 \tag{5.3.2}$$

Som er overfladearealet af trekant ABC. Tallet ganges med 16, så man har
local O
$O = T_{ABC} \cdot 16$

$$O = 800\sqrt{42} \tag{5.3.3}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$O = 5184.6 \tag{5.3.4}$$

Så har man overfladearealet af stjernen, som er $5184.6\ cm^2$.

Opgave 12 - Vektorer i planen

I planen er givet punkterne $A(0,0)$ og $C(11,2)$ samt linjen l, der er bestemt ved parameterfremstillingen

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathrm{R}.$$

Om trekant ABC oplyses, at B ligger på linjen l i første kvadrant og at $|AB| = 10$.

a) Lav en skitse af trekant ABC, og bestem vinkel A i trekant ABC.

b) Bestem koordinatsættet til B, og bestem arealet af trekant ABC.

restart
with(*Gym*) :
OBS: Begge opgaver slås sammen, således dette bliver nemmere at udføre.

Delopgave a og b)

Parameterfremstillingen er givet ved
$l := \langle x, y \rangle = t \cdot \langle 4, 3 \rangle$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4t \\ 3t \end{bmatrix} \tag{6.1.1}$$

Man kender afstanden til $|AB| = 10$. Altså kan man bestemme punktet B ved afstandsformlen.
$AB := 10$

$$10 \tag{6.1.2}$$

Så er
$AB = \sqrt{(4t-0)^2 + (3t-0)^2}$

$$10 = 5\sqrt{t^2} \tag{6.1.3}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t=2], [t=-2]] \tag{6.1.4}$$

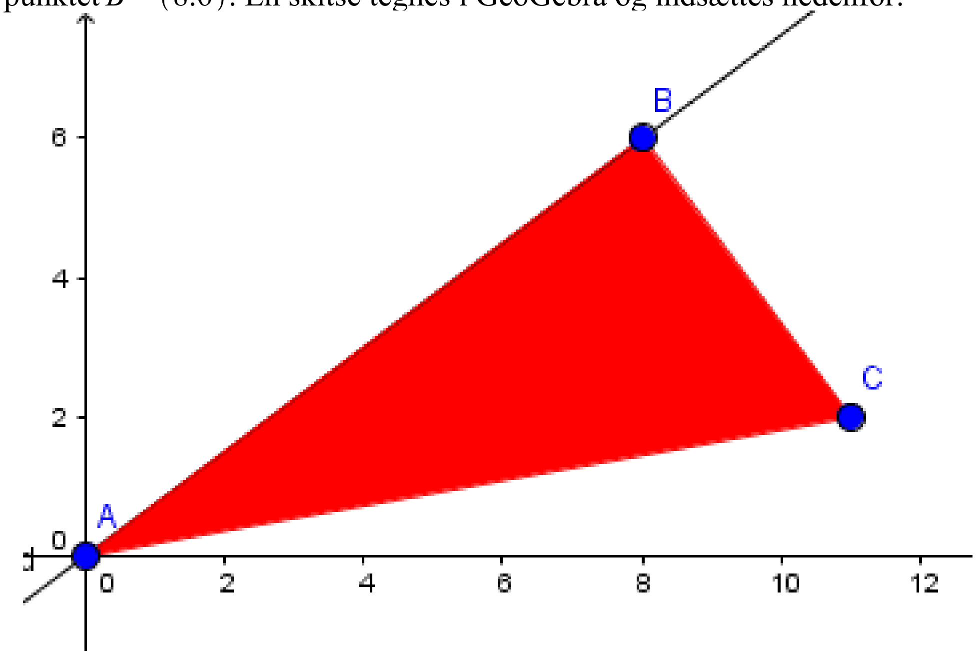
Det giver reelt set kun mening med en positiv værdi, så man får punktet B ved indsættelse af 2 i parameterfremstillingen.

