ПРЕДГОВОР.

Тригонометрија, коју предајем јавности, служила ми је у рукопису као основа при предавању ове науке у великој школи. Издавајући је на свет хоћу с једне стране да олакшам посао мојим ученицима, уштеђујући им труд и време око мучног и дангубног бележења и преписивања, а с друге стране да и онима, који би тригонометрију свестраније проучити хтели, даднем у руке књигу, у којој ће они све што у ту науку спада, наћи што потпуније изложено и разјашњено. Ко прочита ову књигу видиће, да сам — држећи се у границама елементарности — доиста све делове тригонометрије свестрано и темељито претресао, и да нисам скоро ништа изоставио, што у њезин састав иде. Пошто сам уверен, да се до потпуног и тачног сазнавања и разумевања какве теорије може само тако доћи, ако је она примерима, као што треба, расветљена и разјашњена, то сам на крају свакога главнијег одељка ставио по један низ примера и задатака. Читалац, који их буде радио, увидиће и сам, колико су они били нужни, кад на сваком даљем кораку буде осећао, где постаје све чвршћи у теорији и вештији у њезином примењивању.

Књига је подељена на три главна дела: гониометрију, равну и сферну тригонометрију. У првом је делу изложена теорија тригонометријских функција и показан начин, како се оне израчунавају, у другоме је теорија тригонометријских функција примењена на разрешавање равних а у трећем на разрешавање сферних троуглова.

При дефинисању тригонометријских функција држао сам се новијег начина посматрања, по коме се исте схваћају као неименовани бројеви. Тај начин посматрања уместнији је и бољи од оног старијег, по коме су се тригонометријске функције схваћале као линије, и због тога звале *тригонометријске линије*. Што сам дефиниције тригонометријских функција основао на теорији координата, налази свога разлога у томе, што се само на тај начин могу добити одмах опште дефиниције истих функција, које вреде за све могуће угле или луке; што доцнији претреси испадају много простији и краћи и што најзад мислим, да је сасвим умесно што вели Carnot: „l'ordre philosophique demande, que les définitions et les règles de la trigononométrie, au moins en ce qui tient au jeu des signes algébriques, soient rattachées aux principes de la méthode des coordonnées“.

Од свију тригонометријских функција ја сам задржао само четири: синус, косинус, тангенту и котангенту, јер су оне сасвим довољне, а и таблице су само за њих израчунате.

Редове за синус и косинус, који се налазе у № 52 под 2) и 4), и *које сам ја на сасвим елементаран начин извео*, уврстио сам у ову књигу зато, што су ми били нужни за доказ лежандрове теореме у сферној тригонометрији, и због даљих задатака у №-ма 214 и 215. Исти редови доказани су истина само за случај $a < 1$, али то је за потребу, којој су намењени, савршено довољно. Остале тригонометријске редове нисам изводио, јер ми нису били потребни.

Теорију пројекција узео сам због њених доста честих и лепих примена нарочито у аналитичној геометрији.

№-е од 139 до 154 говоре укратко о својствима тространог рогља, лопте и сферног троугла, и служе на неки начин као припрема за сферну тригонометрију; уврстио сам их пак у ову књигу зато, што се сваке године нађе слушалаца, који баш ствари, о којима те №-е говоре, незнају као што треба, а међутим треба их знати, ако се хоће потпуно да разуме оно, о чему се говори даље у сферној тригонометрији.

Задатци и теореме у првом додатку поред тога, што ће читаоцу дати довољно материјала, да се може вежбати у употребљавању и примењивању образаца сферне тригонометрије, још ће га и занимати, прво зато што су по себи интересни, а после и зато што многи од њих имају себи аналогних у равној геометрији.

У други додатак ставио сам неколико простих задатака из астрономије, да би читалац видео примену сферне тригонометрије у тој науци и да би имао прилику упознати се са основним појмовима и са терминима те науке.

Оволико имао сам да кажем о овој књизи; уосталом упућујем на сам њен садржај.

При писању ове књиге служио сам се радовима најбољих писаца, од којих нека је споменут на првом месту Serret, а затим Comberousse, Briot, Lecointe, Legendre, Bourdon, Dienger, Spitz, Salomon и т. д.

16. Фебруара 1875. год.

у Београду.

Димитрије Нешић

ПРОФЕСОР ВЕЛ. ШКОЛЕ.

САДРЖАЈ.

ТРЕЋИ ДЕО.

СФЕРНА ТРИГОНОМЕТРИЈА.

ТРИГОНОМЕТРИЈА.

ПРИСТУП.

У сваком троуглу, равном или сферном, има шест комада: три стране и три угла. Кад су од тих шест комада три позната, онда су тиме уопште и остали одређени. Но ако је троугао раван, мора се међу познатим комадима налазити барем једна страна; јер познато је, да се из три дата угла могу начинити безбројно многи равни троугли, који су слични али не једнаки. По себи се разуме да збир трију датих углова мора бити једнак двама правим углима.

У геометрији показују се врло просте конструкције, помоћу којих се из три дата троуглова комада остали цртањем целога троугла налазе. Но при истим, као и при свима конструкцијама, неможе се рачунати на особито велику тачност, и то због несавршености оруђа, која се при том употребљују. Та околност принудила је научаре, да потраже, неби ли се поменуте конструкције могле заменити рачуном, којим се сваки ступањ тачности може достићи. Посљетци њихових напора у том погледу јесу различне методе, помоћу којих се из довољне множине података непознати комади троугла могу рачуном наћи. Скуп тих метода саставља један особити део математике, који се зове *Тригонометрија*.

Тригонометрија је дакле једна од оних математичких дисциплина, у којима се геометријска питања и задатци рачуном решавају.

Ово претпоставља

а) да се стране и угли троугла могу бројно изразити, и

б) да се могу поставити односи или једначине између страна и углова, помоћу којих би се те количине једне из других могле израчунавати.

Стране и уопште линије могу се бројно претставити, ако се измере једном извесном јединицом дужине на пример метром, и тада ће свака страна бити једнака извесном броју метара.

Исто тако могу се и угли бројно претставити, ако се за јединицу мере углова узме један извесни угао.

Из геометрије познато је, да троугли, којих су стране сразмерне, имају једнаке угле; одатле сљедује, да величина углова у троуглу неможе зависити од апсолутне дужине његових страна, и да с тога неможе бити ни говора о постављању таквих односа, између страна и углова троугла, помоћу којих би се те количине једне из других могле *непосредно* израчунавати. Овој незгоди доскочили су математичари тиме, што су место углова увукли у рачун, као њихове посреднике, размере извесних правих, које размере од углова зависе тако, да је величином углова њина величина одређена, и обратно. Поменуте од углова зависеће размере зову се *тригонометријске* или и *гониометријске размере* или *функције*.

ПРВИ ДЕО.

ГОНИОМЕТРИЈА.

I. ТЕОРИЈА ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА.

Одредба речи функција.

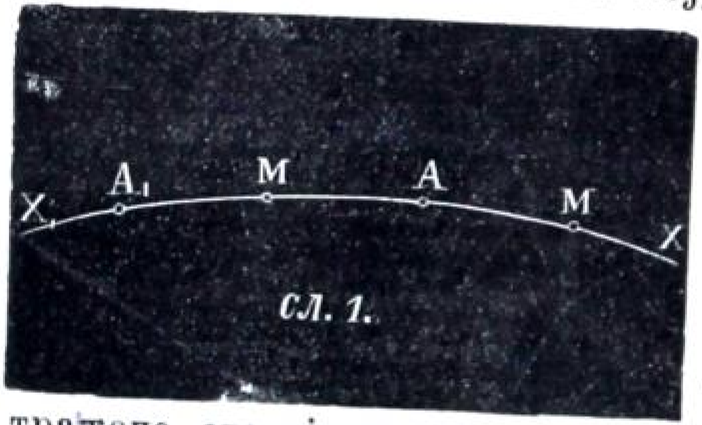
1. Кад две промењиве количине стоје у таквој свези да кад се једна од њих мења и друга се мора мењати, да свакој вредности једне одговара једна извесна вредност друге, онда се свака од њих зове *функција* друге. Тако је површина круга функција полупречника, јер се она са полупречником заједно мења то јест расти или опада, како кад полупречник расте или опада; обратно полупречник функција је површине. Пут, који падајуће тело прелази, јесте функција времена; обратно време функција је пута.

Обично се једна од две количине сматра као произвољно мењајућа се и зове се независно промењива или само промењива, а друга, која се мења тек усљед мењања прве, зове се њена функција.

Кад су у аналитичном изразу функције, у коме је показано како функција зависи од независно промењиве количине, назначене само алгебарске операције са независно промењивом количином то јест сабирање, одузимање, множење, дељење, подизање на познати степен и извлачење корена са познатим изложиоцем, функција се зове *алгебарска.* Испрва су се само такве функције изучавале. Но доцније дошле су на ред и такве функције, где се начин, како функција од променљиве зависи, не може изразити знацима алгебарских операција; оне су добиле име *трансцендентних* функција. Логаритам на пример јесте трансцендентна функција броја. Такве су и тригонометријске функције, које ћемо сада имати да изучавамо.

Употреба знакова + и — у геометрији.

1. Нека је (сл. 1) X_1X буди каква права или крива пруга, A и A_1 две тачке на њој, којих је растојање $A_1A=a$. Претпоставља се, да је познато отстојање x тачке A од буди које друге на прузи X_1X налазеће се тачке M, па се тражи отстојање тачке M од тачке A_1. Ако се тражено отстојање означи са y, то је:



Сл. 1.

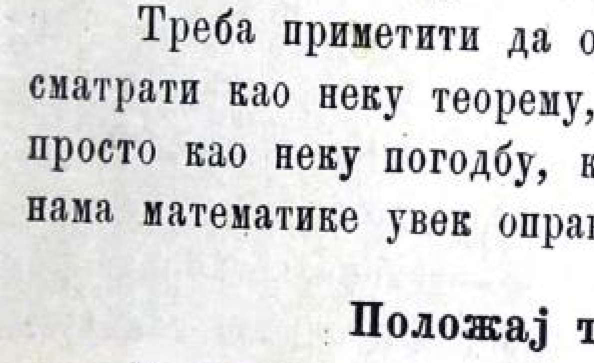
$$y = a + x \text{ или } y = a - x$$

како је кад тачка M десно или лево од A. По првом обрасцу тражиће се дакле отстојање тачке M од A_1, кад је M десно од A а по другом кад је M лево од A. За два особена случаја једног задатка нужна су дакле два различна обрасца. Но та се незгода може обићи и један ће образац бити довољан за разрешење задатка у оба случаја, ако се само отстојања, која од A иду противним правцима, узму и са противним знацима. И доиста ако се у првом од горњих образаца метне узастопце $x = + AM$ и $x = - AM$, излази у првом случају $y = a + AM$ а у другом $y = a - AM$. Ако се дакле отстојања од A на десно пренешена сматрају као положне а она на лево као одречне количине, први ће образац вредити за оба положаја тачке M и други образац нетреба. Кад би се отстојања од A на лево пренешена сматрала као положна а она на десно као одречна, други би образац вредио за све положаје тачке M' а први би био излишан. Оваквих примера могло би се још више навести, али овај један довољан је, да покаже корист и смер увођења одречних отстојања у геометрији. Descartes је био први, који је поставио као начело *да се отстојања, која су од једне на каквој правој или кривој прузи налазеће се тачке у противним правцима пренешена, имају у рачун уводити и са противним знацима.* Правац положних отстојања произвољан је, али кад је једном усвојен, противни се правац мора сматрати као правац одречних отстојања.

Треба приметити да ово Descartes-ово начело нетреба сматрати као неку теорему, која би се могла доказати, већ просто као неку погодбу, која се резултатима у свима гранама математике увек оправдава.

Положај тачке у равни.

3. Положај какве тачке у једној равни може се сматрати као познат, кад су позната отстојања њена од две у истој равни под правим углом секуће се праве и кад је осим тога од четири угла, на које је раван поменутим двема правима подељена, познат онај, где се тачка налази.



Сл. 2.

Нека су (сл. 2) YY_1 и X_1X две праве, које се у тачки O под правим углом секу; M_1 нека је једна тачка у углу YOX а m и n отстојања њена од правих YY_1 и X_1X. Ако на OX отсечемо OP = m и кроз P повучемо Pp паралелно са YY_1, то ће Pp морати пролазити кроз тражену тачку M_1, јер су отстојања свију тачака паралелне Pp од $УУ_1$ једнака m; ако даље на $OУ$ отсечемо $OQ = n$ и кроз Q повучемо Qq паралелно са X_1X, мораће и Qq пролазити кроз тачку M_1, јер су отстојања свију тачака паралелне Qq од X_1X једнака n. Почем дакле обе паралелне Pp и Qq морају пролазити кроз тачку M_1. то је јасно, да је тачка пресецања паралелних тражена тачка M_1.

Отстојање $OP = M_1Q = m$ зове се *апсциса* а отстојање $MP = OQ = n$ *ордината* тачке M_1. Апсциса и ордината тачке M_1 зову се укупно *координате* њене. Апсциса означава се уопште са x а ордината са y.

Права X_1X зове се *оса апсциса*, $УУ_1$ *оса ордината* а обе скупа *осе координата* или *координатне осе*. Тачка O, где се осе секу, зове се *почетак*, јер се при конструкцији тачке M_1 њене координате од O почевши на осама преносе.

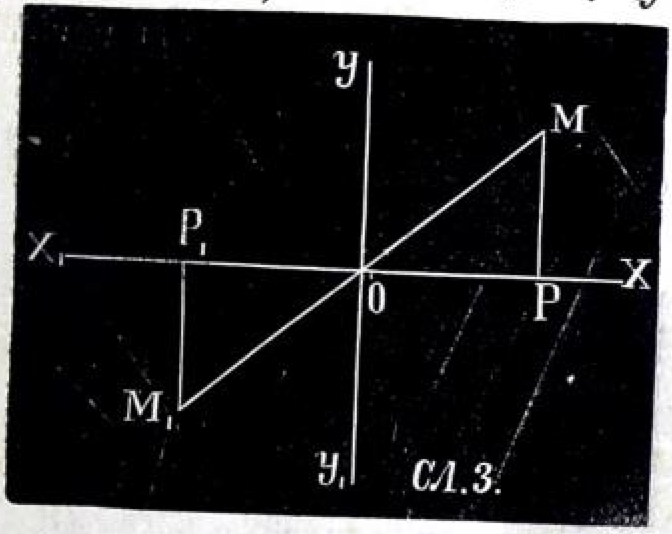
Ако горњу конструкцију извршимо у сваком од четири угла $УOX$, $УOX_1$, $У_1OX_1$, $У_1OX$, добићемо четири тачке M_1, M_2, M_3, M_4, по једну у сваком углу; одатле следује, да положај тачке у равни није савршено одређен, ако су познате само бројне вредности њених координата а не и угао, у коме се она налази. Угао, у коме је тражена тачка, назначује се тиме, што се — по поменутом Descartes-овом начелу — координатама њеним дају положни или одречни знаци према правцу, који исте односно координатних оса имају. Обично се апсцисе сматрају као положне, кад од тачке O или од $УУ_1$ иду на десно а као одречне, кад иду противним правцем; исто тако ординате се сматрају као положне, кад од тачке O или од X_1X иду на горе, а као одречне, кад иду противним правцем. Кад су обе координате тражене тачке положне, она је у углу $УOX$; кад је ордината положна а апсциса одречна, она је у углу $УOX_1$; кад су обе координате тачке одречне, она је у углу $У_1OX$; најзад кад је апсциса положна а ордината одречна, тачка је у углу $У_1OX$. И тако дакле знаци координата тражене тачке одређују угао, у коме је она, а бројне вредности координата само место тачке у дотичном углу.

Ако је тачка у оси X_1X њена је ордината једнака нули, а ако је она у оси $УУ_1$, њена је апсциса једнака нули; ако ли је најзад тачка у почетку, онда су обе координате њене једнаке нули.

4. Ако су (сл. 3) x и y координате какве тачке M а r отстојање њено од почетка O, то је

1) $$x^2 + y^2 = r^2,$$

јер су x и y катете а r ипотенуза правоуглог троугла OMP. Исти образац вреди и онда, кад је тачка M у једном од осталих углова у којима су координате њене отчести или обе одречне, јер су квадрати одречних количина положни. Дакле је збир квадрата координата једне тачке увек једнак квадрату њеног отстојања од почетка.



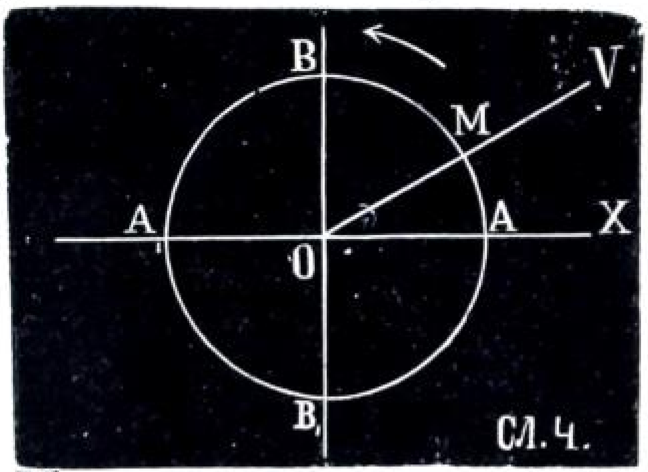
Сл. 3.

Из обрасца 1) сљедује да су апсциса и ордината какве тачке појединце мање од њеног отстојања од почетка O.

Угли и луци.

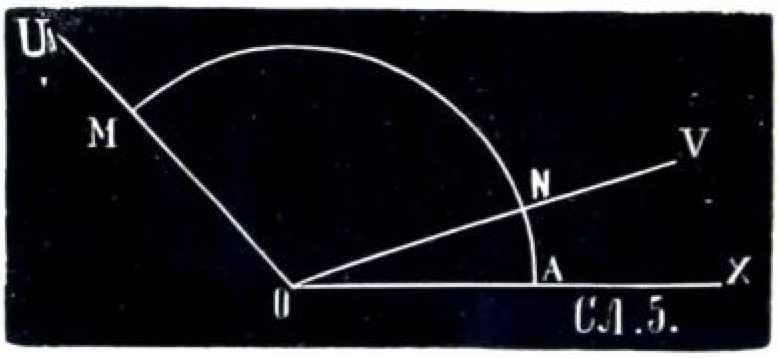
5. Узмимо нека се (сл. 4) права OMV из положаја OX око тачке O у правцу на слици означеном обрће тако, да иста узастопце долази у положаје OB, OA_1, OB_1, OA и да вративши се у првашњи свој положај OA своје обртање и даље наставља. Јасно је, да ће притом непрекидном обртању права OMV описати узастопце све могуће угле, а буди-

која тачка исте на пр. M све могуће луке. Угли на тај начин описани биће једнаки известном броју — који може и нула бити — пуних углова, више једном известном делу пуног угла. Исто тако и произвољном тачком M праве OMV описани луци износиће известан број — но који може и нула бити — периферија, више један известан део периферије. Ако се права OMV из положаја OX у противном правцу обрће, тачка ће M описивати одречне луке а права OMV одречне угле.



Сл. 4.

Отсада дакле угли и луци не морају се више као у геометрији сматрати између известних граница; они могу имати сваку могућу вредност између $-\infty$ и $+\infty$.



Сл. 5.

6. Нека су (сл. 5) VOX и UOX два угла, AN и AM два лука, који су из заједничког темена а са произвољним полупречником OA између њихових кракова описани. Сразмерност постојећа између углова и захваћених лукова даје

$$\frac{UOX}{VOX} = \frac{AM}{AN};$$

као што се види, ако се угао VOX узме за јединицу углова, а одговарајући лук AN за јединицу лукова, описаних са истим полупречником OA, угао UOX и лук AM биће изражени једним и истим бројем. Дакле

Кад се за јединицу углова узме један известни угао, а за јединицу одговарајућих или захваћених лукова, који су из њиховог темена са истим полупречником описани, *лук захваћен углом јединицом*, *онда сваки угао и њему одговарајући лук јесу и морају бити изражени једним и истим бројем.*

За јединицу углова узима се обично 360-ти део пунога угла, и та јединица углова зове се *степен*; а за јединицу одговарајућих и са истим полупречником описаних лукова узима се лук, који одговара углу јединици (и који је потоме 360-ти део целе дотичне периферије), и та јединица лукова зове се такође *степен* (лучни). На основу горњег докучења *сваки угао и одговарајући лук морају дакле имати исти број степена.*

На овоме се оснива практичан један начин мерења углова, који се састоји у томе, да се теме угла меће у средиште једне на степене, минуте и секунде подељење кружне периферије, и чита број степена, минута и секунада његовим крацима захваћеног лука, који број мора бити једнак броју степена, минута и секунада самога угла.

Пошто дужина периферије па дакле и њеног 360-ога дела, степена (лучног), зависи од дужине полупречника, дакле је променљива, то је јасно, да бројем степена, минута и секунада једнога лука није дата и његова права дужина, већ само његова размера наспрам целе дотичне периферије. Но ако је познат полупречник, са којим је лук описан, то се из броја степена, минута и секунада лука може његова дужина лако израчунати. Јер ако је на пр. n број степена лука, l његова дужина, то јест број у њему налазећих се линеарних јединица, а r дужина полупречника, са којим је лук описан, то је $2r\pi$ дужина целе дотичне периферије, $\frac{2r\pi}{360} = \frac{r\pi}{180}$ дужина лука од једнога степена, дакле

$$1) \qquad l = \frac{r\pi n}{180}$$

дужина лука од n степена. Одавде сљедује образац

$$2) \qquad n = \frac{l\,180}{r\pi},$$

помоћу којег се налази број степена једног са полупречником r описаног лука, кад је позната његова дужина l. Обрасци 1) и 2) непретпостављају ништа о избору линеарне јединице. Ако се као таква узме сам полупречник, то је тада дужина лука

$$3) \qquad l' = \frac{l}{r} = \frac{\pi n}{180}.$$

Овај образац даје дужину лука у деловима полупречника, кад је познат или број степена лука или дужина лука и полупречника у односу на ма какву другу линеарну јединицу. Не треба превидити, да размера $\frac{l}{r}$, која претставља лук у деловима полупречника, не зависи од дужине полупречника, но једино од броја n његових степена, дакле од величине одговарајућег угла; за један и исти угао поменута размера остаје стална.

