Calcolo combinatorio

Fattoriale

Indicato con n! il fattoriale è così definito:

$$n!=\begin{cases} 0\, se\, n=0 \\ (n-1)!*n\, se\, n\geq 1 \end{cases}$$

con n appartenente all'insieme dei numeri naturali.
Ad esempio, $5!=5\times 4!=...=5\times 4\times 3\times 2\times 1=120$

Coefficiente binomiale

$$\binom{A}{B}=\frac{A!}{B!\times(A-B!)}$$

con $A\geq B$ perchè il denominatore abbia senso.
Ad esempio, $\binom{10}{5}=\frac{10!}{5!\times 5!}=252$

Probabilità

Definiamo innanzitutto uno spazio di probabilità una tripla $\langle\Omega,\Sigma,P\rangle$ dove:

- Ω rappresenta l'insieme degli esiti elementari (ad esempio, le carte che compongono il mazzo)
- Σ rappresenta l'insieme degli eventi, ovvero un sottoinsieme dell'insieme delle parti di Ω. Dovrebbe rispettare alcune proprietà, ma non sono particolarmente rilevanti per quello che dobbiamo fare quindi non le elenco. Se abbiamo ad esempio $\Omega=\{Fireball, Frostbolt\}$ allora potrebbe essere (considerato l'intero insieme delle parti) $\Sigma=\{\emptyset,\{Fireball\},\{Frostbolt\},\Omega\}$
- P rappresenta la funzione di probabilità $P:\Sigma\rightarrow R$ che ad ogni evento associa un numero reale.
  P deve inoltre rispettare le seguenti tre proprietà, dette assiomi di Kolmogorov:
  - $0\leq P(x)\leq 1\ \forall x\in\Sigma$
  - $P(\Omega)=1$
  - se $A\cap B=\emptyset$ allora $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

  Alcune proprietà di nota che si possono ricavare dagli assiomi:
  - $P(A^c)=1-P(A)$
  - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

  Si parla in particolare di spazi equiprobabili se $P(\omega)=\frac{1}{|\Omega|}\forall\omega\in\Omega$ e pertanto

  $P(\sigma)=\frac{|\sigma|}{|\Omega|}\forall\sigma\in\Sigma$ (numero di casi favorevoli diviso numero di casi possibili)

Esempio: pescare da un mazzo di carte ben mescolato rappresenta uno spazio equiprobabile in cui Ω sono le carte presenti nel mazzo e $\Sigma=2^\Omega$ rappresenta tutte le possibili pescate (ad esempio, $\sigma=\{Fireball, Frostbolt\}$ rappresenta una pescata che ha per risultato o una Fireball o una Frostbolt).
Se ho trenta carte nel mazzo, di cui due Fireball, ho che la probabilità di pescare una Fireball è

$$P(\{Fireball1, Fireball2\})=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$$

Variabili aleatorie e funzioni di variabili aleatorie

Una variabile aleatoria X è una funzione $X:\Omega\rightarrow R^n$ che associa ad ogni esito elementare un vettore di numeri reali (se n = 1 associa un numero reale).
In particolare noi considereremo solo casi in cui Ω è finito, e pertanto X è una variabile aleatoria discreta.
Esempio: ho un mazzo di trenta carte fra cui uniche spell di danno sono due Fireball, due Frostbolt e due Forgotten Torch. Sono interessato a differenziare le carte per il danno che fanno:

$$X(\omega)=\begin{cases} 2\ se\ \omega\in\{Fireball1, Fireball2\} \\ 1\ se\ \omega\in\{Frostbolt1, Frostbolt2, Forgotten\,Torch1, Forgotten\,Torch2\} \\ 0\ altrimenti \end{cases}$$

In quest'ambito definiamo la funzione massa di probabilità $f_X(x)=P(X=x)=P(X^{-1}(x))$ che indica qual è la probabilità che X assuma il valore x.
Rifacendoci all'esempio di prima, ho che:

$$f_X(x)=\begin{cases} 1/15\ se\ x=2 \\ 2/15\ se\ x=1 \\ 13/15\ se\ x=0 \\ 0\ altrimenti \end{cases}$$