$t := 2 :$

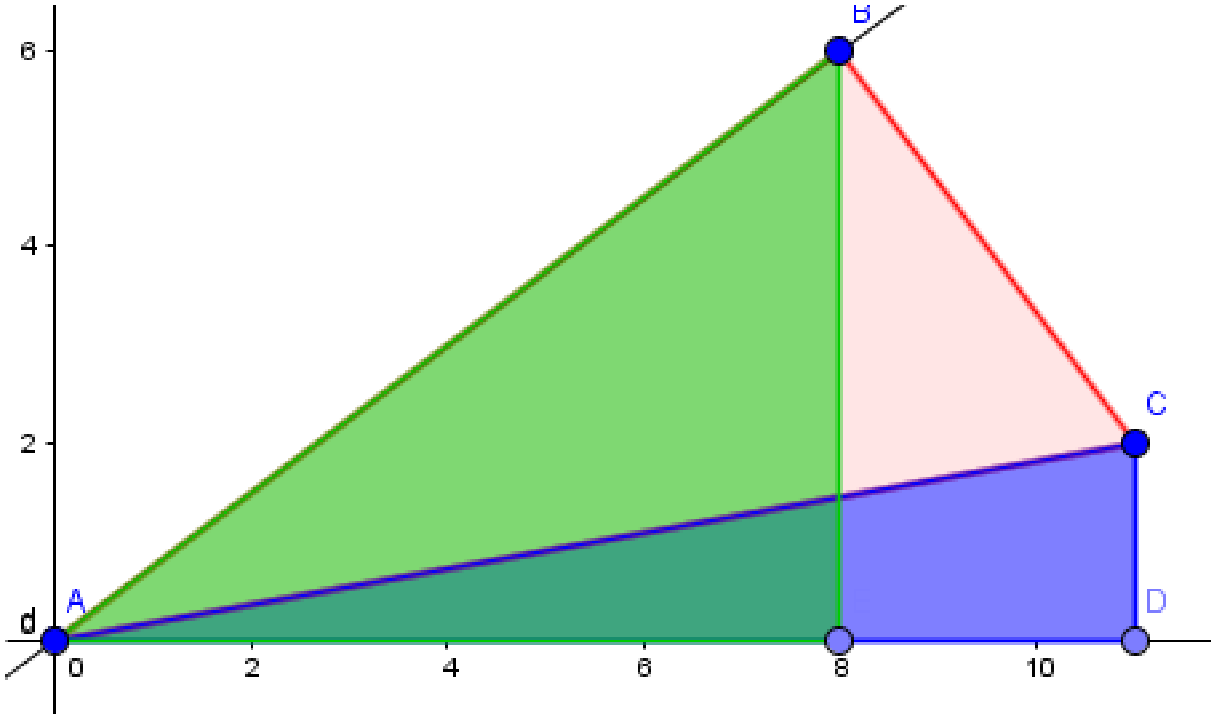
$B := l$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{6.1.5}$$

Derved er punktet $B = (8.6)$. En skitse tegnes i GeoGebra og indsættes nedenfor:



Bestemmelse af vinkel A kan udføres ved at man kender sin modstående og hosliggende katete, hvis man danner to retvinklede trekanter. Disse kan ses nedenfor:



Her kan man udnytte, at den grønne trekant har $GrønHos := 8$:; $GrønMod := 6$:; her er den blå trekant $BlåHos := 11$:; $BlåMod := 2$:

Altså er vinkel A

$$\angle A = invTan\left(\frac{GrønMod}{GrønHos}\right) - invTan\left(\frac{BlåMod}{BlåHos}\right)$$

$$\angle(A) = 26.56505118 \tag{6.1.6}$$

Som er den ønskede vinkel i trekanten ABC. Arealet kan nu bestemmes ved determinanten. Her er $\overrightarrow{AC} := \langle 11, 2\rangle$: og $\overrightarrow{AB} := \langle 8, 6\rangle$: så har man

$$T = \left|det\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)\right|$$

$$T = 25 \tag{6.1.7}$$

Så har man sit areal af trekanten.

Opgave 13 - Differentialligninger

I en model for udviklingen i antal insekter i en bestemt population er antal insekter som funktion af tiden en løsning til differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}01 \cdot \sin(0{,}017 \cdot t - 1{,}03) \cdot N, \quad 0 \le t \le 365\,,$$

hvor $N(t)$ betegner antal insekter (målt i mio.) til tidspunktet t (målt i antal døgn). Det oplyses, at der til tidspunktet $t = 0$ er 100 mio. insekter i populationen.

a) Bestem en forskrift for N, og tegn grafen for N.

b) Bestem det tidspunkt, hvor populationens væksthastighed er størst.

restart
with(*Gym*) :

Delopgave a)

Differentialligningen er givet ved
$N'(t) = 0.01 \cdot \sin(0.017 \cdot t - 1.03) \cdot N.$
Her er begrænsningen $0 \le t \le 365$. Desuden ved man punktet $t = 0$ er 100. Så man har

$dsolve(\{N'(t) = 0.01 \cdot \sin(0.017 \cdot t - 1.03) N(t), N(0) = 100\}, N(t))$

$$N(t) = \frac{100\, e^{-\frac{10}{17} \cos\left(\frac{17}{1000} t - \frac{103}{100}\right)}}{e^{-\frac{10}{17} \cos\left(\frac{103}{100}\right)}} \qquad \textbf{(7.1.1)}$$