Из обрасца 3) сљедује

$$4) \quad l = rl' \text{ и } \quad 5) \quad n = \frac{l'180}{\pi}$$

Први образац даје дужину лука у односу на ма какву линеарну јединицу а други број степена лука, кад је позната његова дужина у односу на полупречник.

У обрасцима 1) и 3) треба место 180 метнути 180.60 = 10800 или 180.60.60 = 648000, кад је лук дат у минутама или у секундама само, кад дакле n значи број минута или број секунада лука. То исто треба урадити и у обрасцима 2) и 5, кад се из познате дужине лука тражи исти лук али у минутама или секундама само.

Кад је n број степена лука l онда, као што горе нађосмо, број $\frac{n\pi}{180} = \frac{l}{r}$ претставља исти лук, ако се полупречник r узме за јединицу. Исти број претстављаће дакле и луку l одговарајући угао (т. ј. угао, од n степена, који га захвата), ако се само за јединицу углова узме угао, који захвата лук једнак полупречнику. По овоме ће дакле 2π прeстављати и целу периферију и пун угао; π и половину периферије и раван угао; $\frac{\pi}{2}$ и четвртину периферије и прав угао; $\frac{\pi}{6}$ и лук и угао од 30° и т. д.

Број степена лука, који је једнак полупречнику, па дакле и одговарајућег угла налази се узимајући у обрасцу 2) $l = r$ или у обрасцу 5) $l' = 1$. Исти је број

$$n = \frac{180}{\pi} = 57^\circ \; 17' \; 44{\cdot}77''.$$

Резултат разматрања у овој № јесте ово:

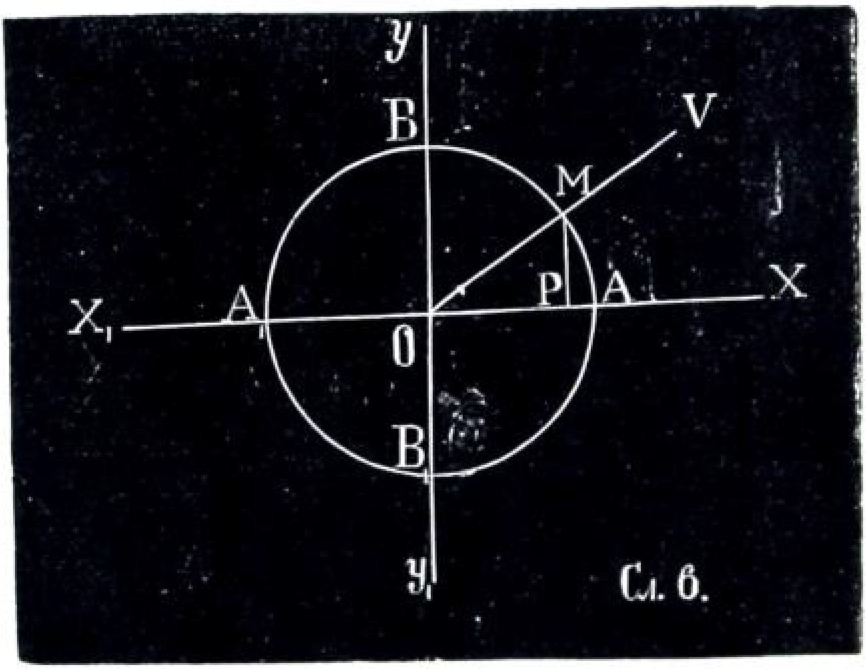
Угао и одговарајући лук изражени су једним и истим бројем не само онда, кад су они изражени у степенима, кад је дакле за јединицу лукова узет 360-ти део периферије а за јединицу углова 360-ти део пунога угла, већ и онда, кад је за јединицу лукова узет полупречник а за јединицу углова угао, који лук једнак полупречнику захвата.

Често се каже *лук је мера углу*; то не значи ништа друго до то, да су угао и одговарајући лук изражени једним и истим бројем онда, кад јединици углова одговара — кореспондира — јединица лукова.

Лако је сад разумети, шта се има на уму, кад се каже: лук је изражен у деловима периферије, у деловима полупречника или размером својом наспрам полупречника; угао је изражен дужином одговарајућег и полупречником јединицом описаног лука или угао је изражен размером одговарајућег лука наспрам полупречника.

Одредба тригонометријских функција или размера.

7. Нека су (сл. 6) X_1X и $УУ_1$ две у тачки O под правим углом секуће се осе; AOM један угао, који је постао обртањем једне праве из првобитног положаја њеног OX у положај OV; AM истом углу одговарајући и произвољном тачком M покретне праве описани лук; MP и OP ордината и апсциса крајне тачке M лука AM.



Сл. 6.

Претпоставивши ово имамо:

Синус — *sinus* — угла AOM или лука AM зове се *размера ординате тачке* M — крајне тачке лука — *наспрам полупречника* OM. Дакле:

$$\sin AM = \frac{MP}{OM}.$$

Косинус — *cosinus* — истог угла или лука зове се *размера апсцисе тачке* M *наспрам полупречника* OM. Дакле:

$$\cos AM = \frac{OP}{OM}.$$

Тангента — *tangens* — *размера ординате тачке* M *наспрам њене апсцисе*. Дакле:

$$tg\, AM = \frac{MP}{OP}$$

Размере извртањем ових, које пређосмо, постајуће добиле су особита имена. Тако:

Секанта — *secans* — угла AOM или лука AM зове се изврнути косинус. Дакле:

$$sec\ AM = \frac{OM}{OP}.$$

Косеканта — *cosecans* — истог угла или лука зове се изврнути синус. Дакле:

$$cosec\ AM = \frac{OM}{MP}.$$

Котангента — *cotangens* — истог угла или лука зове се изврнута тангента. Дакле:

$$cotg\ AM = \frac{OP}{MP}.$$

Ако лук AM — или угао AOM — означимо са a полупречник OM са r, координате тачке M са x и y, имаћемо:

$$sin\ a = \frac{y}{r}, \quad cos\ a = \frac{x}{r}, \quad tg\ a = \frac{y}{x},$$

$$cosec\ a = \frac{r}{y}, \quad sec\ a = \frac{r}{x}, \quad cotg\ a = \frac{x}{y}.$$

sin a, cos a, tg a и т. д. као размере извесних правих јесу неименовани бројеви и зову се *тригонометријске* или *гониометријске размере* угла или лука a. Вредност истих размера зависи једино од величине угла а никако и полупречника, баш зато што су то размере; јер ако је полупречник n пута већи, координате тачке M биће такође n пута веће, дакле ће размере тих правих остати исте. Зато што вредност тригонометријских размера зависи само од величине угла, оне се и зову *тригонометријске функције* угла или лука.

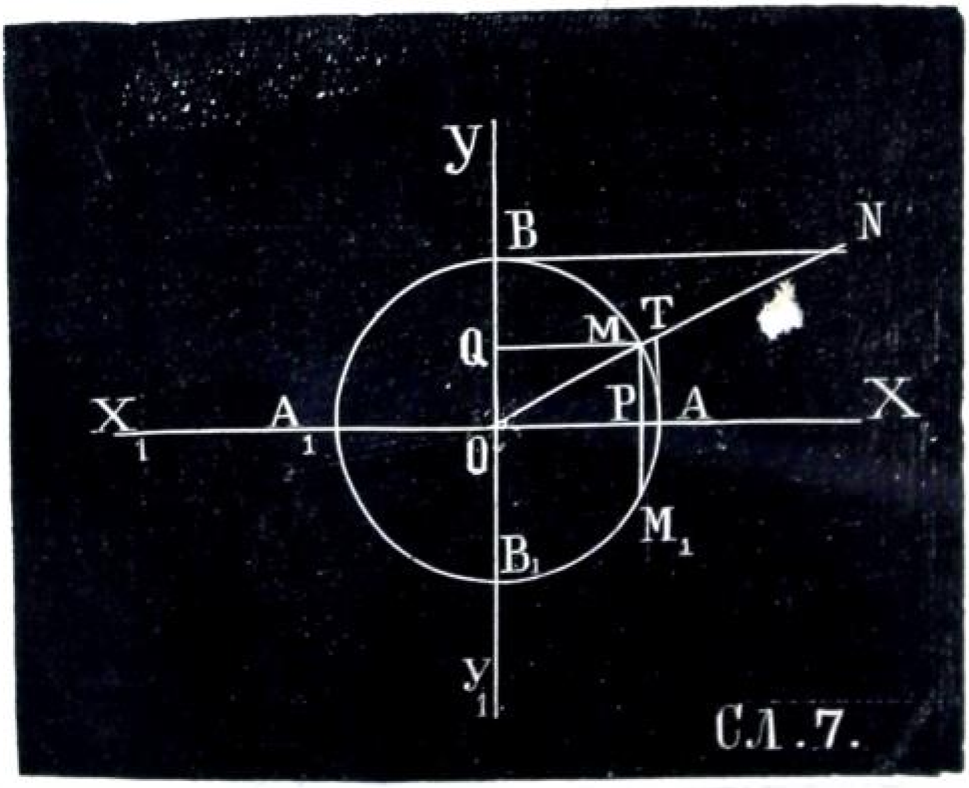
8. Лако је дати разлога зашто су тригонометријским функцијама дата горња имена.

Ако се полупречник узме као јединица, то је:

$$\sin a = y, \qquad \cos a = x, \qquad tg\, a = \frac{y}{x},$$

$$cosec\, a = \frac{1}{y}, \qquad \sec a = \frac{1}{x}, \qquad cotg\, a = \frac{x}{y}$$

Дакле кад је полупречник узет као јединица, *синус је једнак ординати MP* (сл. 7) и по томе *није ништа друго но половина тетива двапут већег лука MAM_1*. Половина тетива зове се латински semi-inscripta — т. ј. половина уписаног. — Из првога слова *s* речи *semi* и прва два *in* речи *inscripta* постала је са додатком *us* реч *sinus*.



Сл. 7.

Ако повучемо дирку AT кроз почетак A лука и продужимо ју до пресека са полупречником, који пролази кроз луков крај M, то ћемо из сличних троуглова OPM и OAT наћи:

$$\frac{y}{x} = \frac{AT}{1} = AT.$$

Размера $\frac{y}{x}$ т. ј. *tg a* претстављена је дакле дирком (латин. *tangens*) AT.

Из истих троуглова сљедује такође:

$$\frac{1}{x} = \frac{OT}{1} = OT.$$

Размера $\frac{1}{x}$ т. ј. *sec a* претстављена је дакле комадом сечице (лат. *secans*) налазећим се у правцу полупречника OM између луковог средишта O и тачке T.

Луку $AM = a$ комплеменат је лук $BM = \frac{\pi}{2} - a$. Ако за почетак овог последњег узмемо B и дакле исти замислимо положно описан од B према M, то ће $MQ = OP = x = \cos a$ претстављати његов синус. Исто тако BN претстављаће тангенту а ON секанту истог лука. Из сличних троуглова AOT и OBN сљедује

$$\frac{BN}{1} = \frac{1}{AT} = \operatorname{cotg} a.$$

На исти начин сљедује из сличних троуглова OMP и OBN

$$\frac{ON}{1} = \frac{1}{y} = \operatorname{cosec} a.$$

Дакле је накратко:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{a}\right) = \cos a\,,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{a}\right) = \operatorname{cotg} a\,,$$

$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{a}\right) = \operatorname{cosec} a.$$

Косинус, котангента и косеканта једног лука — или угла — јесу дакле редом синус, тангента, и секанта његовог комплемента, откуда и име истих функција; јер на пр. *cosinus* постало је из *complementi sinus* итд.

Завршујући ову тачку понављамо да, кад је *полупречник узет за јединицу*, ордината MP претставља синус лука AM (или угла AOM), апсциса OP његов косинус, дирка AT његову тангенту; исто тако OT претставља секанту, ON косеканту и најзад BN котангенту истог лука. Но не треба сметнути с ума, да су само одредбе у № 7 опште.

9. Кад је лук познат, онда су познате и његове тригонометријске функције или размере. Обратно лук, ако је исти мањи од $\frac{\pi}{2}$, може се сматрати као познат, кад је познат полупречник лука и једна од његових тригонометријских функција на пример синус. Јер ако су r и $\sin a$ познати, то је $\frac{y}{r} = \sin a$ а одатле $y = r \sin a$. Преносећи од O на оси OY и у одговарајућем правцу дужину $OQ = y$ и повлачећи кроз Q паралелно са осом OX праву QM, наћићемо у пресеку M исте праве са кружном линијом крај траженога лука.

10. Кад је дани угао оштар, онда су координате крајне тачке одговарајућег лука катете а полупречник ипотенуза правоуглог троугла, у коме се дани угао налази. Потоме за оштре угле може се рећи:

Синус угла јесте: размера супротне катете насрам ипотенузе.

Косинус: размера налегле катете насрам ипотенузе.

Тангента: размера супротне катете насрам налегле.

Косеканта: изврнути синус; секанта: изврнути косинус; котангента: изврнута тангента.

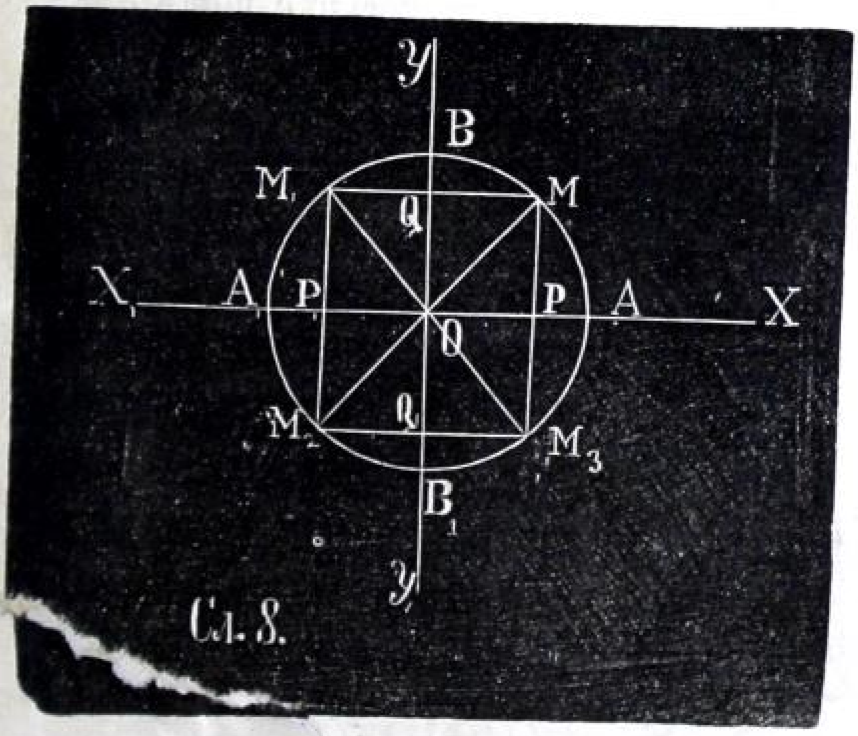
Тригонометријске функције, које се најчешће употребљују, јесу синус, косинус, тангента и котангента. Са овима ћемо се отсада и бавити само, а секанту и косеканту, које се ређе особито у новије доба употребљују, изоставићемо.

Најзад напомињемо, да ћемо у овом првом делу узимати полупречник увек као јединицу; осим тога угле ћемо замењивати одговарајућим луцима, које ћемо понајчешће у деловима полупречника изражавати.

Мењање тригонометријских функција.

11. Сад имамо да испитамо, како се мењају тригонометријске функције каквог лука a, то јест како оне расту или опадају, кад се лук a непрекидно мења од 0 до $+\infty$ и од 0 до $-\infty$.

$\sin a = MP$ (сл. 8). При непрекидном растењу лука a од 0 до $\frac{\pi}{2}$ синус, који је једнак ординати крајње тачке лука, расте од 0 до 1 и то непрекидно т.ј. прелазећи узастопце све међувредности; при даљем растењу лука од $\frac{\pi}{2}$ до π синус опада непрекидно од 1 до 0; вредно је напоменути да синус добија увек једнаке вредности за такве вредности лука, које су д $\frac{\pi}{2}$ једнако удаљене. При растењу лука од π до $\frac{3\pi}{2}$ синус постаје одречан и опада од 0 до -1, а



Сл. 8.

затим при растењу лука од $\frac{3\pi}{2}$ до 2π расте од -1 до 0. За $a = \frac{\pi}{2}$ и $a = \frac{3\pi}{2}$ синус добија очевидно своју највећу и најмању вредност.

Кад лук расте од 2π до 4π, од 4π до 6π и т. д. синус добија узастопце и истим редом оне вредности, које је добијао при растењу лука од 0 до 2π.

Из реченога сљедује:

$$sin\, 0 = 0,\ sin\, \frac{\pi}{2} = 1,\ sin\, \pi = 0$$

$$sin\, \frac{3\pi}{2} = -1,\ sin\, 2\pi = 0.$$

12. $cos\, a = OP$. При растењу лука a од 0 до $\frac{\pi}{2}$ косинус, који је једнак апсциси крајне тачке лука, опада од 1 до 0; при растењу лука од $\frac{\pi}{2}$ до π косинус постаје одречан и опада од 0 до -1, а потом при даљем растењу лука од $\frac{3\pi}{2}$ до 2π косинус постаје опет положан и расте од 0 до 1.

Кад лук расте од 2π до 4π, од 4π до 6π и т. д. косинус прелази узастопце исте вредности, као и при растењу лука од 0 до 2π.

Из овога свега сљедује:

$$cos\, 0 = 1,\ cos\, \frac{\pi}{2} = 0,\ cos\, \pi = -1$$

$$cos\, \frac{3\pi}{2} = 0,\ cos\, 2\pi = 1.$$

13. $tg\, a = \frac{MP}{OP}$. При растењу лука a од 0 до $\frac{\pi}{2}$

$tg = \frac{\sin}{\cos} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin\alpha}}$

ордината његове крајне тачке расте од 0 до 1, а апсциса опада од 1 до 0; одатле сљедује да тангента мора растити од 0 до $+\infty$; при растењу лука од $\frac{\pi}{2}$ до π ордината опада од 1 до 0 а апсциса од 0 до -1, одакле сљедује да тангента постаје у другој четврти одречна и да расте од $-\infty$ до 0; при растењу лука од π до $\frac{3\pi}{2}$ ордината крајне тачке лука опада од 0 до -1 а апсциса расте од -1 до 0, дакле тангента мора растити од 0 до $+\infty$ као и у првој четврти; најзад при растењу лука од $\frac{3\pi}{2}$ до 2π ордината крајне тачке лука расте од -1 до 0 а апсциса од 0 до 1, дакле тангента мора растити од $-\infty$ до 0 као и у другој четврти.

Кад лук расте од 2π до 4π, од 4π до 6π и т. д. тангента прелази редом исте вредности као и при растењу лука од 0 до 2π.

Из реченога сљедује:

$$tg\,0 = 0,\ tg\frac{\pi}{2} = \pm\infty,\ tg\,\pi = 0,$$

$$tg\frac{3\pi}{2} = \pm\infty,\ tg\,2\pi = 0.$$

Код $tg\frac{\pi}{2}$ стоје два знака, јер се $\frac{\pi}{2}$ може сматрати као крајна граница несамо оних лукова, који расту од 0 до $\frac{\pi}{2}$ и имају положне тангенте, већ и оних, који опадају од π до $\frac{\pi}{2}$ и имају одречне тангенте. Исто тако код $tg\frac{3\pi}{2}$ стоје два знака, што је $\frac{3\pi}{2}$ крајна граница не само лукова, који расту од π до $\frac{3\pi}{2}$ и имају положне тангенте но и лукова, који опадају од 2π до $\frac{3\pi}{2}$ и имају одречне тангенте.

14. $cotg\, a = \frac{OP}{MP}$. Почем је котангента изврнута тангента, то је лако увидити, да ће се она у првој четврти мењати од ∞ до 0, у другој од 0 до $-\infty$, у трећој од ∞ до 0, у четвртој од 0 до $-\infty$.

Кад лук расте од 2π до 4π, од 4π до 6π и т. д. котангента добија редом исте вредности као и при растењу лука од 0 до 2π.