Definiamo g funzione di variabile aleatoria una funzione $g:R^n\rightarrow R^m$ definita su ogni elemento dell'immagine di X.
Rifacendoci all'esempio di prima, sono interessato al danno che posso fare con ciascuna carta (o meglio, classe di carte) (in questo caso ho una semplice espressione per la funzione, ma potrei anche definirla per casi come sopra):

$$g(x)=3\times x$$

Definiamo infine il valore atteso di una funzione g applicata ad una variabile aleatoria X:

$$E[g(X)]=\sum_{x\in D_X} g(x)\times f_X(x)$$

Ad esempio, il valore atteso del danno della prossima carta pescata è

$$E[g_X(x)]=\frac{3\times2}{15}+\frac{3\times2}{15}=0.8$$

Distribuzioni di probabilità

Distribuzione Bernoulliana

La distribuzione Bernoulliana modella una situazione in cui ho una singola prova con due possibili esiti: successo e fallimento. In particolare, il successo avviene con probabilità p.

$f_X(x)=p^x\times(1-p)^{1-x}$ (più semplicemente vale p la probabilità di successo, 1-p quella di fallimento)

Distribuzione ipergeometrica

La distribuzione ipergeometrica modella la seguente situazione: ci sono M oggetti, di cui K che ci interessano e i restanti M-K no. Compiendo N estrazioni senza reimmissione, qual è la probabilità di pescarne x?

$$f_X(x)=\frac{\binom{K}{x}\times\binom{M-K}{N-x}}{\binom{M}{N}}$$

Nota che perchè i vari coefficienti binomiali abbiano senso (e anche a rigor di logica: non posso estrarre più oggetti di un certo tipo di quanti ne sono presenti) deve essere $x\in[max(0,N-(M-K)),min(K,N)]$

Esempio: qual è la probabilità di pescare almeno una spell di danno nelle prossime 3 pescate nell'esempio visto sopra?

M = 30, K = 6, N = 3.

$$P(\text{pesco una spell di danno})=f_X(1)+f_X(2)+f_X(3)\approx 0.5$$

Distribuzione ipergeometrica multivariata

Generalizziamo il caso esposto prima: abbiamo n gruppi di oggetti che costituiscono una partizione del nostro insieme M, ciascuno grande $K_{1,\dots},K_n$. Qual è la probabilità di pescarne esattamente $x_{1,\dots},x_n$ da ciascun gruppo?

$$f_X(x_{1,\dots}x_n)=\frac{\prod_{i=1}^{n}\binom{K_i}{x_i}}{\binom{M}{N}}=\frac{\binom{K_1}{x_1}\times\dots\times\binom{K_n}{x_n}}{\binom{M}{N}}$$

Nota che deve risultare $\sum_{i=1}^{n}x_i=N$

Esempio: quante probabilità ho di pescare almeno una Frostbolt e almeno una Ice Lance dopo 10 pescate, avendo due copie di entrambe nel mazzo?

$K_1=2,K_2=2,K_3=26,M=30,N=10$

$$P(\text{pesco la combo})=f_x(1,1,8)+f_x(1,2,7)+f_x(2,1,7)+f_x(2,2,6)\approx 0.26$$

Costruiamo ora un esempio un po' più complesso: ho 10 carte rimanenti nel mazzo, di cui una Fireball e due Arcane Intellect. Ho 10 mana, e il mio avversario è a 6. Qual è la probabilità di vittoria al prossimo turno?
Vinco in tre casi:

1. Pesco la Fireball
2. Pesco un'Arcane Intellect con cui pesco la Fireball
3. Pesco un'Arcane Intellect con cui pesco l'altra Arcane Intellect (ma non la Fireball) con cui pesco la Fireball

I tre casi sono disgiunti: posso calcolare le probabilità separatamente e poi sommarle insieme per il terzo assioma di Kolmogorov:

1. $X(\omega)=\begin{cases} 1\ se\ \omega=Fireball \\ 0\ altrimenti \end{cases}$ indica la prima carta pescata

   X ~ Bernoulliana($p=\frac{1}{10}$).