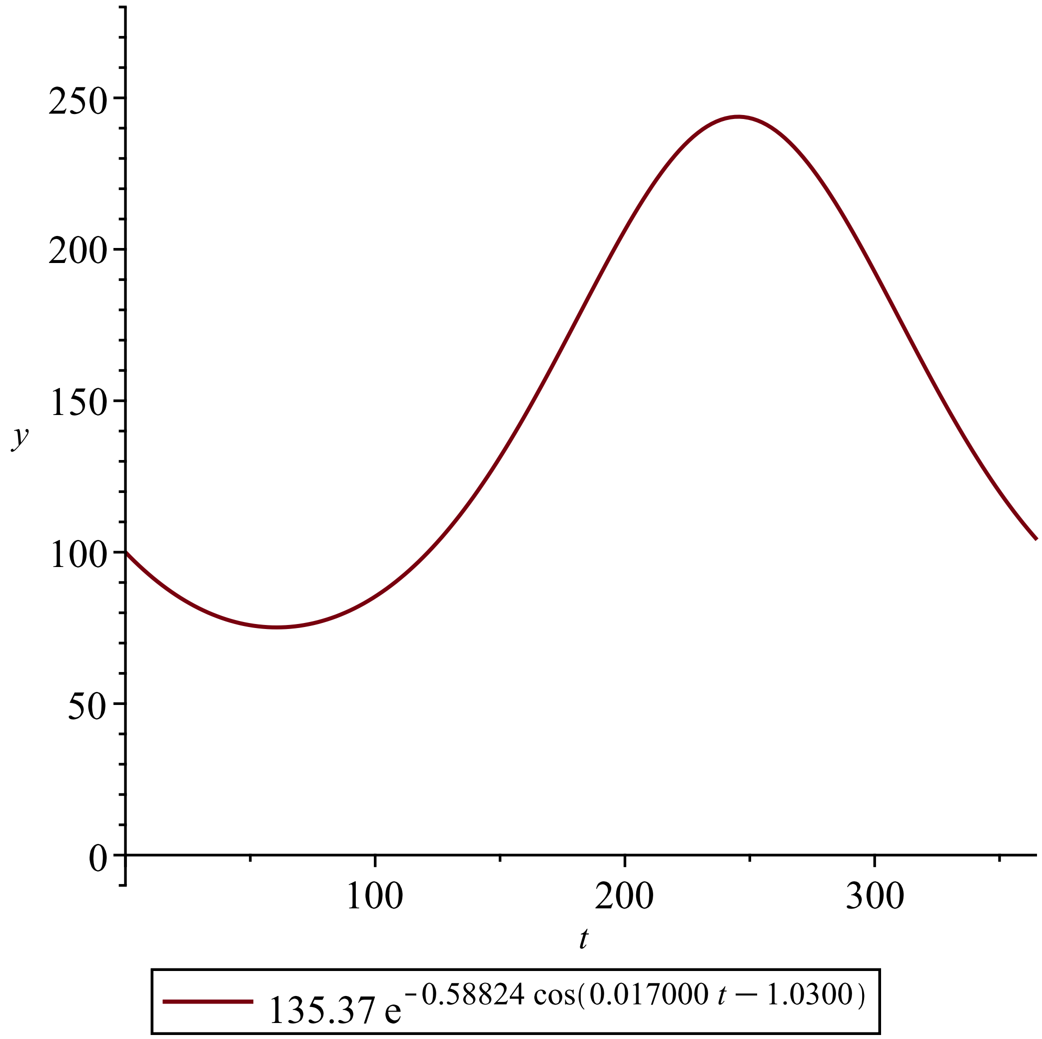
$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$N(t) = 135.37\, e^{-0.58824 \cos(0.017000\, t - 1.0300)} \qquad \textbf{(7.1.2)}$$

Som altså er ens funktionsforskrift.
$N(t) := 135.37\, e^{-0.58824 \cos(0.017000\, t - 1.0300)}$

$$t \rightarrow 135.37\, e^{(-1) \cdot 0.58824 \cos(0.017000\, t - 1.0300)} \qquad \textbf{(7.1.3)}$$

Der beskriver udviklingen i insekter for en bestemt population. Grafen tegnes.
$plot([N(t)], t = 0..365, y = -10..280, legend = [N(t)])$



Grafen viser hvordan udviklingen fordeler sig pr. år.

Delopgave b)

Der hvor væksthastigheden er størst har man

$N''(t)$

$$0.02301308411\cos(0.017000\,t - 1.0300)\,e^{-0.58824\cos(0.017000\,t - 1.0300)} + 0.01353721660\sin(0.017000\,t - 1.0300)^2\,e^{-0.58824\cos(0.017000\,t - 1.0300)} \quad \textbf{(7.2.1)}$$

Her anvendes intervalsolve.

$intervalsolve(N''(t) = 0, t = 0..365)$

$$[181.2673367, 309.5082696] \quad \textbf{(7.2.2)}$$

Ved anvendelse af den tredje afledede kan man bestemme hvordan grafen forløber sig ved indsættelse af den dobbelte afledede af N.