Напослетку је:

$$cotg\, 0 = \pm \infty,\ cotg\, \frac{\pi}{2} = 0,\ cotg\, \pi = \pm \infty$$

$$cotg\, \frac{3\pi}{2} = 0,\ cotg\, 2\pi = \pm \infty.$$

15. Кад лук опада од 0 до $-\infty$, косинус узима узастопце исте вредности као и при растењу лука од 0 до $+\infty$; остале тригонометријске функције добијају такође исте апсолутне вредности као и при растењу лука од 0 до $+\infty$ али с променутим знаком. Ово ће бити јасно, ако се узме на ум, да су крајне тачке једнаких а противно означених лукова a и $-a$ на истој страни од $УУ_1$ а на противним странама од X_1X и да су од истих оса једнако далеко, због чега поменуте крајне тачке морају имати исту апсцису а ординате једнаке али противно означене. По овоме је за ма какав лук a:

$$sin\,(-a) = -sin\, a,\ cos\,(-a) = cos\, a,$$

$$tg\,(-a) = -tg\, a,\ cotg\,(-a) = -cotg\, a.$$

16. Кад буди какав лук a нарасте или се умали са 2π, 4π, 6π и т, д. то јест са једном или више перифери-

ја, тригонометријске функције новога лука очевидно су исте као и лука a, јер крајна тачка новога лука пада над крајном тачком лука a, дакле обе тачке имају исте координате. Ако је дакле n буди какав положан или одречан цео број, то је:

$$sin\,(2n\pi + a) = sin\,a,\ cos\,(2n\pi + a) = cos\,a,$$
$$tg\,(2n\pi + a) = tg\,a,\ cotg\,(2n\pi + a) = cotg\,a.$$

Из ових образаца, који вреде за ма какво a, добијамо узимајући $-a$ место a и обзирући се на обрасце № 15:

$$sin\,(2n\pi - a) = -\,sin\,a,\ cos\,(2n\pi - a) = cos\,a,$$
$$tg\,(2n\pi - a) = -\,tg\,a.\ cotg\,(2n\pi - a) = -\,cotg\,a,$$

који обрасци такође вреде за ма какво a.

17. Нека је a буди какав положан или одречан лук. Луци a и $\pi + a$ разликују се половином периферије; њихове крајне тачке морају се с тога налазити на противним крајевима једног и истог пречника и морају зато — што се на слики сличношћу троуглова оправдати даје — имати једнаке али противно означене координате; одатле сљедује, да поменути луци морају имати једнаке али противно означене синусе и косинусе а тангенте и котангенте једнаке и једнако означене. Дакле је:

$$sin\,(\pi + a) = -\,sin\,a,\ cos\,(\pi + a) = -\,cos\,a,$$
$$tg\,(\pi + a) = tg\,a,\ cotg\,(\pi + a) = cotg\,a.$$

Пошто тангента и котангента, кад лук са π нарасте, добијају исту вредност, то се исте функције зову периодне и број π њина периода. Синус и косинус такође су периодне функције, но њихова је периода 2π, то јест они се немењају кад лук нарасте са једном или више периферија.

Ако у горњим обрасцима, који вреде за ма какво a, заменимо a са $-a$, добијамо обзирући се на образце № 15:

$$sin\,(\pi - a) = sin\,a,\ cos\,(\pi - a) = -\,cos\,a,$$
$$tg\,(\pi - a) = -\,tg\,a,\ cotg\,(\pi - a) = -\,cotg\,a,$$

одакле се види, да су синуси суплементних лукова једнаки и једнако означени а косинуси, тангенте и котангенте једнаки али противно означени.

Из ових образаца и оних мало више сљедује:

$$sin\left[(2n+1)\pi \pm a\right] = \mp sin\, a, cos\left[(2n+1)\, \pi \pm a\right] = -\, cos\, a,$$

$$tg\left[n\pi \pm a\right] = \pm\, tg\, a,\ cotg\,(n\pi \pm a) = \pm\, cotg\, a,$$

где n може бити буди какав положан или одречан цео број.

18. Лук $\frac{\pi}{2} + a$ суплеменат је луку $\frac{\pi}{2} - a$, дакле је на основу образаца № 17 и оних № 8, који, као што се лако може увидити, вреде такође за ма какво a:

$$sin\,(\frac{\pi}{2} + a) = sin\,(\frac{\pi}{2} - a) = cos\, a,$$

$$cos\,(\frac{\pi}{2} + a) = -\, cos\,(\frac{\pi}{2} - a) = -\, sin\, a,$$

$$tg\,(\frac{\pi}{2} + a) = -\, tg\,(\frac{\pi}{2} - a) = -\, cotg\, a,$$

$$cotg\,(\frac{\pi}{2} + a) = -\, cotg\,(\frac{\pi}{2} - a) = -\, tg\, a.$$

19. Из претреса у пређашњим №-ма као и из самих одредаба тригонометријских функција сљедује, да се синус и косинус морају увек налазити између граница $-\,1$ и $+\,1$, док међутим тангента и котангента могу имати сваку између $-\,\infty$ и $+\,\infty$ налазећу се вредност.

Помоћу образаца у №-ма 15 до 18 могу се тригонометријске функције одречних лукова и положних, који су већи од једне четврти, изразити тригонометријским функцијама лукова прве четврти.

Помоћу образаца № 15 може се свака функција једног одречног лука изразити једноименом функцијом положног лука исте величине. Ако је положни лук већи од 2π, треба од њега одбити онолико пута по 2π или целих периферија, колико се може; остатак, који је мањи од 2π, имаће на основу образаца № 16 са реченим положним луком једнаке и једнако означене тригонометријске функције. Ако је поменути остатак лук друге четврти т. ј. већи од $\frac{\pi}{2}$ а мањи од π, треба га од π одузети и лук прве четврти, који изађе, имаће с њиме на основу четири претпоследња обрасца № 17 синус једнак и једнако означен, а косинус, тангенту и котангенту једнаке али противно означене.

Ако је поменути остатак лук треће четврти т. ј. већи од π а мањи од $\frac{3\pi}{2}$, треба од истог одбити π и лук прве четврти, који изађе, имаће с њиме на основу прва четири обрасца № 17 синус и косинус једнак али противно означен а тангенту и котангенту једнаку и једнако означену.

Ако је најзад поменути остатак лук последње четврти т. ј. већи од $\frac{3\pi}{2}$ а мањи од 2π, треба га од 2π одузети и лук прве четврти, који изађе, имаће с њиме по четири последња обрасца № 16 косинус једнак и једнако означен а синус, тангенту и котангенту једнаке али противно означене.

Примери:

a) $sin\,(-3954^\circ\ 36'\ 52'') = -sin\,(3954^\circ\ 36'\ 52'')$ (№ 15)

$= -sin\,(10.360^\circ + 354^\circ 36' 52'') = -sin\,(354^\circ\ 36' 52'')$ (№16)

Пошто је лук $354^\circ\ 36'\ 52''$ лук последње четврти, то добијамо одузимањем:

$$\begin{array}{r} 359^\circ\ 59'\ 60'' \\ 354^\circ\ 36'\ 52'' \\ \hline 5^\circ\ \ 3'\ \ 8'' \end{array}$$

По № 16 је:

$$\mathit{sin}\,(354^\circ\ 36'\ 52'') = -\ \mathit{sin}\,(5^\circ\ 3'\ 8''),$$

и дакле напослетку:

$$\mathit{sin}\,(-\ 3954^\circ\ 36'\ 52'') = \mathit{sin}\,(5^\circ 3'\ 8'').$$

б) $tg\,(2681^\circ\ 43'\ 19'') = tg\,(7.360^\circ + 161^\circ\ 43'\ 19'') =$

$$= tg\,(161^\circ 43'\ 19'') = -\ tg\,(18^\circ\ 16'\ 41'').$$

Тражење лукова (углова) одговарајућих даном синусу косинусу итд.

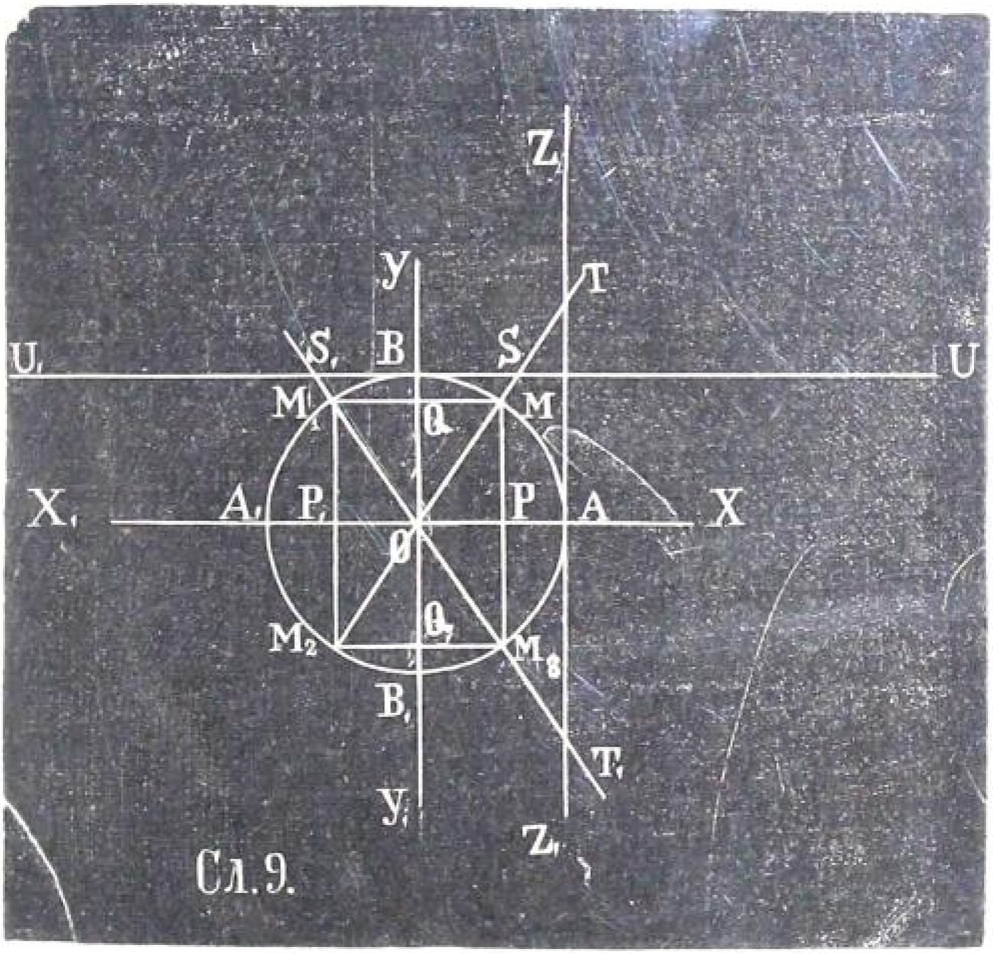
20. Из досадањих разматрања сљедује, да један извесни лук има само један синус, косинус итд. док међутим датом синусу, косинусу итд. одговарају безбројни луци. Почем је често нужно знати све оне луке, који одговарају датом синусу, косинусу итд. кад је један од тих лукова познат, то ћемо се са тим питањем сада бавити.

1. Синус. Нека је m буди какав између $-\ 1$ и $+\ 1$ стојећи број. Да би нашли све луке, којима је m синус, претпоставимо најпре да је m положно и узмимо (сл. 9) $m = OQ$; повуцимо затим кроз Q паралелну са X_1X; иста паралелна пресећиће круг у двема тачкама M и M_1 и очевидно сваки лук, коме је $m = OQ$ синус, свршаваће се у једној од тих тачака. Ако буди који од тих лукова означимо са a, то ће тачке M и M_1 бити крајне тачке лукова a и $\pi - a$; јер узимајући да се лук a свршује у M, треба да би описали лук $\pi\ -\ a$, ићи најпре од A преко B ка A_1, после чега ће остати, да се опише лук $-\ a$, што ће морати одвести тачки M_1, јер описом лука $+\ a$ долази се тачки M. Пошто се сад сваки лук, коме је $m = OQ$ синус, мора свршивати или у M, где се свршује лук a или у M_1, где се свршује лук $\pi\ -\ a$, и пошто се даље луци, који имају исти

почетак и свршетак морају разликовати са неколико целих положних или одречних периферија, то је јасно да се луци, којима је $m = OQ$ синус, морају садржати у обрасцима:

$$2n\pi + a \quad \text{и} \quad 2n\pi + \pi - a = (2n + 1)\,\pi - a,$$

где n може бити ма какав цео број, положан, одречан или и нула.



Сл. 9.

Ако је m одречно, узмимо $m = -OQ_1$ и повуцимо кроз Q_1 паралелну са X_1X; иста паралелна сећиће круг у тачкама M_2 и M_3 и сваки лук, коме је $m = -OQ_1$ синус, мораће се завршивати у M_2 или M_3. Ако буди који од тих лукова означимо са a, то ће тачке M_2 и M_3 бити крајне тачке лукова a и $3\pi - a$; јер узимајући да се a завршује у M_2, треба да би описали лук $3\pi - a$ ићи од A преко B, A_1, B_1, A, и B до A_1, то јест треба описати три полупериферије у означеном правцу, после чега ће требати да се опише лук $-a$, што ће одвести тачки M_3, јер описом лука $+a$ долази се тачки M_2. Пошто се сад луци, којима је $m = -OQ_1$

синус, морају свршивати у M_2 или у M_3, где се свршују луци a и $3\pi - a$ и пошто се даље луци са истим почетком и свршетком морају разликовати са неколико целих положних или одречних периферија, то је јасно да се сви луци, којима је $m = - OQ_1$ синус, морају садржати у обрасцима:

$$2n\pi + a \text{ и } 2(n-1)\pi + 3\pi - a = (2n+1)\pi - a,$$

као и пре кад је m положно; n као и горе може бити буди какав положан или одречан цео број, па дакле и нула.

2. Косинус. Нека је m буди какав између -1 и $+1$ налазећи се број. Да би нашли све луке, којима је m косинус, узмимо (сл. 9) $m = + OP$ или $m = - OP_1$, како је кад m положно или одречно и повуцимо кроз P или P_1 паралелну са $УУ_1$; иста паралелна сећиће круг у двема тачкама M и M_3 или M_1 и M_2 и очевидно сваки лук, коме је m косинус, мораће се свршивати у једној од двеју тачака M и M_3, или M_1 и M_2. Ако ма који од тих лукова означимо са a, то ће се луци a и $-a$ свршивати у M и M_3 или у M_1 и M_2 како је кад m положно или одречно. Пошто се сад луци, којима је m косинус, морају свршивати или онде, где се свршује лук a или пак онде где $-a$, то је јасно, да се сви ти луци морају садржати у обрасцима

$$2n\pi + a \quad \text{и} \quad 2n\pi - a$$

где n значи буди какав цео положан или одречан број, који може и нула бити.

3. Тангента. Нека је сада m буди какав између $-\infty$ $+\infty$ стојећи број. Да би нашли све луке, којима је m тангента. узмимо (сл. 9) на дирки ZZ_1, повученој кроз почетак A лука, $m = + AT$ или $m = - AT_1$, како је кад m положно или одречно, и кроз крајњу тачку T или T_1 — како је кад m положно или одречно — и средиште круга повуцимо једну праву, која ће круг сећи у двема тачкама M и M_2 или M_1 и M_3; сваки лук, коме је m тангента,

свршиваће се у једној од тих двеју тачака. Ако ма који од тих лукова означимо са a, то ће се луди a и $\pi + a$ свршивати у M и M_2 или M_1 и M_3. Пошто се сад сви луци, којима је m тангента, свршују онде, где се свршује један од лукова a и $\pi + a$, то је јасно да се сви ти луци садрже у обрасцима:

$$2n\pi + a \quad \text{и} \quad 2n\pi + \pi + a = (2n + 1)\pi + a$$

или краће у обрасцу:

$$n\pi + a,$$

где n значи ма какав цео положан или одречан број, који може и нула бити.

3. Котангента. Нека је опет m ма какав између $-\infty$ и $+\infty$ налазећи се број. Да би нашли све луке, којима је m котангента, узмимо (сл. 9) на дирки UU_1, повученој кроз B, $m = + BS$ или $m = - BS_1$, како је кад m положно или одречно, и кроз тачку S или S_1 и средиште круга повуцимо једну праву, која ће круг сећи у двема тачкама M и M_2 или M_1 и M_3; сваки лук, коме је m котангента, мораће се свршивати у једној од тих двеју тачака. Ако је a ма који од тих лукова, то ће се a и $\pi + a$ свршивати у M и M_2 или M_1 и M_3. Пошто се сад луци, којима је m котангента, морају свршивати неки онде где лук a, а неки онде где лук $\pi + a$, то је јасно, да се сви они морају садржати у обрасцима

$$2n\pi + a \quad \text{и} \quad 2n\pi + \pi + a = (2n + 1)\pi + a$$

или краће у образцу

$$n\pi + a,$$

где n може бити ма какав цео положан или одречан број, који може и нула бити.

Из горњих разматрања сљедује да

Два лука имају исти синус, кад њихов збир износи непаран или њихова разлика паран број полупериферија.

Два лука имају исти косинус, кад њихов збир или разлика износи неколико целих периферија.

Два лука имају исту тангенту и котангенту, кад њихова разлика износи неколико полупериферија.

Ове су истине уосталом исказане у обрасцима №. 16 и 17.

21. Синус, косинус, тангента и котангента лука a означавају се, као што смо видили, са $\sin a$, $\cos a$, $tg\, a$ и $cotg\, a$. Обратно лук, коме је број m синус, означава се са $arc \sin m$, које се чита *arcus* (лук), коме је m синус. Исто тако лук, коме је m косинус, тангента или котангента, означава се са $arc \cos m$, $arc\, tg\, m$, $arc\ cotg\, m$, који се знаци читају: аркус коме је m косинус, аркус коме је m тангента и аркус коме је m котангента. Горе смо видили, да датом синусу, косинусу и т. д. одговарају безбројни луци; одатле сљедује, да изрази $arc \sin m$, $arc \cos m$, $arc\, tg\, m$ и $arc\ cotg\, m$ нису савршено одређени, јер при извесној вредности броја m имају небројено много вредности. Но изрази $arc \sin m$, $arc\, tg\, m$ и $arc\ cotg\, m$ постају савршено одређени, кад се само утврди, да њихове вредности имају остати у границама $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, кад се с другим речима под истим знацима буде разумео најмањи од оних лукова, којима је m синус, или тангента или котангента. На исти начин и израз $arc \cos m$ постаје одређен, кад се утврди, да његове вредности имају остати у границама 0 и π. С тим ограничењем изрази $arc \sin m$, $arc \cos m$, $arc\, tg\, m$, $arc\ cotg\, m$ могу се сматрати као функције броја m. Оне се зову *изврнуте тригонометријске функције* и налазе своје употребе у вишој математики.

Односи између тригонометријских функција једног и истог лука.

22. Ако је a ма какав лук а x и y координате његове крајне тачке, то је за полупречник $= 1$:

$$\sin a = y\,,\ \cos a = x\,,\ tg\, a = \frac{y}{x},\ cotg\, a = \frac{x}{y}.$$

Подижући прве две једначине на квадрат и потом их сабирајући добијамо:

$$\sin^2 a + \cos^2 a = x^2 + y^2.$$

Но по № 4. израз $x^2 + y^2$ једнак је квадрату отстојања тачке M од почетка, или пошто је овај сада у средишту круга, квадрату полупречника, који је $= 1$.

Потоме је:

$$1)\qquad \sin^2 a + \cos^2 a = 1\,,$$

одакле се такође види да синус и косинус морају бити између -1 и $+1$.

Из прве четири једначине горе сљедује

$$2)\qquad tg\, a = \frac{\sin a}{\cos a},$$

$$3)\qquad cotg\, a = \frac{\cos a}{\sin a}.$$

Из ових једначина или из последње две од оних четири у почетку ове № добија се множењем:

$$4)\qquad tg\, a\ cotg\, a = 1$$

а одавде:

$$5)\qquad tg\, a = \frac{1}{cotg\, a},$$

$$6)\qquad cotg\, a = \frac{1}{tg\, a}.$$

23. Помоћу образаца № 22 могу се, кад је једна од тригонометријских функција позната, остале изнаћи.

1. Нека је $sin\ a$ познат.

Из обрасца 1) № 22 сљедује:

$$cos^2 a = 1 - sin^2 a,\ cos\ a = \pm \sqrt{1 - sin^2 a}$$

из обрасца 2)·

$$tg^2 a = \frac{sin^2 a}{cos^2 a} = \frac{sin^2 a}{1 - sin^2 a},\ tg\ a = \pm \frac{sin\ a}{\sqrt{1 - sin^2 a}}\cdot$$

Из обрасца 3):

$$cotg^2 a = \frac{cos^2 a}{sin^2 a} = \frac{1 - sin^2 a}{sin^2 a}\ cotg\ a = \pm \frac{\sqrt{1 - sin^2 a}}{sin\ a}$$

2. Нека је $cos\ a$ познат.

Из обрасца 1) сљедује:

$$sin^2 a = 1 - cos^2 a,\ sin\ a = \pm \sqrt{1 - cos^2 a}.$$

Из обрасца 2):

$$tg^2 a = \frac{sin^2 a}{cos^2 a} = \frac{1 - cos^2 a}{cos^2 a},\ tg\ a = \pm \frac{\sqrt{1 - cos^2 a}\cdot}{cos\ a}$$

Из обрасца 3):

$$cotg^2 a = \frac{cos^2 a}{sin^2 a} = \frac{cos^2 a}{1 - cos^2 a},$$

$$cotg\ a = \pm \frac{cos\ a}{\sqrt{1 - cos^2 a}}.$$

3. Нека је позната $tg\ a$.