   $f_X(1)=\frac{1}{10}$

   $P(1)=f_X(1)=\frac{1}{10}$

2. $X(\omega)=\begin{cases} 1\ se\ \omega\in Arcane\ Intellect1,\ Arcane\ Intellect2 \\ 0\ altrimenti \end{cases}$ indica la prima carta pescata

   $Y(\omega')=\begin{cases} 1\ se\ \omega'=Fireball \\ 0\ altrimenti \end{cases}$ indica le due carte pescate successivamente

   X ~ Bernoulliana($p=\frac{1}{5}$)

   Per Y sono rimaste una Fireball e otto carte, pertanto:

   Y ~ Hyper($K=1, M=9, N=2$)

   $f_X(1)=\frac{1}{5}$ $\quad f_Y(1)\approx 0.22$

   $P(2)=f_X(1)\times f_Y(1)\approx 0.04$

3. Stessa notazione del punto 2 per X

   $Y(\omega')=\begin{cases} y_1=1\ se\ \omega'=Fireball \\ y_2=1\ se\ \omega'\in\{Arcane\ Intellect1,\ Arcane\ Intellect2\} \\ y_3=1\ altrimenti \end{cases}$ indica le due carte pescate successivamente

   $Z(\omega'')=\begin{pmatrix} 1\ se\ \omega''=Fireball \\ 0\ altrimenti \end{pmatrix}$ indica le ultime due carte pescate

   Per Y sono rimaste una Fireball, un'Arcane Intellect e sette carte, pertanto:

   Y ~ Multihyper($K_1=1, K_2=1, K_3=7, M=9, N=2$)

   Per Z sono rimaste una Fireball e sei carte, pertanto:

   Z ~ Hyper($K=1, M=7, N=2$)

   $f_X(1)=\frac{1}{5}$ $\quad f_Y(0,1,1)\approx 0.19$ $\quad f_Z(1)\approx 0.29$

   $P(3)=f_X(1)\times f_Y(0,1,1)\times f_Z(1)\approx 0.01$

La probabilità di uccidere il nostro avversario il prossimo turno è pertanto circa del 15%.

Il mulligan

Tutto il deckbuilding si basa sull'ottimizzare le percentuali di pescata di certe carte/combo entro certi turni: abbiamo già visto come calcolare la probabilità di pescare x copie di una carta con y pescate (e anche di pescare $x_{1,} \ldots, x_n$ copie di n carte).

L'unica cosa che manca è analizzare il mulligan. Ricordo che le carte scartate durante il mulligan non possono essere ripescate nella mano iniziale.

Farò un caso semplice, distinguendo solo fra carte volute e carte non volute, per evitare di introdurre l'uso di distribuzioni ipergeometriche multivariate. L'analisi risulta identica se si vogliono distinguere le carte presenti nella mano iniziale, semplicemente si complica la formula risultante.

In particolare indichiamo con K il numero di carte che terremmo al mulligan.

$X(\omega)=\begin{cases} 1\, se\, \omega \in carte\ volute \\ 0\, altrimenti \end{cases}$ indica le carte pescate inizialmente

$Y(\omega')=\begin{cases} 1\, se\, \omega' \in carte\ volute \\ 0\, altrimenti \end{cases}$ indica le carte pescate dal mulligan

Notiamo che la variabile Y è in relazione con X, infatti $K_Y = K - X\; e\; N_y = N_x - X$, ovvero il numero di carte buone presenti quando pesca Y è pari al numero di carte buone meno il numero di carte buone pescate da X e il numero di carte che pesca Y è pari al numero di carte che deve pescare meno il numero di carte tenute da X.

Scriverò pertanto (con un certo abuso di notazione) $f_Y(x, N_y, K_y)$ per indicare la probabilità che Y abbia x successi con N_y carte da pescare e K_y carte volute rimaste nel mazzo.

Infine notiamo anche che $M_y = 30 - N_x$, ovvero che il numero di carte da cui può pescare Y è 30 meno il numero di carte pescate da X, poiché quelle già uscite non possono riuscire nel mulligan.

Indicato con M l'evento mulligan avremo pertanto due casi:

- vado per primo:
  $N_x = 3, M_y = 27$
  $f_M(x) = \sum_{i=0}^{3} f_X(i) * f_Y(x-i, 3-i, K-i)$ per $x \in [max(0, 3-(30-K)); min(3, K)]$
- vado per secondo:
  $N_x = 4, M_y = 26$
  $f_M(x) = \sum_{i=0}^{4} f_X(i) * f_Y(x-i, 4-i, K-i)$ per $x \in [max(0, 4-(30-K)); min(4, K)]$