$N'''(181.2673367)$

$$-0.0007030370562 \quad \textbf{(7.2.3)}$$

Her ses det, at $-0.000703 < 0$, altså lokal max.

$N'''(309.5082696)$

$$0.0007030370563 \quad \textbf{(7.2.4)}$$

Her ses det, at $0.000703 > 0$, altså lokal min. Altså har man

$N'(181.2673367)$

$$1.575497315 \quad \textbf{(7.2.5)}$$

$N'(309.5082696)$

$$-1.575497315 \quad \textbf{(7.2.6)}$$

Med andre ord, væksthastigheden er størst efter 181 døgn.

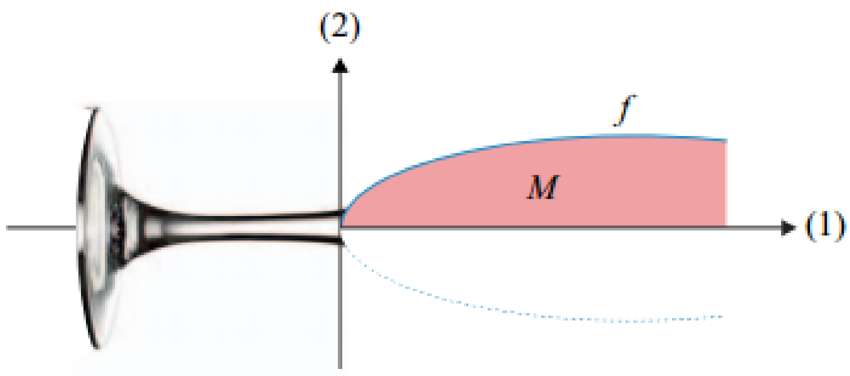
Opgave 14 - Omdrejningslegemer

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = a \cdot \sqrt{x \cdot (16 - x)}, \;\; 0 \le x \le 10,$$

hvor a er et positivt tal.

Grafen for f afgrænser sammen med koordinatsystemets førsteakse og linjen med ligningen $x = 10$ et område M, der har et areal. Enheden på begge akser er cm.



Det indre af et glas har form som det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M drejes 360° om førsteaksen.

a) Bestem a, så glassets volumen bliver 260 cm^3.

For et andet glas er $a = 0{,}3$. En markering på glasset skal vise, hvornår der er hældt 100 cm^3 i glasset, når glasset står lodret.

b) Bestem, hvor markeringen på glasset skal anbringes.

restart
with(*Gym*) :
Funktionen defineres.
$f(x) := a \cdot \mathrm{sqrt}(x \cdot (16 - x))$

$$x \rightarrow a\sqrt{x\,(16-x)} \quad \textbf{(8.1)}$$

Delopgave a)

Her løser man en ligning, når man kender grænseværdierne og det maksimale volumen. Altså er

$260 = \text{pi} \cdot \int_0^{10} \left(f(x)^2\right) \, dx$

$$260 = \frac{1400}{3} \pi a^2 \tag{8.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for a}}$

$$\left[\left[a = \frac{1}{70} \frac{\sqrt{2730}}{\sqrt{\pi}}\right], \left[a = -\frac{1}{70} \frac{\sqrt{2730}}{\sqrt{\pi}}\right]\right] \tag{8.1.2}$$

Her er $0 \leq x \leq 10$, så variablen er

$a = \frac{1}{70} \frac{\sqrt{2730}}{\sqrt{\pi}}$

$$a = \frac{1}{70} \frac{\sqrt{2730}}{\sqrt{\pi}} \tag{8.1.3}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$a = 0.42111 \tag{8.1.4}$$

Hermed har man sin a-værdi der tilfredsstiller volumen på 260 cm^3

Delopgave b)

Her har man sin a - værdi givet. Desuden har man 100 cm^3 at gøre godt med. Man skal derfor finde tallet k. Funktionen defineres på ny med a-værdien.

$f(x) := 0.3 \cdot \text{sqrt}(x \cdot (16 - x))$

$$x \to 0.3 \sqrt{x (16 - x)} \tag{8.2.1}$$

Man har så

$100 = \pi \cdot \int_0^{k} \left(f(x)^2\right) \, dx$

$$100 = \pi \left(-0.03000000000 \, k^3 + 0.7200000000 \, k^2\right) \tag{8.2.2}$$

$\xrightarrow{\text{solve for k}}$

$$[[k = 8.192917363], [k = 21.75894052], [k = -5.951857888]] \tag{8.2.3}$$

Igen skal man huske grænseværdien som er $0 \leq x \leq 10$, så er $k = 8.19$ cm markeringen ved glasset, således der er $100 cm^3$.