Из обрасца 6) № 22 сљедује:

$$cotg\ a = \frac{1}{tg\ a}.$$

Из обрасца 2):

$$tg^2a = \frac{sin^2a}{cos^2a} = \frac{sin^2a}{1 - sin^2a}\text{, одакле}$$

$$tg^2a - sin^2a\,tg^2a = sin^2a,$$

$$tg^2a = sin^2a + sin^2a\,tg^2a = sin^2a\,(1 + tg^2a),$$

$$\frac{tg^2a}{1 + tg^2a} = sin^2a,\ sin\,a = \pm\frac{tg\,a}{\sqrt{1 + tg^2a}}.$$

Исто тако:

$$tg^2a = \frac{sin^2a}{cos^2a} = \frac{1 - cos^2a}{cos^2a}\text{ одакле}$$

$$cos^2a\,tg^2a = 1 - cos^2a,\ cos^2a + cos^2a\,tg^2a = 1,$$

$$cos^2a\,(1 + tg^2a) = 1,\ cos^2a = \frac{1}{1 + tg^2a},$$

$$cos\,a = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + tg^2a}}.$$

4. Нека је *cotg a* позната.

Из обрасца 5) № 22 сљедује:

$$tg\,a = \frac{1}{cotg\,a}.$$

Из обрасца 3):

$$cotg^2a = \frac{cos^2a}{sin^2a} = \frac{1 - sin^2a}{sin^2a}\text{, одакле}$$

$$sin^2a\,cotg^2a = 1 - sin^2a,\ sin^2a + sin^2a\,cotg^2a = 1$$

$$sin^2a\,(1 + cotg^2a) = 1,\quad sin\,a = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + cotg^2a}}.$$

Исто тако:

$$cotg^2a = \frac{cos^2a}{sin^2a} = \frac{cos^2a}{1 - cos^2a}\text{, одакле}$$

$$\mathrm{cotg}^2 a - \cos^2 a \,\mathrm{cotg}^2 a = \cos^2 a,$$

$$\mathrm{cotg}^2 a = \cos^2 a + \cos^2 a \,\mathrm{cotg}^2 a = \cos^2 a \,(1 + \mathrm{cotg}^2 a)$$

$$\cos a = \pm \frac{\mathrm{cotg}\, a}{\sqrt{1 + \mathrm{cotg}^2 a}}.$$

Бољег прегледа ради написаћемо нађене резултате укупно као што сљедује:

$\sin a =$	$\cos a =$	$\mathrm{tg}\, a =$	$\mathrm{cotg}\, a =$
$\pm\sqrt{1-\cos^2 a}$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 a}$	$\pm\frac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2 a}}{\sin a}$
$\pm\frac{\mathrm{tg}\, a}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 a}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 a}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}$	$\pm\frac{\cos a}{\sqrt{1-\cos^2 a}}$
$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2 a}}$	$\pm\frac{\mathrm{cotg}\, a}{\sqrt{1+\mathrm{cotg}^2 a}}$	$\frac{1}{\mathrm{cotg}\, a}$	$\frac{1}{\mathrm{tg}\, a}$

24. Као што се из претходеће таблице види, кад је синус или косинус познат, онда остале тригонометријске функције добијају због двогубог знака по две једнаке а неједнако означене вредности. Кад је пак тангента или котангента позната, онда котангента или тангента добија само једну а синус и косинус по две једнаке али противно означене вредности. Та се околност даје овако објаснити.

1. Обрасци помоћу којих се из познатог синуса израчунавају остале тригонометријске функције, морају очевидно дати косинусе, тангенте и котангенте свију оних лукова, којима дати синус припада. Сви ти луци дати су обрасцима

$$2n\pi + \alpha \text{ и } (2n + 1)\,\pi - \alpha,$$

где α значи буди који од тих лукова. Косинуси, тангенте и котангенте лукова прве врсте јесу односно $= \cos \alpha$, $tg\, \alpha$, $cotg\, \alpha$, а они лукова друге врсте $= - \cos \alpha$, $-tg\, \alpha$, $- cotg\, \alpha$, одакле сљедује, да обрасци за израчунавање истих функција из познатог синуса морају дати за сваку од њих по две једнаке али противно означене вредности, што и јесте случај. Но ако је осим синуса дат и један од оних лукова, којима он припада, то ће се према четврти, у којој се лук свршује, лако наћи знаци косинуса, тангенте и котангенте, и те треба у обрасцима узети.

2. Дати косинус припада луцима, који су дати обрасцима

$$2n\pi + \alpha \text{ и } 2n\pi - \alpha,$$

где α значи буди који од тих лукова. Обрасци за израчунавање осталих тригонометријских функција из познатог косинуса, морају дакле дати синусе, тангенте и котангенте свију тих лукова. Но синуси, тангенте и котангенте лукова прве врсте јесу односно $= \sin \alpha$, $tg\, \alpha$, $cotg\, \alpha$ а они лукова друге врсте $= - \sin \alpha$, $- tg\, \alpha$, $- cotg\, \alpha$, одакле се види, да обрасци за израчунавање синуса, тангенте и котангенте из познатог косинуса морају дати за сваку од њих по две једнаке али противно означене вредности, што и јесте случај.

Но ако је осим косинуса познат и један од лукова којима он припада, онда се знаци синуса, тангенте и котангенте према четврти, где се лук завршује, дају лако дознати и њих треба у обрасцима узети.

3. Датој тангенти одговарају луци у обрасцу

$$n\pi + \alpha$$

садржани, где α значи један ма који од лукова, који датој тангенти одговарају. Сви ти луци имају једну котангенту; из чега сљедује, да образац помоћу којег се из познате тангенте израчунава котангента, мора за ову последњу дати само једну вредност што и јесте случај. Синуси пак и косинуси лукова, које даје горњи образац, јесу двојаки; они су односно $= \sin\alpha$, $\cos\alpha$, кад је n парно или $= -\sin\alpha$, $-\cos\alpha$, кад је n непарно; одатле сљедује да обрасци за израчунавање синуса и косинуса из познате тангенте морају за исте функције дати по две једнаке али противно означене вредности, што и јесте случај. Но ако је осим тангенте познат и један од лукова, којима она одговара, онда се према четврти у којој се лук завршује, лако налазе знаци, које морају имати синус и косинус, и те онда ваља у обрасцима узети.

Све што је у 3. казато стоји очевидно, кад се реч тангента свуда измени са котангента и обратно·

Тригонометријске функције неколико особених лукова.

25. У № 8 видилисмо да за полупречник $= 1$ синус једног лука није ништа друго но половина тетива двоструког лука. Помоћу ове примедбе лако је наћи синусе па онда по обрасцима и остале тригонометријске функције лукова $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{10}$.

Тетива двоструких лукова $\frac{2\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{10}$, јесу редом стране уписаног квадрата, шестоугла, троугла и десетоугла и по томе су редом $= \sqrt{2},\ 1,\ \sqrt{3},\ \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, из чега сљедује, да је

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3},\ \sin\frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1);$$

одавде помоћу обрасца $cos\, a = \sqrt{1 - sin^2 a}$ добија се:

$$cos\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},\quad cos\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3},$$

$$cos\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\quad cos\,\frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

а помоћу образаца $tg\, a = \frac{sin\, a}{cos\, a}$ и $cotg\, a = \frac{cos\, a}{sin\, a}$:

$$tg\,\frac{\pi}{4} = 1,\quad tg\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad tg\,\frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

$$tg\,\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}};$$

$$cotg\,\frac{\pi}{4} = 1,\quad cotg\,\frac{\pi}{6} = \sqrt{3},\quad cotg\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$cotg\,\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$$

Задатци.

1. $cos\,\frac{\pi}{5} = cos\, 36^\circ = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5})$; наћи $sin\,\frac{\pi}{5}$, $tg\,\frac{\pi}{5}$ $cotg\,\frac{\pi}{5}$.

2. Изразити функцијама лукова прве четврти: $sin\, 1760^\circ$, $cos\, 396^\circ 48' 2''$, $tg\, 1118^\circ$, $cotg\, 240^\circ$, $sin\,(-1060^\circ)$, $cos\,(-158^\circ 20')$, $tg\,(-237^\circ)$, $cotg\,(-1765^\circ 25' 32'')$.

3. Размера углова двају правилних полигона, од којих један има двапут већи број страна, јесте $\frac{4}{3}$; наћи број страна свакоме полигону.

4. Колики је полупречник круга, кад је лук $\frac{\pi}{4}$ у истоме m пута већи од лука $\frac{\pi}{3}$ у кругу, којег је полупречник $= r$.

5. Ако су s и s_1 синуси двама луцима, којима су c и c_1 косинуси, то је:

$$(s^2 - s^2 s_1^2)\ (c^2 - c^2 c_1^2) = (s_1^2 - s^2 s_1^2)\ (c_1^2 - c^2 c_1^2).$$

6. Ако су s и s_1 косинуси а t и t_1 тангенте двама луцима, то је:

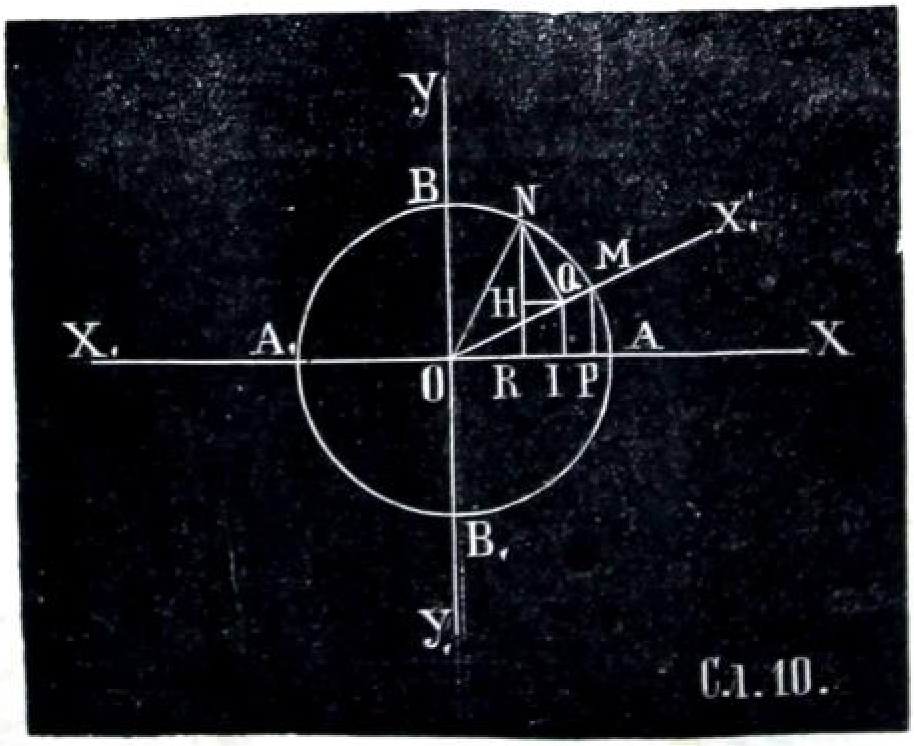
$$\frac{1 - s_1^2}{1 - s^2} = \frac{t_1^2\,(1 + t^2)}{t^2\,(1 + t_1^2)}.$$

7. Дато је тетиво лука $\pi - a$; наћи тригонометријске функције лука a.

8. Ако је d дијагонала једног управног паралелпипеда, α, β, γ угли дијагонале са острицама a, b, c, то је:
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ и $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

Тригонометријске функције збира или разлике двају лукова.

26. *Синус и косинус.* Нека су (сл. 10) $a = AM$ и $b = MN$ два положна лука, којих збир $a + b = AN$ непрелази $\frac{\pi}{2}$; нека је даље за лук MN тачка M почетак и права OX' положна пола апсцисне осе. Повуцимо NQ управно на OX', QH паралелно са X_1X а NR, QJ, MP управно на осу X_1X, па ћемо имати:



Сл. 10.

$$\sin a = MP,\ \cos a = OP,$$

$$\sin b = NQ,\ \cos b = OQ,$$

$$\sin(a+b) = NR = NH + QJ,$$

$$\cos(a+b) = OR = OJ - QH.$$

Из сличних троуглова OMP и OQJ сљедује:

$$\frac{QJ}{OQ} = \frac{MP}{OM} = MP = \sin a,\ \frac{OJ}{OQ} = \frac{OP}{OM} = OP = \cos a,$$

и одатле

$$QJ = OQ \sin a = \sin a \cos b,\ OJ = OQ \cos a = \cos a \cos b.$$

Троугли OMP и NHQ такође су слични, јер стране једног стоје управно на странама другога, и потоме је:

$$\frac{NH}{NQ} = \frac{OP}{OM} = OP = \cos a, \frac{HQ}{NQ} = \frac{MP}{OM} = MP = \sin a;$$

одавде сљедује:

$$NH = NQ \ \cos a = \cos a \ \sin b,$$

$$HQ = NQ \ \sin a = \sin a \ \sin b.$$

Замењујући горе у изразима за $\sin(a+b)$ и $\cos(a+b)$ QJ, NH, OJ, и QH нађеним вредностима добијамо:

1) $\sin(a+b) = \sin a \ \cos b + \cos a \ \sin b$

2) $\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \sin a \ \sin b.$

27. Обрасци 1) и 2) изведени су са претпоставком, да су a и b положни луци, којих збир непрелази $\frac{\pi}{2}$; но ми ћемо доказати да они вреде за ма какво a и b.

1. *Обрасци 1) и 2) вреде за све вредности лукова* a *и* b *између* 0 *и* $\frac{\pi}{2}$.

Пошто смо видли, да то стоји, кад је $a + b \leqq \frac{\pi}{2}$ претпоставимо $a + b > \frac{\pi}{2}$; ако су a' и b' комплементи од a и b, то мора $a' + b' < \frac{\pi}{2}$ бити, због чега је:

$$sin\,(a' + b') = sin\,a'\;cos\,b' + cos\,a'\;sin\,b',$$

$$cos\,(a' + b') = cos\,a'\;cos\,b' - sin\,a'\;sin\,b'.$$

Замењујући у овим једначинама a', b', $a' + b'$ њиховим вредностима $\frac{\pi}{2} - a$, $\frac{\pi}{2} - b$, $\pi - (a + b)$, и узимајући притом на ум прво, да су синуси суплементних лукова (№ 17) једнаки а косинуси једнаки али противно означени, и друго да је синус и косинус лука једнак косинусу и синусу комплемента, добићемо обрасце 1) и 2).

2. *Ако обрасци 1) и 2) вреде за лукове a и b они вреде и онда, кад један од њих са $\frac{\pi}{2}$ порасти.*

Претпостављајући да обрасци 1) и 2) вреде за луке a и b, узмимо да је $a' = a + \frac{\pi}{2}$ и заменимо a са $a' - \frac{\pi}{2}$, па ће изаћи:

$$sin\left(a' + b - \frac{\pi}{2}\right) = sin\left(a' - \frac{\pi}{2}\right) cos\,b$$

$$+ cos\left(a' - \frac{\pi}{2}\right) sin\,b,$$

$$cos\left(a' + b - \frac{\pi}{2}\right) = cos\left(a' - \frac{\pi}{2}\right) cos\,b$$

$$- sin\left(a' - \frac{\pi}{2}\right) sin\,b;$$

но како је за ма какво a:

$$sin\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = - sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = - cos\, a,$$

$$cos\left(a - \frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = sin\, a,$$

то се претходећи обрасци претварају у:

$$cos\,(a' + b) = cos\, a' \; cos\, b - sin\, a' \; sin\, b,$$

$$sin\,(a' + b) = sin\, a' \; cos\, b + cos\, a' \; sin\, b,$$

а то су обрасци 1) и 2), кад се у њима a замени са $a' = \frac{\pi}{2} + a$; дакле је горње тврђење оправдано.

3. Обрасци 1) и 2) вреде за све положне вредности од a и b.

Узимајући да је

$$a = m\,\frac{\pi}{2} + a',\; b = n\,\frac{\pi}{2} + b'$$

где су a' и b' појединце мањи од $\frac{\pi}{2}$, имамо

$$sin\,(a' + b') = sin\, a' \; cos\, b' + cos\, a' \; sin\, b',$$

$$cos\,(a' + b') = cos\, a' \; cos\, b' - sin\, a' \; sin\, b';$$

но услед мало час доказаног ови ће обрасци вредити, кад a' порасте са $m\,\frac{\pi}{2}$ и b' са $n\,\frac{\pi}{2}$; дакле обрасци 1) и 2) вреде за све положне вредности лукова a и b.

4. Обрасци 1) и 2) вреде за ма какве вредности од a и b.

Пошто ово стоји, кад су луци a и b оба положни, претпоставимо сад да су исти, или бар један од њих, одречни и рецимо да је m цео и положан број и толико велики, да су збирови $2m\pi + a = a'$, $2m\pi + b = b'$ положни, па ћемо имати:

$$\sin(a' + b') = \sin a' \cos b' + \cos a' \sin b',$$

$$\cos(a' + b') = \cos a' \cos b' - \sin a' \sin b';$$

замењујући овде a' са $2m\pi + a$ и b' са $2m\pi + b$ и сећајући се да је за ма какво a;

$$\sin(2m\pi + a) = \sin a, \ \cos(2m\pi + a) = \cos a$$

добијамо обрасце 1) и 2).

И тако је сада савршена општост образаца 1) и 2) доказана; но вредно је приметити да исти обрасци један из другог сљедују замењујући у њима a са $\frac{\pi}{2} + a$ или b са $\frac{\pi}{2} + b$.

Ако у обрасцима 1) и 2), који вреде уопште, заменимо b са $-b$, добићемо:

3) $$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

4) $$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

28. Пошто смо изнашли обрасце за синус и косинус збира двају лукова, лако нам је сад изнаћи синус и косинус збира од ма колико лукова, кад су нам синуси и косинуси ових последњих познати. Тако на пример ако у обрасцима 1) и 2) № 26 заменимо b са $b + c$ добијамо:

$$\sin(a + b + c) = \sin(a + b) \cos c + \cos(a + b) \sin c,$$

$$\cos(a + b + c) = \cos(a + b) \cos c - \sin(a + b) \sin c,$$

а одавде замењујући $\sin(a + b)$ и $\cos(a + b)$ са њиховим вредностима по обрасцима 1) и 2) № 26:

$$\sin(a + b + c) = \sin a \cos b \cos c + \sin b \cos a \cos c + \sin c \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin c,$$

$$\cos(a + b + c) = \cos a \cos b \cos c - \cos a \sin b \sin c - \cos b \sin a \sin c - \cos c \sin a \sin b.$$

Исто тако из ових образаца стављајући у њима $c + d$ место c извешћемо обрасце за $\sin(a + b + c + d)$ и $\cos(a + b + c + d)$ итд.

29. Тангенте и *котангенте.* Претпостављајући да су a и b ма каква два положна или одречна лука, имамо;

$$tg\,(a + b) = \frac{\sin(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\sin a\ \cos b + \cos a\ \sin b}{\cos a\ \cos b - \sin a\ \sin b};$$

делећи бројиоца и имениоца овог разломка са $\cos a\ \cos b$ добијамо:

$$5) \qquad tg\,(a + b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a\ tg\,b}.$$

Замењујући овде b са $-b$ добијамо даље:

$$6) \qquad tg\,(a - b) = \frac{tg\,a - tg\,b}{1 + tg\,a\ tg\,b}.$$

На сасвим сличан начин налазе се и обрасци:

$$7) \qquad cotg\,(a + b) = \frac{cotg\,a\ cotg\,b - 1}{cotg\,a + cotg\,b}$$

$$8) \qquad cotg\,(a - b) = \frac{cotg\,a\ cotg\,b + 1}{cotg\,b - cotg\,a}.$$

Полазећи од образаца 5) и 7) лако је наћи тангенту и котангенту збира од ма колико лукова.

Ако на пример у обрасцу 5) заменимо b са $b + c$, добијамо

$$tg\,(a + b + c) = \frac{tg\,(a + b) + tg\,c}{1 - tg\,(a + b)\ tg\,c},$$

или замењујућ $tg\,(a + b)$ са њеном вредности:

$$tg\,(a + b + c) = \frac{tg\,a + tg\,b + tg\,c - tg\,a\ tg\,b\ tg\,c}{1 - tg\,a\ tg\,b - tg\,a\ tg\,c - tg\,b\ tg\,c}.$$

Замењујући у овом обрасцу c са $c + d$ наћићемо исто тако лако образац за $tg\,(a + b + c + d)$ итд.

Примедба. Ако у обрасцу за $tg\,(a + b + c + d)$ означимо са S_1, S_2, S_3, S_4 збирове свеза 1г, 2г, 3г, 4г реда начињених из основака $tg\,a$, $tg\,b$, $tg\,c$, $tg\,d$, то је:

$$tg\,(a + b + c + d) = \frac{S_1 - S_3}{1 - S_2 + S_4}.$$

Уопште ако су a, b, c, ... k, l луци m на броју, а S_1, S_2, S_3 . . . . . збирови свеза 1г, 1г, 3г, . . . реда начињених из основака $tg\,a$, $tg\,b$, $tg\,c$ . . . . . . биће:

$$tg\,(a + b + c + \,.\,.\, + k + l) = \frac{S_1 - S_3 + S_5 - S_7 + \,.\,.\,.\,.}{1 - S_2 + S_4 - S_6 + S_8 - \,.\,.}$$

Читалац се може потрудити, да докаже, да кад овај образац вреди за $(m - 1)$ лукова a, b, c, . . . k, он вреди и за m лукова; треба само у обрасцу за $tg\,(a+b+c\,.\,.\,.+k)$ заменити k са $k + l$. Лако је из нађеног обрасца извести образац у коме је $tg\,ma$ изражена са $tg\,a$.

Узимајући да S_1, S_2, S_3 . . . имају исто значење као мало час имамо:

$$sin\,(a + b + c\,.\,.\,. + k + l) = (S_1 - S_3 + S_5 - \,.\,.\,.) \\ \times cos\,a\ cos\,b\ cos\,c\,.\,.\,.\,cos\,l,$$

$$cos\,(a + b + c + \,.\,.\, + k + l) = (1 - S_2 + S_4 - \,.\,.\,) \\ \times cos\,a\ cos\,b\ cos\,c\,.\,.\,.\,.\,cos\,l;$$

из ових образаца дају се извести обрасци за $sin\,ma$ и $cos\,ma$.

Задатци.

1. Доказати да је:

$$chord^{1} a \; chord\,(\pi - a) = \left[chord\,\frac{\pi}{2} + chord\,(\frac{\pi}{2} - a)\right]$$

$$\times \left[chord\,\frac{\pi}{2} - chord\,(\frac{\pi}{2} - a)\right]$$

2. Доказати обрасце:

$$arc\;sin\,\frac{3}{5} + arc\;sin\,\frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}$$

$$arc\;tg\,\frac{1}{7} + 2\,arc\;tg\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

$$arc\;cotg\,\frac{1}{7} + arc\;tg\,\frac{3}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

3. Наћи лук, којег је косинус једнак тангенти и лук, којег је тангента једнака трогубом синусу.

4. Доказати обрасце:

$$tg^2 a - tg^2 b = \frac{sin\,(a+b)\;\;sin\,(a-b)}{cos^2 a\;\;cos^2 b},$$

$$arc\;sin\,\sqrt{\frac{x}{a+x}} = arc\;tg\,\sqrt{\frac{x}{a}},$$

$$arc\;tg\,\frac{x\;cos\;a}{1 - x\;sin\;a} - arc\;tg\,\frac{x - sin\;a}{cos\;a} = a,$$

$$arc\;sin\;x = arc\;cos\,\sqrt{1-x^2} = arc\;tg\,\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= arc\;cotg\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

---

1) скраћено од chorda (тетиво).

$$arc\,sin\,x \pm arc\,sin\,y = arc\,sin\left[x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right]$$
$$= arc\,cos\left[\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \mp x\,y\right]$$

$$arc\,tg\,x \pm arc\,tg\,y = arc\,tg\,\frac{x \pm y}{1 \mp xy} = arc\,cotg\,\frac{xy \mp 1}{y \pm x},$$

$$arc\,cos\,x \pm arc\,cos\,y = arc\,cos\,[xy \mp \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}]$$
$$= arc\,sin\,[y\sqrt{1-x^2} \pm x\sqrt{1-y^2}]$$

Тригонометријске функције умножених лукова.

30. Ако у обрасцима

$$1)\qquad \begin{cases} sin\,(a+b) = sin\,a\;cos\,b + cos\,a\;sin\,b, \\ cos\,(a+b) = cos\,a\;cos\,b - sin\,a\;sin\,b, \end{cases}$$

метнемо $b = a$ изаћи ће:

$$2)\qquad \begin{cases} sin\,2a = 2\,sin\,a\;cos\,a \\ cos\,2a = cos^2 a - sin^2 a \end{cases}$$

обрасци за израчунавање синуса и косинуса двоструког лука из синуса и косинуса простог лука. Кад се у овим обрасцима замени најпре $cos\,a$ са вредношћу $\pm\sqrt{1-sin^2 a}$ а после $sin\,a$ са вредношћу $\pm\sqrt{1-cos^2 a}$, излази:

$$3)\qquad \begin{cases} sin\,2a = \pm\,2 sin\,a\sqrt{1-sin^2 a} = \\ \qquad\qquad = \pm\,2\,cos a\sqrt{1-cos^2 a}, \\ cos\,2a = 1 - 2 sin^2 a = 2 cos^2 a - 1. \end{cases}$$

Као што се види, кад је $sin\,a$ или $cos\,a$ познат, $cos\,2a$ добија само једну вредност а $sin\,2a$ две једнаке и противно означене. Та се околност даје разјаснити овако:

Датом синусу одговарају сви они луци, који се у обрасцима

$$2n\pi + \alpha \quad \text{и} \quad (2n + 1)\,\pi - \alpha$$

садрже, где је α један ма који од тих лукова. Обрасци, помоћу којих се из познатог синуса израчунавају синус и косинус двоструког лука, морају дакле дати синусе и косинусе свију оних лукова, који се у обрасцима

$$4n\pi + 2\alpha \quad \text{и} \quad 4n\pi + 2\pi - 2\alpha$$

садрже; синуси лукова прве врсте јесу $= sin\, 2\alpha$ а они лукова друге врсте $= - sin\, 2\alpha$; косинуси пак лукова и једне и друге врсте јесу $= cos\, 2\alpha$, одакле сљедује, да обрасци, кад је $sin\, a$ познат, морају дати за $cos\, 2a$ само једну, а за $sin\, 2a$ две једнаке и противно означене вредности. Но ако је осим $sin\, a$ познат и сам лук a, онда је познат и лук $2a$ па дакле и знак његовог синуса, који знак треба у горњем обрасцу узети.

Исто тако датом косинусу одговарају луци, које дају обрасци

$$2n\pi + \alpha \quad \text{и} \quad 2n\pi - \alpha$$

где је α један од оних лукова, којима дати косинус одговара. Обрасци помоћу којих се из познатог косинуса налазе синус и косинус двоструког лука, морају по томе дати синусе и косинусе свију лукова, који се у обрасцима

$$4n\pi + 2\alpha \quad \text{и} \quad 4n\pi - 2\alpha$$

садрже. Косинуси лукова обе врсте јесу, као што се види $= cos\, 2\alpha$, синуси пак јесу $= sin\, 2\alpha$ или $= - sin\, 2\alpha$, како су кад луци прве или друге врсте; по овоме обрасци, кад је $cos\, a$ познат, морају дати за $cos\, 2a$ само једну а за $sin\, 2a$ две једнаке али противно означене вредности. Но ако је осим $cos\, a$ познат и сам лук a, онда је познат и лук $2a$ па дакле и знак његовог синуса.

31. Стављајући у обрасцима 1) $b = 2a$ и замењујући потом $\cos 2a$ и $\sin 2a$ њиховим вредностима из 2) наћићемо:

$$4) \quad \begin{cases} \sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a \\ \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a \end{cases}$$

Као што се види, $\sin 3a$ и $\cos 3a$ јесу рационалне функције први од $\sin a$ а други од $\cos a$; напротив $\sin 3a$ јесте ирационална функција од $\cos a$, а тако исто $\cos 3a$ од $\sin a$. Одатле сљедује, да $\sin 3a$ добија само једну вредност, кад се тражи из $\sin a$, напротив $\cos 3a$ две једнаке и противно означене; исто тако, кад је $\cos a$ познат, па се тражи $\sin 3a$ и $\cos 3a$, последњи добија само једну а $\sin 3a$ две једнаке и противно означене вредности. Да то тако мора бити, доказује се онако као у № 30.

Синуси и косинуси лукова $4a$, $5a$, $6a$ . . . . могли би се такође наћи стављајући у обрасцима 1) $a = 3a, 4a, 5a$... и замењујући потом $\sin 3a$ и $\cos 3a$, $\sin 4a$ и $\cos 4a$, $\sin 5a$ и $\cos 5a$ . . . њиховим узастопце нађеним вредностима. Но тај се посао згодније може свршити помоћу образаца, који ће се у № 32 извести.

32, Узмимо нека су луци $a - b$, a, и $a + b$ три узастопна члана једне аритметичне постепености, којој је дакле b разлика. На основу образаца 1) № 30 је:

$$\sin(a + b) + \sin(a - b) = 2\sin a \cos b,$$
$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos a \cos b,$$

одавде сљедује

$$5) \quad \begin{cases} \sin(a + b) = 2\sin a \cos b - \sin(a - b), \\ \cos(a + b) = 2\cos a \cos b - \cos(a - b). \end{cases}$$

Дакле *синус једног произвољног члана поменуте постепености добија се множећи синус претходећег члана двогубим косинусом разлике и одузимајући од производа синус пред-претходећег члана.*

Исто тако: *косинус једног произвољног члана постепености добија се множећи косинус претходећег члана двогубим косинусом разлике и одузимајући од производа косинус пред-претходећег члана.*

Узмимо аритметичну постепеност

$$o,\ a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ 5a,\ \ldots$$

Тражећи синусе ових лукова по правилу и замењујући $cos^2 a$ са $1 - sin^2 a$ налазимо:

$$sin\,2a = 2sin\,a\ cos\,a.$$

$$sin\,3a = 3sin\,a - 4sin^3 a,$$

$$sin\,4a = (4sin\,a - 8sin^3 a)\ cos\,a,$$

$$sin\,5a = 5sin\,a - 20sin^3 a + 16sin^5 a,$$

. . . .

Тражећи по горњем правилу косинусе налазимо:

$$cos\,2a = 2cos^2 a - 1,$$

$$cos\,3a = 4cos^3 a - 3cos\,a,$$

$$cos\,4a = 8cos^4 a - 8cos^3 a + 1,$$

$$cos\,5a = 16cos^5 a - 20cos^3 a + 5cos\,a$$

. . . .

33. Ако се у обрасцима

$$6)\qquad tg\,(a + b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a\ tg\,b},$$

$$7)\qquad cotg\,(a + b) = \frac{cotg\,a\ cotg\,b - 1}{cotg\,a + cotg\,b}$$

стави $b = a$, изаћиће:

$$8) \qquad tg\,2a = \frac{2tg\,a}{1 - tg^2a},$$

$$9) \qquad cotg\,2a = \frac{cotg^2a - 1}{2cotg\,a}$$

обрасци за израчунавање тангенте и котангенте двоструког лука из тангенте и котангенте простог лука.

Исто тако лако могли би наћи тангенте и котангенте лукова $3a$, $4a$, $5a$, ... стављајући у образцима 6) и 7) редом $b = 2a$, $3a$, $4a$ . . . . и замењујући притом $tg\,2a$, $tg\,3a$, ... , $cotg\,2a$, $cotg\,3a$, ... њиним узастопце нађеним вредностима. Тако на пример кад у 6) метнемо $b = 2a$ добијамо

$$tg\,3a = \frac{tg\,a + tg\,2a}{1 - tg\,a\ tg\,2a},$$

и одавде замењујући $tg\,2a$ њеном вредности

$$tg\,3a = \frac{3tg\,a - tg^3a}{1 - 3tg^2a}.$$

Тригонометријске функције разломљених лукова.

34. Ако у обрасцима

$$cos\,2a = 1 - 2sin^2a,$$

$$cos\,2a = 2cos^2a - 1$$

узмимо $\frac{1}{2}a$ место a добијамо:

$$1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} cos\,a = 1 - 2sin^2\frac{1}{2}a, \\ cos\,a = 2cos^2\frac{1}{2}a - 1; \end{array} \right.$$

из ових образаца сљедује:

$$2)\quad \begin{cases} sin\,\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1-cos\,a}{2}}, \\ cos\,\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1+cos\,a}{2}}. \end{cases}$$

Дакле кад је $cos\,a$ познат, $sin\,\frac{1}{2}\,a$ и $cos\,\frac{1}{2}\,a$ добијају по две једнаке а противно означене вредности, што се овако објашњава:

Ако је α један од оних лукова, којима дани косинус припада, то све те луке дају очевидно обрасци

$$2n\pi + \alpha \quad \text{и} \quad 2n\pi - \alpha,$$

где n може бити ма какав цео положан или одречан број па и нула. Обрасци за израчунавање синуса и косинуса полулука из познатог косинуса целог лука морају дакле дати синусе и косинусе свију лукова, који се у обрасцима

$$n\pi + \frac{1}{2}\alpha \quad \text{и} \quad n\pi - \frac{1}{2}\alpha$$

садрже; но синуси лукова прве врсте јесу $= \pm\, sin\,\frac{1}{2}\,\alpha$, а они лукова друге врсте $= \mp\, sin\,\frac{1}{2}\,\alpha$, где горњи знаци вреде за n парно а доњи за n непарно. Исто су тако косинуси лукова и прве и друге врсте $= \pm\, cos\frac{1}{2}\,\alpha$, где горњи знак вреди за n парно а доњи за n непарно. Види се дакле да обрасци, кад је $cos\,a$ познат, морају дати за $sin\frac{1}{2}\,a$ и $cos\,\frac{1}{2}\,a$ по две једнаке и противно означене вредности а у исти мах и зашто.

Но ако је осим $\cos a$ познат и сам лук a, то је онда познат и лук $\frac{1}{2}a$, па дакле и знак његовог синуса а тако исто и косинуса. На пример кад је лук a мањи од π, лук $\frac{1}{2}a$ мањи је од $\frac{\pi}{2}$ и зато $\sin\frac{1}{2}a$ и $\cos\frac{1}{2}a$ морају бити положни.

35. Ако је место $\cos a$ познат $\sin a$, па се тражи $\sin\frac{1}{2}a$ и $\cos\frac{1}{2}a$, то треба у обрасцима 2) заменити $\cos a$ са његовом вредности $\pm\sqrt{1-\sin^2 a}$, па ће изаћи:

$$3)\quad\left\{\begin{aligned} \sin\frac{1}{2}a &= \pm\sqrt{\frac{1\mp\sqrt{1-\sin^2 a}}{2}}, \\ \cos\frac{1}{2}a &= \pm\sqrt{\frac{1\pm\sqrt{1-\sin^2 a}}{2}}. \end{aligned}\right.$$

Ове за $\sin\frac{1}{2}a$ и $\cos\frac{1}{2}a$ нађене вредности могле би се по познатом из алгебре обрасцу

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

разложити, но до истих резултата долази се и другим путем. Узмимо у обрасцима

$$2\sin a\,\cos a = \sin 2a$$
$$\sin^2 a+\cos^2 a=1$$

$\frac{1}{2}a$ место a, па ћемо добити:

$$2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a=\sin a,$$

$$\sin^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}a=1;$$

сабирањем и одузимањем ових образаца налазимо:

$$\left(sin\frac{1}{2}a + cos\frac{1}{2}a\right)^2 = 1 + sin\,a$$

$$\left(sin\frac{1}{2}a - cos\frac{1}{2}a\right)^2 = 1 - sin\,a\,;$$

из ових налазимо даље

$$sin\frac{1}{2}a + cos\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{1+sin\,a}$$

$$sin\frac{1}{2}a - cos\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{1-sin\,a}$$

и најзад из ових:

$$4)\quad \begin{cases} sin\frac{1}{2}a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+sin\,a} \pm\frac{1}{2}\sqrt{1-sin\,a} \\ cos\frac{1}{2}a = \pm\frac{1}{2}\sqrt{1+sin\,a} \mp\frac{1}{2}\sqrt{1-sin\,a}, \end{cases}$$

обрасце за израчунавање синуса и косинуса полу-лука из познатог синуса целог лука.

Из самог извођења ових образаца сљедује, да знаци првог корена у сваком од њих независе од знакова другог корена; исти обрасци дају због тога по четири вредности, од којих су две и две једнаке и противно означене, како за $sin\frac{1}{2}a$ тако и за $cos\frac{1}{2}a$; осим тога вредности за $sin\frac{1}{2}a$ исте су са вредностима за $cos\frac{1}{2}a$. Зашто је све то тако, овако се објашњава:

Дати синус припада свима луцима, који се добијају из образаца

$$2n\pi + \alpha \quad \text{и} \quad (2n + 1)\pi - \alpha,$$

где је α један ма који од лукова, којима дати синус припада. Обрасци помоћу којих се из познатог синуса добијају синус и косинус полулука морају по томе дати синусе и косинусе свију лукова, који се добијају из образаца

$$n\pi + \frac{1}{2}\alpha \quad \text{и} \quad n\pi + \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha;$$

синуси лукова прве врсте јесу $= \pm \sin\frac{1}{2}\alpha$ а они лукова друге врсте $= \pm \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha\right) = \pm \cos\frac{1}{2}\alpha$, где горњи знаци вреде за n парно, а доњи за n непарно; исто су тако косинуси лукова прве врсте $= \pm \cos\frac{1}{2}\alpha$ а они лукова друге врсте $= \pm \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\alpha\right) = \pm \sin\frac{1}{2}\alpha$, где опет горњи знаци вреде за n парно а доњи за n непарно. Види се дакле да $\sin\frac{1}{2}a$ и $\cos\frac{1}{2}a$, добијају сваки четири вредности $\pm \sin\frac{1}{2}\alpha$, $\pm \cos\frac{1}{2}\alpha$.

Но ако је осим $\sin a$ познат и сам лук a, то је онда познат и лук $\frac{1}{2}a$, па дакле и знак његовог синуса и косинуса; осим тога лако је тада дознати да ли је већи $\sin\frac{1}{2}a$ или $\cos\frac{1}{2}a$ и према томе лако је одредити знак, који у обрасцима 4) код сваког од два корена треба узети, па да изађу вредности за $sin\frac{1}{2}a$ и $cos\frac{1}{2}a$.

36. Ако у обрасцу

$$tg\,2a = \frac{2tg\,a}{1 - tg^2a}$$

заменимо a са $\frac{1}{2}$ а добијамо.

$$tg\,a = \frac{2tg\frac{1}{2}a}{1 - tg^2\frac{1}{2}a},$$

а одавде једначину другог степена:

$$5) \qquad tg^2\frac{1}{2}a + \frac{2}{tg\,a}\,tg\frac{1}{2}a - 1 = 0,$$

која разрешена даје:

$$6) \qquad tg\frac{1}{2}a = -\frac{1}{tg\,a} \pm \frac{1}{tg\,a}\sqrt{1 + tg^2a}.$$

Зашто тангента лука $\frac{1}{2}a$ добија две вредности опет је лако дознати.

Датој тангенти одговарају сви у обрасцу

$$n\pi + \alpha$$

садржани луци, где је α један ма који од лукова, који одговарају датој тангенти. Образац 6) треба дакле да да тангенте свију лукова, који се у обрасцу

$$n\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\alpha$$

садрже; но тангенте тих лукова јесу $= tg\frac{1}{2}\alpha$ или пак $= tg\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\alpha\right) = -cotg\frac{1}{2}\alpha$, како је кад n парно или не. Као што се види $tg\frac{1}{2}a$ има две вредности $tg\frac{1}{2}\alpha$ и $-cotg\frac{1}{2}\alpha$, којих је производ $= -1$, што се у осталом и из једначине 5) могло закључити. Но кад је осим $tg\,a$ познат и сам лук a, онда је познат и лук $\frac{1}{2}a$, па дакле и знак његове тангенте и потоме је лако дознати, који је од два корена једначине 5) вредност за $tg\frac{1}{2}a$.

37. За $tg\frac{1}{2}a$ могу се добити још и други обрасци, који се често употребљују. Они се из досад нађених изводе овако:

$$tg\frac{1}{2}a = \frac{sin\frac{1}{2}a}{cos\frac{1}{2}a} = \frac{2sin\frac{1}{2}a\,cos\frac{1}{2}a}{2cos^2\frac{1}{2}a} = \frac{2sin^2\frac{1}{2}a}{2sin\frac{1}{2}a\,cos\frac{1}{2}a}$$

одавде служећи се познатим обрасцима добија се:

$$7)\qquad tg\frac{1}{2}a = \frac{sin\,a}{1+cos\,a}$$

$$8)\qquad tg\frac{1}{2}a = \frac{1-cos\,a}{sin\,a}.$$

Замењујући у једном или другом од ових образаца $sin\,a$ његовом вредношћу $\pm\sqrt{1-cos^2 a}$ добија се даље

9) $$tg\,\frac{1}{2}a = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\,a}{1 + cos\,a}}.$$

38. Замењујући у обрасцу

$$sin\,3a = 3sin\,a - 4sin^3a$$

a са $\frac{1}{3}a$ добијамо

$$sin\,a = 3sin\,\frac{1}{3}a - 4\,sin^3\frac{1}{3}a$$

и одавде

10) $$sin^3\frac{1}{3}a - \frac{3}{4}sin\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}sin\,a = 0,$$

једначину трећег степена, коју би требало решити, да би се добила вредност за $sin\,\frac{1}{3}a$. Неулазећи у појединости разрешења, које су посао алгебре, задовољићемо се тиме, што ћемо показати, да су корени једначине 10) стварни.

Ако узмемо да је α један од оних лукова, који даном синусу одговарају, то се сви ти луци добијају из образаца

$$2n\pi + \alpha \quad \text{и} \quad (2n + 1)\,\pi - \alpha;$$

једначина 10) мора потоме дати синусе свију лукова, који се из образаца

$$\frac{1}{3}(2n\pi + \alpha) \text{ и } \frac{1}{3}\left[(2n + 1)\,\pi - \alpha\right]$$

добијају, дакле корени једначине 10) морају се садржати у обрасцима

$$sin\frac{1}{3}a = sin\frac{1}{3}\,(2n\pi + \alpha) \text{ и}$$

$$sin\,\frac{1}{3}a = sin\,\frac{1}{3}\left[(2n + 1)\,\pi - \alpha\right]$$

Цео број n мора бити једног од ова три облика:

$$3m,\ 3m + 1,\ 3m + 2,$$

где m значи такође цео број; узимајући сад у претходећим обрасцима редом $n = 3m$, $n = 3m + 1$ и $n = 3m + 2$ добијамо из првог

$$sin\frac{1}{3}a = sin\,\frac{1}{3}(6m\pi+\alpha) = sin\,(2m\pi + \frac{1}{3}\alpha) = sin\frac{1}{3}\alpha;$$

$$sin\frac{1}{3}a = sin\frac{1}{3}\left[(6m+2)\,\pi + \alpha\right]$$

$$= sin\,(2m\pi + \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha)$$

$$= sin\left(\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha\right) = sin\left(\pi - \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha\right)$$

$$= sin\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha\right);$$

$$sin\frac{1}{3}a = sin\frac{1}{3}\left[(6m+4)\,\pi + \alpha\right]$$

$$= sin\left[(2m+1)\,\pi + \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha\right]$$

$$= -\,sin\left(\frac{1}{3}\pi + \frac{1}{3}\alpha\right);$$

из другог

$$sin\frac{1}{3}a = sin\frac{1}{3}\left[(6m+1)\,\pi - \alpha\right]$$

$$= sin\,(2m\pi + \frac{1}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha) = sin\left(\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{3}\alpha\right);$$

$$\sin\frac{1}{3}\,a = \sin\frac{1}{3}\,[(6m+3)\,\pi - \alpha]$$

$$= \sin\,[(2m+1)\,\pi - \frac{1}{3}\,\alpha] = \sin\frac{1}{3}\,\alpha;$$

$$\sin\frac{1}{3}\,a = \sin\frac{1}{3}\,[(6m+5)\,\pi - \alpha]$$

$$= \sin\,[(2m+1)\,\pi + \frac{2}{3}\,\pi - \frac{1}{3}\,\alpha]$$

$$= -\sin\left(\frac{2}{3}\,\pi - \frac{1}{3}\,\alpha\right) = -\sin\left(\frac{1}{3}\,\pi + \frac{1}{3}\,\alpha\right).$$

Дакле једначина 10) има само три и то стварна корена:

$$\sin\frac{1}{3}\,\alpha,\ \sin\left(\frac{1}{3}\,\pi - \frac{1}{3}\,\alpha\right),\ -\sin\left(\frac{1}{3}\,\pi + \frac{1}{3}\,\alpha\right)$$

и то су вредности, које $\sin\frac{1}{3}\,a$ добија, кад је познат $\sin a$.

На сличан начин могу се наћи и претресати једначине, од којих зависе $\cos\frac{1}{3}\,a$, $tg\,\frac{1}{3}\,a$ и $cotg\,\frac{1}{3}\,a$ кад су познати $\cos a$, $tg\,a$, $cotg\,a$.

Обрасци за претварање збирова и разлика у производе.

39. Из образаца

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b,\\
\cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b,\\
\sin(a-b) &= \sin a\cos b - \cos a\sin b,\\
\cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b,
\end{aligned}$$

сљедује

$$1)\quad \begin{cases} \sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin a\cos b, \\ \sin(a+b)-\sin(a-b) = 2\cos a\sin b, \\ \cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos a\cos b, \\ \cos(a+b)-\cos(a-b) = -2\sin a\sin b. \end{cases}$$

Кад се у овим обрасцима стави

$$a+b=p,\quad a-b=q$$

дакле

$$a=\frac{1}{2}(p+q),\ b=\frac{1}{2}(p-q)$$

излази:

$$2)\quad \begin{cases} \sin p+\sin q = 2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q), \\ \sin p-\sin q = 2\cos\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q), \\ \cos p+\cos q = 2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q), \\ \cos p-\cos q = -2\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q), \\ \qquad\qquad\quad = 2\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(q-p). \end{cases}$$

Збир или разлика једног синуса и једног косинуса може се такође претставити као производ, јер

$$\cos p \pm \sin q = \sin\left(\frac{\pi}{2}-p\right) \pm \sin q$$

одакле помоћу образаца 2):

$$3)\quad \begin{cases} \cos p+\sin q = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p+q}{2}\right), \\ \cos p-\sin q = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{p-q}{2}\right). \end{cases}$$

Делећи обрасце 2) два и два налазимо:

$$4)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} &= \frac{tg\,\frac{1}{2}(p+q)}{tg\,\frac{1}{2}(p-q)},\\
\frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} &= tg\,\tfrac{1}{2}(p+q),\\
\frac{\sin p + \sin q}{\cos p - \cos q} &= cotg\,\tfrac{1}{2}(q-p),\\
\frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} &= tg\,\tfrac{1}{2}(p-q),\\
\frac{\sin p - \sin q}{\cos p - \cos q} &= -\,cotg\,\tfrac{1}{2}(p+q).\\
\frac{\cos p + \cos q}{\cos p - \cos q} &= cotg\,\tfrac{1}{2}(p+q)\,cotg\,\tfrac{1}{2}(q-p).
\end{aligned}\right.$$

Збир или разлика двеју тангената или котангената може се такође претставити као производ. Тако је:

$$tg\,a \pm tg\,b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b \pm \cos a \sin b}{\cos a \cos b},$$

или

$$5)\qquad tg\,a \pm tg\,b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \cos b};$$

на исти начин добија се

$$6)\qquad cotg\,a \pm cotg\,b = \frac{\sin(b \pm a)}{\sin a \sin b},$$

$$7)\qquad cotg\,a \pm tg\,b = \frac{\cos(a \mp b)}{\sin a \cos b}.$$

К' обрасцима ове № додаћемо још неколико, које је вредно имати, и који се врло лако добијају. Тако је:

$$1 + \sin a = \sin \frac{\pi}{2} + \sin a$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$$

$$1 - \sin a = \sin \frac{\pi}{2} - \sin a$$

$$= 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)$$

или

$$8) \begin{cases} 1 + \sin a = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right), \\ 1 - \sin a = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right). \end{cases}$$

Деобом ових једначина добија се, пошто се после тога извуче корен квадратни,

$$9) \sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}} = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) = cotg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right).$$

Множењем једначина

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$$

добија се

$$\begin{aligned} \sin(a+b)\sin(a-b) &= \sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b, \\ &= (1-\sin^2 b)\sin^2 a - (1-\sin^2 a)\sin^2 b, \\ &= (1-\cos^2 a)\cos^2 b - (1-\cos^2 b)\cos^2 a, \end{aligned}$$

или

$$10) \quad \begin{aligned} \sin(a + b)\sin(a - b) &= \sin^2 a - \sin^2 b, \\ &= \cos^2 b - \cos^2 a. \end{aligned}$$

40. Кад се у другом од образаца 2) № 39 стави најпре $p = a - b + c$, $q = a - b - c$, затим $p = a + b + c$, $q = a + b - c$, од прве на тај начин добивене једначине друга одузме и резултат по обрасцима 2) № 39 сведе, излази:

$$11)\ \sin(b+c-a) + \sin(a+b-c) + \sin(a+c-b) - \sin(a+b+c) = 4 \sin a \sin b \sin c.$$

Кад се даље у првом од образаца 2) № 39 стави најпре $p = a + b + c$, $q = a - b + c$, после $p = a + b - c$, $q = a - b - c$, на тај начин добивене једначине саберу и резултат помоћу образаца 2) № 39 сведе, добија се

$$12)\ \sin(a+b+c) + \sin(a+b-c) + \sin(a+c-b) - \sin(b+c-a) = 4 \sin a \cos b \cos c.$$

Кад се најзад у трећем од образаца 2) № 39 стави најпре $p = a + b + c$, $q = a - b + c$, а затим $p = a + b - c$, $q = a - b - c$, новодобивене једначине саберу и резултат по № 39 сведе, излази:

$$13)\ \cos(a+b+c) + \cos(a+b-c) + \cos(a+c-b) + \cos(b+c-a) = 4 \cos a \cos b \cos c.$$

Ако се у обрасцима 11), 12) и 13) стави:

$$\begin{cases} a + b - c = x, \\ a + c - b = y, \\ b + c - a = z, \end{cases} \quad \text{дакле} \quad \begin{cases} a + b + c = x + y + z \\ a = \frac{1}{2}(x + y) \\ b = \frac{1}{2}(x + z) \\ c = \frac{1}{2}(y + z) \end{cases}$$

добијају се следећи обрасци:

14) $$\sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$$
$$= 4 \sin \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x+z) \sin \frac{1}{2}(y+z).$$

15) $$\sin x + \sin y - \sin z + \sin(x+y+z)$$
$$= 4 \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x+z) \cos \frac{1}{2}(y+z).$$

16) $$\cos x + \cos y + \cos z + \cos(x+y+z)$$
$$= 4 \cos \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x+z) \cos \frac{1}{2}(y+z).$$

Из обрасца 15), кад се у њему x, y, z, замене са $\frac{\pi}{2} - x, \frac{\pi}{2} - y, \frac{\pi}{2} - z$, постаје образац:

17) $$\cos x + \cos y - \cos z - \cos(x+y+z) =$$
$$= 4 \cos \frac{1}{2}(x+y) \sin \frac{1}{2}(x+z) \sin \frac{1}{2}(y+z).$$

Ако се у четвртом обрасцу под 2) № 39 стави најпре $p = y + z$, $q = x$ а после $p = y - z$, $q = x$, кад се затим добивене две једначине помноже и резултат сведе, излази образац:

18) $$1 - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z + 2 \cos x \cos y \cos z$$
$$= 4 \sin \frac{1}{2}(x+y+z) \sin \frac{1}{2}(x+y-z)$$
$$\times \sin \frac{1}{2}(x+z-y) \sin \frac{1}{2}(y+z-x).$$

Помоћу истих замена и на сличан начин добија се из трећег обрасца под 2) № 39:

$$19)\ 1 - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z - 2\cos x \cos y \cos z$$
$$= -4\cos\frac{1}{2}(x + y + z)\cos\frac{1}{2}(x + y - z)$$
$$\times \cos\frac{1}{2}(x + z - y)\cos\frac{1}{2}(y + z -- x)$$

Помоћу истих замена и на сличан начин добијају се још из првог и другог обрасца под 2) № 39 следећа два обрасца:

$$20)\ 1 - \cos^2 x - \cos^2 y + \cos^2 z + 2\sin x \sin y \cos z$$
$$= 4\sin\frac{1}{2}(x + y + z)\sin\frac{1}{2}(x + y - z)$$
$$\times \cos\frac{1}{2}(x + z - y)\cos\frac{1}{2}(y + z - x),$$

$$21)\ 1 - \cos^2 x - \cos^2 y + \cos^2 z - 2\sin x \sin y \cos z$$
$$= -4\cos\frac{1}{2}(x + y + z)\cos\frac{1}{2}(x + y - z)$$
$$\times \sin\frac{1}{2}(x + z - y)\sin\frac{1}{2}(y + z - x)$$

Осим нађених образаца изветћемо још два такође ин-
ересантна обрасца.

$$tg\,x + tg\,y + tg\,z = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} + \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$= \frac{\sin x \cos y \cos z + \sin y \cos x \cos z + \sin z \cos x \cos y}{\cos x \cos y \cos z}$$

$$= \frac{\sin(x+y)\cos z + \cos x \cos y \sin z - \sin x \sin y \sin z + \sin x \sin y \sin z}{\cos x \cos y \cos z},$$

$$= \frac{\sin(x+y)\cos z + \cos(x+y)\sin z + \sin x \sin y \sin z}{\cos x \cos y \cos z},$$

$$= \frac{\sin(x+y+z) + \sin x \sin y \sin z}{\cos x \cos y \cos z},$$

Дакле:

$$22)\quad tg x + tg y + tg z = tg x\, tg y\, tg z + \frac{\sin(x+y+z)}{\cos x \cos y \cos z}$$

На исти начин добија се и образац:

$$23)\quad cotg x + cotg y + cotg z = cotg x\, cotg y\, cotg z - \frac{\cos(x+y+z}{\sin x \sin y \sin z}$$

41. *Збир синуса и косинуса лукова, кад су исти узастопни чланови једне аритметичне постепености.*

Нека су.

$$a, a+b, a+2b, a+3b \ldots\ldots, a+mb$$

$m+1$ лукова. По четвртом обрасцу под 2) № 39 имамо:

$$\cos[a+(m-1)b] - \cos[a+(m+1)b] = 2\sin b \sin(a+mb$$

Ако у овом обрасцу ставимо узастопце:

$$m = 0, 1, 2, 3 \ldots\ldots (m-1), m$$

добићемо:

$$\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin b \sin a,$$

$$\cos a - \cos(a+2b) = 2 \sin b \sin(a+b),$$

$$\cos(a+b) - \cos(a+3b) = 2\sin b \sin(a+2b),$$

$$\cos(a+2b) - \cos(a+4b) = 2\sin b \sin(a+3b)$$

. . . .

$$\cos[a+(m-2)b] - \cos(a+mb) = 2\sin b \sin[a+(m-1)$$

$$\cos[a+(m-1)b] - \cos[a+(m+1)b] = 2\sin b \sin(a+m$$

Сабирајући ове једначине и сводећи потом [2) № 39 и 2) № 30] наћићемо:

$$24)\quad sin a + sin(a+b) + sin(a+2b) + \ldots\ldots + sin(a+mb) = \frac{sin\frac{(m+1)b}{2}\, sin\left(a+\frac{mb}{2}\right)}{sin\frac{b}{2}}$$

Замењујући у овом обрасцу а са $\frac{\pi}{2} - a$ и b са $-b$ наћићемо даље:

$$25)\quad cos a + cos(a+b) + cos(a+2b) + \ldots\ldots + cos(a+mb) = \frac{sin\frac{(m+1)b}{2}\, cos\left(a+\frac{mb}{2}\right)}{sin\frac{b}{2}}$$

Из образаца 24) и 25), кад у њима метнемо $b = a$ добијамо још следећа два обрасца:

$$26)\quad sin\, a + sin\, 2\, a + sin\, 3\, a + \ldots\ldots + sin\,(m+1)\, a = \frac{sin\frac{(m+1)a}{2}\, sin\frac{(m+2)a}{2}}{sin\frac{a}{2}},$$

$$27)\quad cos\, a + cos\, 2\, a + cos\, 3\, a + \ldots\ldots + cos\,(m+1)\, a = \frac{sin\frac{(m+1)\, a}{2}\, cos\frac{(m+2)\, a}{2}}{sin\frac{a}{2}}.$$

Задатци.

Извести следеће обрасце:

1° $\sin a = 2 \cos^2 \frac{1}{2} a \, tg \frac{1}{2} a = (1 + \cos a) \, tg \frac{1}{2} a;$

2° $\sin a = 2 \sin^2 \frac{1}{2} a \, cotg \frac{1}{2} a = (1 - \cos a) \, cotg \frac{1}{2} a;$

3° $$\sin a = \frac{2 \, tg \frac{1}{2} a}{1 + tg^2 \frac{1}{2} a} = \frac{2 \, cotg \frac{1}{2} a}{1 + cotg^2 \frac{1}{2} a};$$

4° $\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right) = (1 + \sin a);$

5° $\sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right) + \sin \left(\frac{\pi}{4} - a \right) = \cos a \sqrt{2};$

6° $\sin \left(\frac{\pi}{4} + a \right) - \sin \left(\frac{\pi}{4} - a \right) = \sin a \sqrt{2};$

7° $\sin \frac{1}{2} (a + b) \sin \frac{1}{2} (a - b) = \frac{1}{2} (\cos b - \cos a)$

8° $$\frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{a}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{a}{2} \right)} = tg \left(\frac{\pi}{4} \pm \frac{a}{2} \right);$$

9° $$\frac{\sin (a + b)}{\sin (a - b)} = \frac{tg \, a + tg \, b}{tg \, a - tg \, b} = \frac{\sin 2 a + \sin 2 b}{\sin 2 (a - b)}$$
$$= \frac{\sin 2 (a + b)}{\sin 2 a - \sin 2 b};$$

10° $$\frac{\sin (a + b)}{\sin a + \sin b} = \frac{\cos \frac{1}{2} (a + b)}{\cos \frac{1}{2} (a - b)}$$

11°
$$\frac{\sin(a+b)}{\sin a - \sin b} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b);}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}$$

12°
$$\cos a = \frac{1 - tg^2\frac{1}{2}a}{1 + tg^2\frac{1}{2}a} = \frac{cotg^2\frac{1}{2}a - 1}{cotg^2\frac{1}{2}a + 1},$$

13°
$$\cos a = \frac{cotg\frac{1}{2}a - tg\frac{1}{2}a}{cotg\frac{1}{2}a + tg\frac{1}{2}a};$$

14°
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \sin a);$$

15°
$$\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b) = \frac{1}{2}(\cos a + \cos b)$$

16°
$$\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)} = \frac{1 - tg\,a\;tg\,b}{1 + tg\,a\;tg\,b} = \frac{\sin 2(a+b)}{\sin 2a + \sin 2b}$$

17°
$$\sin a + \cos a = \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)\sqrt{2}$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)\sqrt{2};$$

18°
$$\cos a - \sin a = \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)\sqrt{2}$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)\sqrt{2};$$

19°
$$\frac{1}{\sin a} + \frac{1}{\cos a} = \frac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{\sin 2a}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\sin 2a};$$

20°
$$\frac{1}{\sin a} - \frac{1}{\cos a} = \frac{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{\sin 2a}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + a\right)}{\sin 2a};$$

21°
$$\sin\frac{1}{2}(a \pm b)\cos\frac{1}{2}(a \mp b) = \frac{1}{2}(\sin a \pm \sin b);$$

22°
$$\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)} = \frac{tg\frac{1}{2}a + tg\frac{1}{2}b}{1 + tg\frac{1}{2}a\, tg\frac{1}{2}b}$$
$$= \frac{\sin(a+b)}{\cos a + \cos b};$$

23°
$$\cos(a-b) \pm \sin(a+b) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm a\right)$$
$$\times \cos\left(\frac{\pi}{4} \mp b\right);$$

24°
$$\cos(a+b) \pm \sin(a-b) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm a\right)$$
$$\times \cos\left(\frac{\pi}{4} \pm b\right);$$

25° $$tg\left(\frac{\pi}{4} \pm a\right) = cotg\left(\frac{\pi}{4} \mp a\right) = \frac{1 \pm tg\ a}{1 \mp tg\ a}$$

$$= \frac{cotg\ a \pm 1}{cotg\ a \mp 1};$$

26° $$1 \pm tg\ a = \frac{sin\left(\frac{\pi}{4} \pm a\right)\sqrt{2}}{cos\ a}$$

$$= \frac{cos\left(\frac{\pi}{4} \mp a\right)\sqrt{2}}{cos\ a};$$

27° $$tg\left(\frac{\pi}{4} + a\right) + tg\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = \frac{2}{cos\ 2\ a};$$

28° $$tg\left(\frac{\pi}{4} + a\right) - tg\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 2\ tg\ 2\ a;$$

29° $$tg\ a\ cotg\ b \pm 1 = \frac{sin\ (a \pm b)}{cos\ a\ sin\ b};$$

30° $$cotg^2 a - tg^2 b = \frac{cos\ (a+b)\ cos\ (a-b)}{sin^2 a\ cos^2 b};$$

31° $$1 - tg^2 a\ tg^2 b = \frac{cos\ (a+b)\ cos\ (a-b)}{cos^2 a\ cos^2 b};$$

32° $$cotg^2 a\ cotg^2 b - 1 = \frac{cos\ (a+b)\ cos\ (a-b)}{sin^2 a\ sin^2 b};$$

33° $$1 - cotg^2 a\ tg^2 b = \frac{sin\ (a+b)\ sin\ (a-b)}{sin^2 a\ cos^2 b};$$

34° $$cos\ (a+b)\ cos\ (a-b) = cos^2 a + cos^2 b - 1;$$

35° $$\frac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b - 1}{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b + 1} = \frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)};$$

36° $$\frac{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)};$$

37° $$\frac{1 + \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b} = \frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)};$$

38° $$\frac{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 b}{\operatorname{cotg}^2 b - \operatorname{tg}^2 a} = \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 b;$$

39° $$\frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b} = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)};$$

40° $$\frac{\operatorname{cotg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{cotg} b} = \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b;$$

41° $$\frac{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b}{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b} = \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b;$$

42° $$\frac{\operatorname{tg} b \pm \operatorname{tg} a}{\operatorname{cotg} a \pm \operatorname{cotg} b} = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b;$$

43° $$\frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{\operatorname{cotg} a \mp \operatorname{tg} b} = \operatorname{tg} a \operatorname{tg}(a \pm b);$$

44° $$\frac{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b}{\operatorname{cotg} b - \operatorname{tg} a} = \operatorname{cotg} a \operatorname{tg}(a+b);$$

45° $$\frac{\operatorname{cotg} b - \operatorname{cotg} a}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b} = \operatorname{cotg} b \operatorname{tg}(a-b);$$

46° $$\operatorname{tg}(a+b) \operatorname{tg}(a-b) = \frac{\sin^2 a - \sin^2 b}{\cos^2 a - \sin^2 b}$$

$$= \frac{\cos 2b - \cos 2a}{\cos 2b + \cos 2a},$$

47° $$tg\,a\;tg\,b = \frac{cos\,(a-b) - cos\,(a+b)}{cos\,(a-b) + cos\,(a+b)};$$

48° $$tg\,\frac{1}{2}\,(a+b) + tg\,\frac{1}{2}\,(a-b) = \frac{2\,sin\,a}{cos\,a + cos\,b}$$

49° $$tg\,\frac{1}{2}\,(a+b) - tg\,\frac{1}{2}\,(a-b) = \frac{2\,sin\,b}{cos\,a + cos\,b}$$

50° $$arc\;tg\,a = \frac{1}{2}\,arc\;tg\,\frac{2\,a}{1-a^2};$$

51° $$arc\;cotg\,a = \frac{1}{2}\,arc\;cotg\,\frac{a^2-1}{2\,a}$$

Претпостављајући да је $a + b + c = \pi$ извести следеће обрасце:

52° $$sin\,a + sin\,b + sin\,c = 4\,cos\,\frac{1}{2}\,a\,cos\frac{1}{2}\,b\,cos\frac{1}{2}\,c;$$

53° $$sin\,a + sin\,b - sin\,c = 4\,sin\,\frac{1}{2}\,a\,sin\frac{1}{2}\,b\,cos\frac{1}{2}\,c$$

54° $$cos\,a + cos\,b + cos\,c = 1 + 4\,sin\,\frac{1}{2}a\,sin\frac{1}{2}b\,sin\,\frac{1}{2}\,c:$$

55° $$cos\,a + cos\,b - cos\,c = -1 + 4\,cos\,\frac{1}{2}\,a$$

$$\times\,cos\,\frac{1}{2}\,b\;sin\;\frac{1}{2}c;$$

56° $$1 - cos^2a - cos^2b - cos^2c = 2\,cos\,a\,cos\,b\,cos\,c;$$

57° $$1 - cos^2a - cos^2b + cos^2c = 2\,sin\,a\,sin\,b\,cos\,c;$$

58° $$1 - sin^2 \frac{1}{2} a - sin^2 \frac{1}{2} b - sin^2 \frac{1}{2} c$$

$$= 2\ sin \frac{1}{2} a\ \ sin \frac{1}{2} b\ \ sin \frac{1}{2} c;$$

59° $$tg\, a + tg\, b + tg\, c = tg\, a\ tg\, b\ tg\, c;$$

60° $$cotg \frac{1}{2} a + cotg \frac{1}{2} b + cotg \frac{1}{2} c$$

$$= cotg \frac{1}{2} a\ cotg \frac{1}{2} b\ cotg \frac{1}{2} c;$$

61° $$tg \frac{1}{2} a\ tg \frac{1}{2} b + tg \frac{1}{2} a\ tg \frac{1}{2} c$$

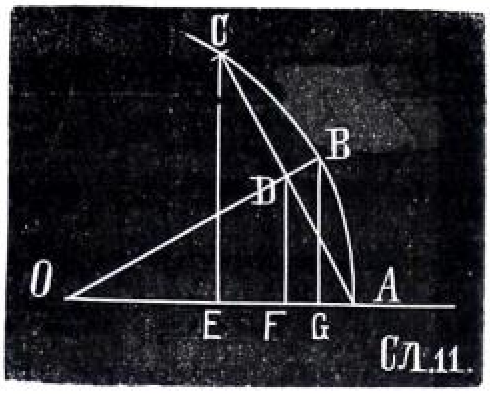
$$+ tg \frac{1}{2} b\ tg \frac{1}{2} c = 1;$$

62° $$cotg\, a\ \ cotg\, b + cotg\, a\ \ cotg\, c + cotg\, b\ cotg\, c = 1;$$

Геометријски докази неких од досада нађених образаца.

42. Обрасци за $sin\ (a + b)$ и $cos\ (a + b)$ нађени су помоћу геометрије; из истих образаца изведени су после сви остали чисто аналитичним путем. Одатле сљедује, да пошто први вреде за све могуће луке, и други морају имати исту општност; то је осим краткоће најзначајнија црта аналитичних метода. Напротив при геометријским методама бојати је се, да ће добивени резултати вредити само за случаје у сликама претпостављене; но како се геометријским методама неможе одрећи већа јасноћа и очигледност, то ћемо и тим путем неке од досада нађених образаца да изведемо.

1. *Из синуса и косинуса лука наћи синус и косинус двоструког лука.*



Сл.11.

Нека је (сл. 11.) лук $AB = BC = a$ и потоме лук $AC = 2\,a$; свршивши на слики означене конструкције и узимајући $OA = 1$ добијамо:

$$\sin a = BG = AD,\ \cos a = OG = OD,\ \sin 2\,a = CE = 2\,DF$$

$$\cos 2a = OE = OF - EF = OF - AF.$$

Из правоуглог троугла ODA сљедује:

$$DF.OA = AD.OD\,,\ OF.OA = \overline{OD}^2,\ AF.OA = \overline{AD}^2,$$

или пошто је $OA = 1$

$$DF = AD.OD,\ OF = \overline{OD}^2,\ AF = \overline{AD}^2;$$

замењујући ове вредности горе налазимо:

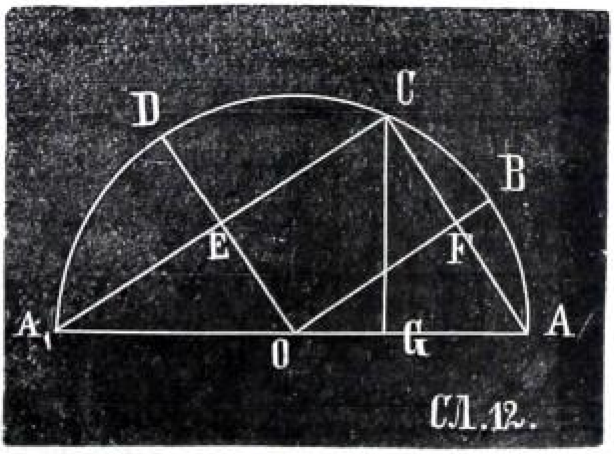
$$\sin 2\,a = 2\,AD.OD,\ \cos 2\,a = \overline{OD}^2 - \overline{AD}^2,$$

или метнувши место AD и OD вредности

$$\sin 2\,a = 2\sin a\cos a,\ \cos 2\,a = \cos^2 a - \sin^2 a,$$

а то су обрасци 2) у № 30.

2. *Из познатог косинуса лука наћи синус и косинус полу-лука.*



Сл.12.

Узмимо (сл. 12.) лук $AC = a$ и повуцимо CG управно на A_1A, а затим и тетива AC и A_1C као и полупречнике OB и OD, који их у E и F под правим углом полове. Узимајући $OA = 1$ имамо:

$$OG = \cos a,\ AG = 1 - \cos a,\ A_1G = 1 + \cos a,$$

$$AC = 2 \sin \frac{1}{2} a,\ A_1C = 2 \sin \frac{1}{2} (\pi - a) = 2 \cos \frac{1}{2} a.$$

Како је свако тетиво средња геометријска сразмерна између пречника A_1A и налеглог комада, то стоји:

$$\overline{AC}^2 = A_1A.AG \text{ или } 4 \sin^2 \frac{1}{2} a = 2 (1 - \cos a),$$

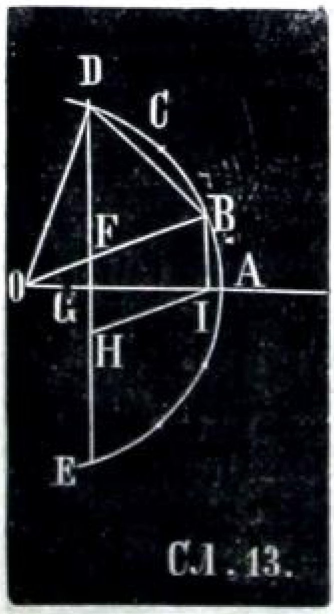
$$\overline{A_1C}^2 = A_1A.A_1G \text{ или } 4 \cos^2 \frac{1}{2} a = 2 (1 + \cos a);$$

одавле добијамо:

$$\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}},\quad \cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}},$$

а то су обрасци 2) у № 34.

3. *Из синуса и косинуса лука наћи синус и косинус троструког лука.*



Сл. 13.

Нека је (сл. 13.) лук $AB = BC = CD = a$. Равнострани троугао BOD сличан је троуглу BDF, јер најпре угао OBD лежи у оба троугла а после угао BDF, коме лук $\frac{1}{2} BAE =$ л. BCD служи као мера, једнак је углу BOD. По овоме је за $OA = OB = 1$:

$$\frac{BF}{BD} = \frac{BD}{OB}, \text{ одакле}$$

$$BF = \overline{BD}^2 = 4 \sin^2 a.$$

Ако повучемо JH паралелно са BF имаћемо $JH = BF = 4 \sin^2 a$, а из сличних троуглова GHJ и OBJ наћићемо:

$$\frac{GH}{BJ} = \frac{JH}{OB}, \text{ одакле } GH = 4\,sin^3 a,$$

$$\frac{JG}{OG} = \frac{JH}{OB}, \text{ одакле } JG = 4\,sin^2 a\,cos\,a.$$

Но из слике види се, да је

$$\begin{aligned} sin\,3\,a &= DG = DF + FH - GH, \\ &= BD + BJ - GH = 3\,sin\,a - GH, \\ cos\,3\,a &= OG = OJ - JG = cos\,a - JG; \end{aligned}$$

одавде замењујући GH и JG нађеним вредностима добијамо

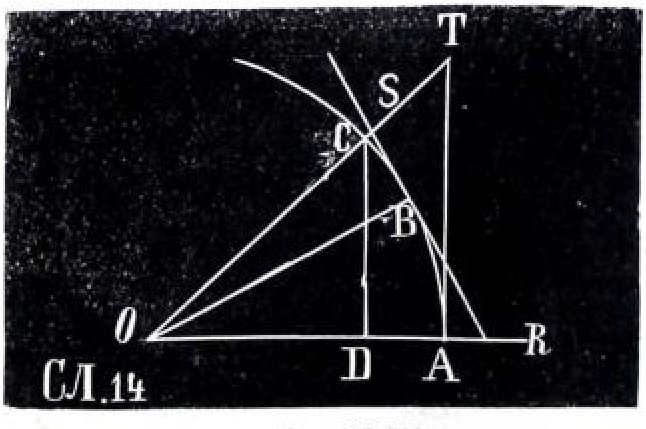
$$\begin{aligned} sin\,3\,a &= 3\,sin\,a - 4\,sin^3 a, \\ cos\,3\,a &= cos\,a - 4\,sin^2 a\,cos\,a; \end{aligned}$$

први од ових образаца први је од оних под 4) у № 31; замењујући у другом $sin^2 a$ са $1 - cos^2 a$, добијамо и други образац под 4) у № 31.

4. *Из тангената двају лукова наћи тангенте њиховог збира или разлике.*

Нека су (сл. 14.) $OA = 1$, $AB = a$, $BC = b$; у тачкама A и B повуцимо дирке AT и BS и продужимо их, прву до пресека са продуженим полупречником OC а другу до пресека са продуженим полупречницима OC и OA, затим спустимо SD управно на OA. По претпоставци познато је $BR = tg\,a$ и $BS = tg\,b$ а тражи се

$$AT = tg\,(a + b).$$



СЛ.14

Из сличних троуглова OAT и ODS сљедује

$$\frac{AT}{OA} = \frac{SD}{OD} \text{ одакле } tg\,(a+b) = \frac{SD}{OD}.$$

Слични троугли SDR и OBR дају

$$\frac{SD}{SR} = \frac{OB}{OR} \text{ одакле } SD = \frac{tg\,a + tg\,b}{OR}.$$

Пошто је у троуглу OSR права SD управна на OR, то је по једној из геометрије познатој теореми

$$\overline{SR}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{OR}^2 - 2\,OR.OD;$$

но како је такође

$$\overline{SR}^2 = (BR + BS)^2 = \overline{BR}^2 + \overline{BS}^2 + 2\,BR.BS,$$

то слeдује

$$\overline{BR}^2 + \overline{BS}^2 + 2\,BR.BS = \overline{OR}^2 + \overline{OS}^2 - 2\,OR.OD$$

из ове једначине слeдује даље

$$\begin{aligned} 2\,OR.OD &= \overline{OR}^2 - \overline{BR}^2 + \overline{OS}^2 - \overline{BS}^2 - 2\,BR.BS \\ &= 2\,\overline{OB}^2 - 2\,BR.BS = 2 - 2\,tg\,a\;tg\,b, \end{aligned}$$

и најзад из ове

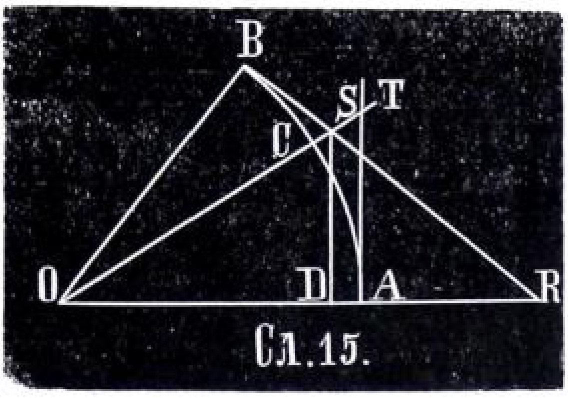
$$OD = \frac{1 - tg\,a\;tg\,b}{OR}.$$

Замењујући у $tg\,(a+b) = \frac{SD}{OD}$ SD и OD нађеним вредностима добија се

$$tg\,(a+b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a\,tg\,b}$$

познати образац 5) из **№ 29.**

Исто тако лако налази се и образац за $tg\,(a - b)$. При извођењу истог треба употребити слику 15, у којој је лук $AC = a - b$, $AB = a$, $BC = b$ и $OA = 1$; у осталом исти су рачуни као мало час, само што ће други чланови у бројиоцима од SD и OD имати противни знак зато, што је сада $RS = BR - BS = tg\,a - tg\,b$; по свршеном рачуну изаћиће



Сл. 15.

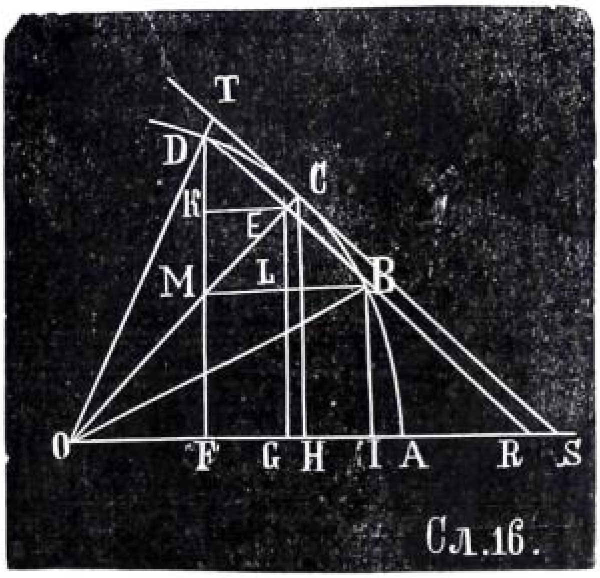
$$tg\,(a - b) = \frac{tg\,a - tg\,b}{1 + tg\,a\,tg\,b}.$$

5. *Доказати геометријским путем обрасце*

$$sin\,p + sin\,q = 2\,sin\,\frac{1}{2}(p+q)\;\;cos\,\frac{1}{2}(p-q),$$

$$sin\,p - sin\,q = 2\,cos\,\frac{1}{2}(p+q)\;\;sin\,\frac{1}{2}(p-q).$$

Нека је (сл. 16.) $AD = p$ $AB = q$, $OA = 1$; повуцимо тетиво BD и полупречник OC, који га у тачки E под правим углом полови; спустимо на OA управне DF, EG, CH, BJ, а затим повуцимо EK паралелно са OA. Усљед поменуте конструкције имамо



Сл. 16.

$$DF = sin\,p,\; BJ = sin\,q,$$

$$EG = LG + EL$$

$$= BJ + \frac{1}{2}DM = BJ + \frac{1}{2}(DF - MF)$$

$$= BJ + \frac{1}{2}(DF - BJ) = \frac{1}{2}(DF + BJ) = \frac{1}{2}(\sin p + \sin q),$$

$$DK = \frac{1}{2}(\sin p - \sin q),\ AC = \frac{1}{2}(p + q),$$

$$CH = \sin\frac{1}{2}(p+q),\ OH = \cos\frac{1}{2}(p+q),\ CD = \frac{1}{2}(p-q);$$

$$DE = \sin\frac{1}{2}(p - q),\ OE = \cos\frac{1}{2}(p - q).$$

Из сличних троуглова OCH, OEG, DKE сљедује

$$\frac{EG}{CH} = \frac{OE}{OC} \quad \text{и} \quad \frac{DK}{OH} = \frac{DE}{OC},$$

или због $OA = OC = 1$

$$EG = CH.OE,\ DK = OH.DE;$$

множећи ове једначине са 2 и замењујући потом у њима горе нађене вредности добићемо горње обрасце.

Из истих троуглова могу се наћи и вредности за

$$\cos p + \cos q \text{ и } \cos p - \cos q.$$

6. *Доказати — геометријски — образац*

$$\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{tg\frac{1}{2}(p+q)}{tg\frac{1}{2}(p-q)}.$$

Узмимо исту слику као мало час, само још продужимо BD до R и повуцимо дирку ST у тачки C, па је продужимо до пресецања са продуженим полупречницима OA и OD. Претпоставивши ово добијамо због $DR \parallel ST$

$$\frac{EG}{DK} = \frac{ER}{ED} = \frac{CS}{CT}.$$

Пошто је $EG = \frac{\sin p + \sin q}{2}$, $DK = \frac{\sin p - \sin q}{2}$

$CS = tg\, CA = tg\, \frac{1}{2}(p+q)$, $CT = tg\, CD = tg\, \frac{1}{2}(p-q)$,

то замењујући EG, DK, CS и CT у нађеној једначини

$$\frac{EG}{DK} = \frac{CS}{CT}$$

добијамо горњи образац.

Синуси и косинуси лукова $\frac{\pi}{20}, \frac{2\pi}{20}, \frac{3\pi}{20}, \ldots \frac{8\pi}{20}, \frac{9\pi}{20}$

43. У № 25 нашли смо

$$\sin\frac{\pi}{10} = \sin\frac{2\pi}{20} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}, \cos\frac{\pi}{10} = \cos\frac{2\pi}{20}$$

$$= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Стављајући у обрасцима 2) № 30 $a = \frac{2\pi}{20}$ налазимо

$$\sin\frac{4\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}, \cos\frac{4\pi}{20} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5});$$

стављајући исто тако у обрасцима 4) № 35 $a = \frac{2\pi}{20}$ добијамо

$$\sin\frac{\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\cos\frac{\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}};$$

замењујући у истим обрасцима a са $\frac{6\pi}{20}$ и узимајући на ум, да је овај лук комплеменат луку $\frac{4\pi}{20}$, због чега је

$$\sin\frac{6\pi}{20} = \cos\frac{4\pi}{20} \text{ и } \cos\frac{6\pi}{20} = \sin\frac{4\pi}{20} \text{ добијамо}$$

$$\sin\frac{3\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\cos\frac{3\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

Напослетку је

$$\sin\frac{5\pi}{20} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos\frac{5\pi}{20} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Скупивши рад бољег прегледа, нађене резултате уједно добијамо таблицу

$$\sin\frac{\pi}{20} = \cos\frac{9\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{2\pi}{20} = \cos\frac{8\pi}{20} = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}),$$

$$\sin\frac{3\pi}{20} = \cos\frac{7\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{4\pi}{20} = \cos\frac{6\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{5\pi}{20} = \cos\frac{5\pi}{20} = \frac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\sin\frac{6\pi}{20} = \cos\frac{4\pi}{20} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}),$$

$$\sin\frac{7\pi}{20} = \cos\frac{3\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$sin\,\frac{8\pi}{20} = cos\,\frac{2\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

$$sin\,\frac{9\pi}{20} = cos\,\frac{\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5 - \sqrt{5}}.$$

Као што се види ови изрази за синус и косинус лука $\frac{\pi}{2}$ и његових множина врло су прости и имају само квадратне корене, због чега је лако израчунати њихове вредности са произвољно много тачних децимала.

Примедбе о односима између различних тригонометријских функција.

44. У № 42 казато је, да досада нађени обрасци вреде за све могуће луке, из чега сљедује, да су то праве идентичне једначине. Помоћу истих образаца могу се са изразима, који зависе од више тригонометријских функција, предузимати врло различни преображаји и на тај начин изналазити идентичних односа колико се хоће. У делима има често таквих односа, за које се некаже, како су постали; у таквом случају најбоље је испитати њихову идентичност, што никада није особито тешко.

Тако на пример да би испитали идентичност једначине

$$\frac{sin\,(a+b)\;sin\,(a-b)}{cos^2 a\;cos^2 b} = tg^2 a - tg^2 b$$

заменићемо $sin\,(a + b)$ и $sin\,(a - b)$ њиховим вредностима (№ 26 и 27), па ћемо добити

$$\frac{sin\,(a+b)\;sin\,(a-b)}{cos^2 a\;cos^2 b} = \frac{sin^2 a\;cos^2 b - cos^2 a\;sin^2 b}{cos^2 a\;cos^2 b};$$

делећи десно од знака једнакости сваки члан бројиоца посебице имениоцем добићемо дани образац.

Да би испитали идентичност обрасца

$$cos\ a = \frac{1}{1 + tg\ a\ \ tg\ \frac{1}{2}\ a}$$

заменићемо $tg\ a$ и $tg\ \frac{1}{2}\ a$ њиним вредностима $\frac{sin\ a}{cos\ a}$ и $\frac{sin\ \frac{1}{2}\ a}{cos\ \frac{1}{2}\ a}$, па ћемо добити

$$cos\ a = \frac{1}{1 + \frac{sin\ a\ \ sin\ \frac{1}{2}\ a}{cos\ a\ \ cos\ \frac{1}{2}\ a}},$$

множећи десно бројиоца и имениоца са $cos\ a\ \ cos\ \frac{1}{2}\ a$ наћићемо

$$cos\ a = \frac{cos\ a\ \ cos\ \frac{1}{2}\ a}{cos\ a\ \ cos\ \frac{1}{2}\ a + sin\ a\ \ sin\ \frac{1}{2}\ a},$$

именилац десно по обрасцу за $cos\ (a - b)$ је $= cos\ (a - \frac{1}{2}a)$ или $= cos\ \frac{1}{2}\ a$ и потоме је

$$cos\ a = \frac{cos\ a\ \ cos\ \frac{1}{2}\ a}{cos\ \frac{1}{2}\ a}$$

или $$cos\ a = cos\ a.$$

Но често дата једначина између тригонометријских функција више лукова није идентична, али вреди, кад се између њених лукова постави извесни број односа. У таком случају може се из дате једначине избацити онолико лукова, колико је односа између лукова дато, и резултирајућа једначина мора бити идентична. Идентичност биће очигледна, ако се у датој једначини по избацају лукова тригонометријске функције сваког оставшег лука изразе само једном од њих.

Тако на пример једначина

$$tg\, a + tg\, b + tg\, c = tg\, a\; tg\, b\; tg\, c$$

није идентична, али вреди кад је

$$a + b + c = (2n + 1)\,\pi,$$

где n значи цео број. Да би се о томе уверили, заменимо c са $(2n + 1)\,\pi - (a + b)$, па испитајмо да ли је идентична резултирајућа једначина

$$tg\, a + tg\, b - tg\,(a + b) = - tg\, a\; tg\, b\; tg\,(a + b);$$

ова једначина по замени збира $tg\, a + tg\, b$ вредношћу $tg\,(a + b)\,(1 - tg\, a\; tg\, b)$, која се добија из обрасца

$$tg\,(a + b) = \frac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a\; tg\, b},$$

изгледа овако

$$tg\,(a + b)\,(1 - tg\, a\; tg\, b) - tg\,(a + b)$$
$$= - tg\, a\; tg\, b\; tg\,(a + b),$$

или

$$tg\,(a + b) - tg\, a\; tg\, b\; tg\,(a + b) - tg\,(a + b)$$
$$= - tg\, a\; tg\, b\; tg\,(a + b);$$

идентичност једначине очевидна је.

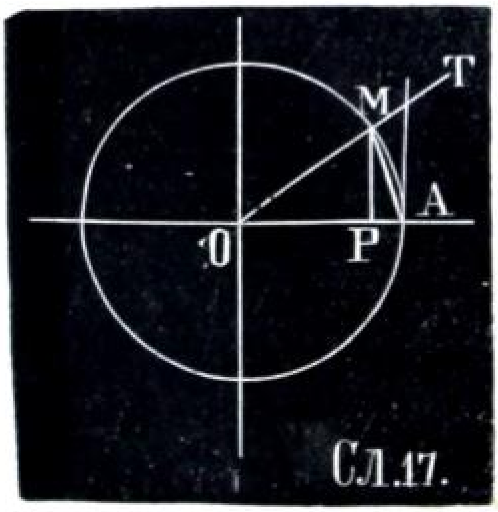
II. ИЗРАЧУНАВАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА.

Претходна знања.

45. Употреба тригонометријских функција претпоставља да се тригонометријске функције даног лука могу увек лако израчунати, као и обратно лук, кад је једна од његових тригонометријских функција позната. За тај посао нужно је имати готову таблицу са већ израчунатим тригонометријским функцијама лукова прве четврти, и којих је размак довољно мали. Овде ће се најпре показати, како се таква таблица може израчунати, а после како се помоћу ње могу изнаћи тригонометријске функције ма каквог лука, као и обратно најмањи лук, који датој тригонометријској функцији одговара. Но пре свега нужно је прећи неколико теорема, на којима се поменуто израчунавање оснива.

1°. *Сваки лук прве четврти већи је од свог синуса а мањи од своје тангенте.*

Лук $AM = a$ (сл. 17.) већи је од свог тетива, дакле је тим пре већи од MP. Потоме је



Сл. 17.

$$a > \sin a.$$

Исечак (*sector*) AOM мањи је од троугла AOT, одакле сљедује

$$л. AM. \frac{OA}{2} < AT. \frac{OA}{2},$$

или по скраћају са $\frac{OA}{2}$

$$a < tg\, a.$$

2°. *При опадању лука* a *од* $\frac{\pi}{2}$ *до* 0 *размера* $\frac{\sin a}{a}$ *тежи непрестанце јединици као крајњој граници.*

Услед 1° имамо

$$sin\, a < a < tg\, a;$$

делећи *sin a* сваком од ових количина добићемо количнике по величини у изврнутом реду то јест

$$1 > \frac{sin\, a}{a} > cos\, a.$$

Као што се види размера $\frac{sin\, a}{a}$ налази се по својој величини између јединице и *cos a*, који се при опадању лука *a* од $\frac{\pi}{2}$ до 0 јединици непрестанце приближује; размера $\frac{sin\, a}{a}$ мора се дакле и сама јединици непрестанце приближавати.

Пошто је

$$\frac{tg\, a}{a} = \frac{sin\, a}{a} \cdot \frac{1}{cos\, a},$$

то је јасно, да се и $\frac{tg\, a}{a}$ при непрестаном опадању лука *a* од $\frac{\pi}{2}$ до 0 граници 1 мора приближавати.

3. *Разлика између лука прве четврти и његовог синуса мања је од четвртине луковог куба.*

Узимајући да је *a* лук прве четврти имамо

$$sin\, a = 2\, sin\, \frac{1}{2}\, a\, cos\, \frac{1}{2}\, a = 2\, tg\, \frac{1}{2}\, a\, cos^2\, \frac{1}{2}\, a;$$

замењујући овде $tg\, \frac{1}{2}\, a$ мањом количином $\frac{1}{2}\, a$ умалићемо десну страну, дакле је

$$sin\, a > 2\, \frac{1}{2}\, a\, cos^2\, \frac{1}{2}\, a \text{ или } sin\, a > a\, (1 - sin^2 \frac{1}{2}\, a);$$

замењујући у последњој неједнакости $sin \frac{1}{2} a$ већом количином $\frac{1}{2} a$ опет ћемо умалити десну страну, дакле је тим пре

$$sin\, a > a\ (1 - \frac{1}{4} a^2) \text{ или } sin\, a > a - \frac{1}{4} a^3;$$

одавде сљедује $a - sin\, a < \frac{1}{4} a^3$.

$sin\, a$ налази се дакле између a и $a - \frac{1}{4} a^3$, одакле сљедује, да је погрешка, кад се за $sin\, a$ узме сам лук a, мања од $\frac{1}{4} a^3$.

Две сличне границе могу се наћи и за $cos\, a$, ако само у обрасцу

$$cos\, a = 1 - 2\, sin^2 \frac{1}{2}\, a$$

заменимо $sin \frac{1}{2} a$ најпре његовом горњом границом $\frac{1}{2} a$ а после доњом $\frac{1}{2} a - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} a\right)^3 = \frac{1}{2} a - \frac{1}{32} a^3$, јер учинивши то добијамо

$$cos\, a > 1 - \frac{1}{2} a^2$$

и

$$cos\, a < 1 - 2 \left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{32}\right)^2$$

или

$$cos\, a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16} - 2 \left(\frac{a^3}{32}\right)^2$$

дакле тим пре

$$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}$$

Погрешка, кад се за $\cos a$ узме $1 - \frac{a^2}{4}$, дакле је мања од $\frac{a^4}{16}$.

46. Мало час доказано је, да је разлика између лука прве четврти и његовог синуса мања од четвртине луковог куба; но може се доказати, да је та разлика шта више мања и од шестине луковог куба. И заиста ако у обрасцу

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

заменимо a узастопце са $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3^2}$, $\frac{a}{3^3} \dots \frac{a}{3^n}$, добијамо

$$3 \sin \frac{a}{3} - \sin a = 4 \sin^3 \frac{a}{3},$$

$$3 \sin \frac{a}{3^2} - \sin \frac{a}{3} = 4 \sin^3 \frac{a}{3^2},$$

$$3 \sin \frac{a}{3^3} - \sin \frac{a}{3^2} = 4 \sin^3 \frac{a}{3^3},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$3 \sin \frac{a}{3^n} - \sin \frac{a}{3^{n-1}} = 4 \sin^3 \frac{a}{3^n};$$

сабравши све ове једначине, пошто смо их најпре помножили редом са 1, 3, $3^2 \dots 3^{n-1}$ добијамо даље

$$3^n \sin \frac{a}{3^n} - \sin a = 4 \left(\sin^3 \frac{a}{3} + 3 \sin^3 \frac{a}{3^2} + \dots \right.$$
$$\left. + 3^{n-1} \sin \frac{a}{3^n} \right),$$

или

$$a\,\frac{\sin\frac{a}{3^n}}{\left(\frac{a}{3^n}\right)} - \sin a = 4\left(\sin^3\frac{a}{3} + 3\sin^3\frac{3}{3^2} + \ldots\ldots\right.$$

$$\left. + 3^{n-1}\sin\frac{a}{3^n}\right).$$

При бесконачном рашћењу броја n лук $\frac{a}{3^n}$ тежи нули дакле размера $\frac{\sin\frac{a}{3^n}}{\left(\frac{a}{3^n}\right)}$ јединици, и потоме је $a - \sin a$ граница левој страни горње једначине, дакле тој истој граници мора тежити и десна страна. Но како је синус лука прве четврти мањи од самог лука, то је граница десне стране мања од границе, којој тежи геометријска постепеност

$$4\left(\frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3^5} + \frac{a^3}{3^7} + \ldots\ldots + \frac{a^3}{3^{n-1}}\right);$$

та је граница $\frac{a^3}{6}$, дакле је

$$a - \sin a < \frac{a^3}{6}.$$

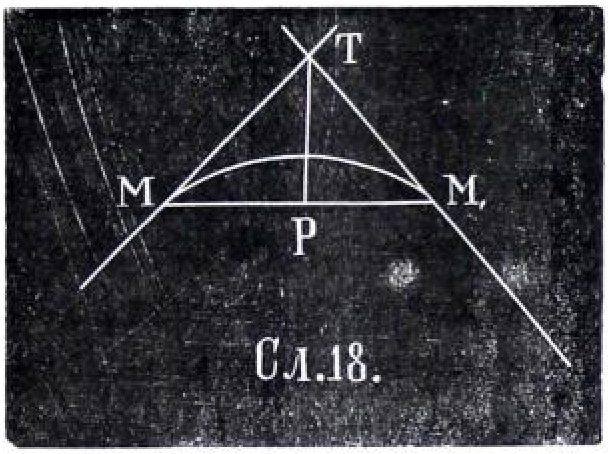
47. Друга теорема № 45 каже, да је јединица граница размери $\frac{\sin a}{a}$, кад лук a све једнако нули тежи. Но како је

$$\sin a = \frac{1}{2}\,chord\;2\,a$$

то је јасно, да размера $\frac{chord\;2\,a}{2\,a}$ тежи такође јединици, кад лук a нули тежи, с' другим речима *размера кружног лука наспрам његовог тетива тежи при непрестаном опадању лука све више и више јединици као својој граници.*

Ово докучење, може се доказати да вреди и за лук ма какве криве пруге и од честе је употребе.

Узмимо (сл. 18.) да је MM_1 лук једне криве пруге; MT и M_1T две дирке, које га дирају у његовим крајним тачкама M и M_1; TP управна спуштена из тачке T на тетиво MM_1; с обзиром на слику имамо



Сл.18.

$$MT + M_1T > arc\ MM_1 > chord\ MM_1$$

одакле

$$\frac{MT + M_1T}{chord.\ MM_1} > \frac{arc\ MM_1}{chord.\ MM_1} > 1.$$

Размера $\frac{MT + M_1T}{chord\ MM_1} = \frac{MT + M_1T}{MP + M_1P}$ тежи очевидно јединици, кад лук нули тежи, јер иста размера лежи увек између количина

$$\frac{MT}{MP} = \frac{1}{cos\ TMP} \quad \text{и} \quad \frac{M_1T}{M_1P} = \frac{1}{cos\ TM_1P},$$

које обе јединици теже. Пошто се сад размера $\frac{arc\ MM_1}{chord\ MM_1}$ увек налази измеђ две количине, од којих је прва јединица а друга тежи јединици, то и она мора тежити јединици.

Израчунавање синуса и косинуса.

48. Досада смо луке изражавали у деловима полупречника, али у применама теорије тригонометријских функција

згодније је изражавати их у деловима периферије, то јест у степенима и њиховим деловима минутама и секундама. Од сада ћемо на овај последњи начин луке изражавати.

У № 19 видили смо да се тригонометријске функције одречних лукова, а тако исто и положних, који су већи од једне четврти, могу лако изразити функцијама лукова прве четврти, из којих се после лако функције и свију осталих лукова с обзиром на № 19 налазе. Шта више при самом израчунавању није нужно ићи ни преко лука од 45°, јер два комплементна лука, као $45^\circ + a$ и $45^\circ - a$, имају исте тригонометријске функције усљед образаца

$$sin\,(45^\circ + a) = cos\,(45^\circ - a), cos\,(45^\circ + a) = sin\,(45^\circ - a),$$
$$tg\,(45^\circ + a) = cotg\,(45^\circ - a), cotg\,(45^\circ + a) = tg\,(45^\circ - a).$$

У осталом кад су синуси и косинуси лукова од 0° до 45° израчунати, лако је помоћу образаца

$$tg\,a = \frac{sin\,a}{cos\,a},\quad cotg\,a = \frac{cos\,a}{sin\,a}$$

израчунати и њихове тангенте и котангенте.

Сад да видимо, како се могу израчунати синуси и косинуси лукова од 0° до 45° и у размаку од $10''$ до $10''$. За то је пре свега нужно изнаћи вредности за $sin\,10''$ и $cos\,10''$ са извесном приближношћу.

Пошто се лук од $10''$ у половини периферије налази 64800 пута, то је за полупречник $= 1$ његова дужина, коју ћемо са a означити

$$a = \frac{\pi}{64800} = 0{\cdot}000048481368110953\ldots..$$

Из овога се види да је $a < 0{\cdot}00005$; ако се дакле узме

$$sin\,10'' = a$$

то је учињена погрешка

$$p < \frac{1}{4}(0{\cdot}00005)^3 \text{ или } < 0{\cdot}000000000000032$$

то јест мања од пола јединице тринајестог десетног места. По овоме је са 13 тачних децимала

$$\sin 10'' = 0{\cdot}0000484813681$$

Тражимо сад $\cos 10''$. Ако се узме

$$\cos 10'' = 1 - \frac{a^2}{2},$$

то је учињена погрешка

$$p < \frac{a^4}{16}$$

или због $a < 0{\cdot}00005$

$$p < \frac{(0{\cdot}00005)^4}{16} = \frac{625}{16.10^{20}} \text{ или } p < \frac{4}{10^{19}}.$$

Погрешка је дакле мања од пола јединице осамнајестог десетног места. Вредност за $\cos 10''$ са 13 тачних десетних места јесте

$$\cos 10'' = 0{\cdot}9999999988248.$$

49. Нашавши $\sin 10''$ и $\cos 10''$ можемо сад добити синусе и косинусе свију лукова од 0° до 45° све у размаку од $10''$ до $10''$ на сљедећи начин.

Из образаца

$$\sin(a + b) = 2 \sin a \cos b - \sin(a - b),$$
$$\cos(a + b) = 2 \cos a \cos b - \cos(a - b),$$

стављајући у њима $b = 10''$, налазимо

$$\sin(a + 10'') = 2 \cos 10'' \sin a - \sin(a - 10''),$$
$$\cos(a + 10'') = 2 \cos 10'' \cos a - \cos(a - 10'');$$

из ових замењујући $2 \cos 10''$ вредношћу

$$2\,(0{\cdot}9999999988248) = 2 - 0{\cdot}0000000023504 = 2 - k$$

налазимо даље

$$\sin(a + 10'') = 2 \sin a - k \sin a - \sin(a - 10''),$$
$$\cos(a + 10'') = 2 \cos a - k \cos a - \cos(a - 10''),$$

или најзад

$$1) \quad \begin{cases} \sin(a+10'') = \sin a + \left[\sin a - \sin(a-10'')\right] - k \sin a, \\ \cos(a+10'') = \cos a + \left[\cos a - \cos(a-10'')\right] - k \cos a. \end{cases}$$

Стављајући у овим обрасцима, који се зову *Simpson*-ови

$$a = 10'',\ 20'',\ 30'',\ 40'' \ \ldots\ \text{до}\ 161990''$$

наћићемо редом синусе и косинусе свију лукова до 45°.

Из последњег обрасца видимо, да се синус (косинус) ма ког од лукова 10″, 20″, 30″ . . . . добија, кад се синусу (косинусу) претходећег лука дода разлика између тог синуса (косинуса) и синуса (косинуса) пред-претходећег лука, па се од збира одузме производ из синуса (косинуса) претходећег лука и сталног чиниоца k.

Множење сталним чиниоцем k своди се на просто сабирање, ако је најпре начињења таблица његових производа са девет првих бројева 1, 2, 3 . . . . 8, 9.

50. И ако се на показани начин могу израчунати синуси и косинуси свију лукова до 45°, опет зато треба стати, како се дође до лука од 30°. Јер кад су синуси и косинуси лукова од 0° до 30° израчунати, синуси и косинуси лукова од 30° до 45° могу се добити много простије помоћу образаца

$$2) \quad \begin{cases} \sin(30^\circ + a) = \cos a - \sin(30^\circ - a), \\ \cos(30^\circ + a) = \cos(30^\circ - a) - \sin a, \end{cases}$$

који се налазе, кад се у обрасцима

$$\sin(a + b) = 2 \sin a \cos b - \sin(a - b),$$
$$\cos(a + b) = \cos(a - b) - 2 \sin a \sin b.$$

стави $a = 30^\circ$, $b = a$ и $\sin 30^\circ$ замени вредношћу $\frac{1}{2}$.

Стављајући у обрасцима под 2) $a = 10'', 20'', 30'', 40'' \ldots$ наћићемо редом синусе и косинусе лукова од 30° до 45° све у размаку од $10''$ до $10''$.

51. При израчунавању синуса и косинуса лукова од 0° до 45° полази се, као што смо видли, од $\sin 10''$ и $\cos 10''$. Пошто су ови последњи приближно нађени, то је се бојати, да ће њихове погрешке, прелазећи на синусе и косинусе свију осталих лукова, најзад толико нарастити, да одређену границу тачности пређу. Осим тога бојати је се, да ће се и у току самог рачуна подкрадати погрешке, које ће такође прелазити на синусе и косинусе свију следећих лукова. С тога треба прво рачунати с више десетних места, но што ће се напослетку задржати, и друго од времена на време контролисати добивене резултате. Зарад поменуте контроле треба по обрасцима № 43 непосредно израчунати синусе и косинусе лукова од 9° до 9° са потребном приближношћу и с њима поредити резултате добивене по горњој методи. Тако на пример дошавши помоћу горње методе до $\sin 9^\circ$ и $\cos 9^\circ$ треба видити, да ли се исти налазе у границама захтеване тачности, и ако је то случај, наставити рачун али полазећи од вредности за $\sin 9^\circ$ и $\cos 9^\circ$ непосредно (№ 43) израчунатих; на исти начин треба радити и код 18°, 27°, 36°. Ако вредности за $\sin 9^\circ$ и $\cos 9^\circ$ нађене отступају од тачних вредности више но што треба, онда треба по *Simpson*-овим обрасцима радити само до $\sin 4\frac{1^\circ}{2}$ и $\cos 4\frac{1^\circ}{2}$; ове последње треба и непосредно по обрасцима 2) № 34 израчунати, па онда од њих поћи при израчунавању синуса и косинуса лукова до 9° и на тај начин даље.

Није тешко доказати, да се може са извесношћу рачунати до на крај рачуна на осам тачних децимала, ако се само $\sin 10''$ и $\cos 10''$, од којих се полази, израчунају са

13 тачних децимала а синуси и косинуси свију сљедећих лукова са 17 децимала.

Најзад има се приметити, да се тачност таблице синуса и косинуса, пошто је она готова, може испитати помоћу једног од сљедећа два обрасца

$$\sin(90^\circ - a) + \sin(18^\circ - a) + \sin(18^\circ + a) = \sin(54^\circ - a) + \sin(54^\circ + a),$$

$$\sin(36^\circ + a) + \sin(72^\circ - a) - \sin(36^\circ - a) - \sin(72^\circ + a) = \sin a,$$

од којих се први зове *Legendre*-ов а други *Euler*-ов.

Legendre-ов образац добија се овако

У № 43 нашли смо да је

$$\cos\frac{4\pi}{20} = \cos 36^\circ = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}),$$

$$\cos\frac{8\pi}{20} = \cos 72^\circ = \frac{1}{4}(-1 + \sqrt{5});$$

одузимајући ове две једначине добијамо

$$\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{1}{2}.$$

Пошто су луци 36° и 54° а тако исто и луци 72° и 18° комплементи, то се последња једначина претвара у

$$\sin 54^\circ - \sin 18^\circ = \frac{1}{2},$$

или
$$1 + 2\sin 18^\circ = 2\sin 54^\circ;$$

множећи ову једначину са $\cos a$ добијамо

$$\cos a + 2\sin 18^\circ \cos a = 2\sin 54^\circ \cos a;$$

ова се једначина због

$$\cos a = \sin(90^\circ - a),$$

$$2\sin 18^\circ \cos a = \sin(18^\circ - a) + \sin(18^\circ + a),$$

и
$$2\sin 54^\circ \cos a = \sin(54^\circ - a) + \sin(54^\circ + a)$$

може и овако написати

$$\sin(90^\circ - a) + \sin(18^\circ - a) + \sin(18^\circ + a)$$
$$= \sin(54^\circ - a) + \sin(54^\circ + a)$$

а то је горњи *Legendre*-ов образац.

Да би извели други *Euler*-ов образац, метнимо у другом обрасцу под 1) № 39 најпре $a = 36^\circ$ а после $a = 72^\circ$ и у оба случаја изменимо b са a, па ћемо на тај начин добити

$$\sin(36^\circ + a) - \sin(36^\circ - a) = \sin a \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$\sin(72^\circ + a) - \sin(72^\circ - a) = \sin a \frac{-1 + \sqrt{5}}{2};$$

одузевши другу једначину од прве налазимо

$$\sin(36^\circ + a) + \sin(72^\circ - a) - \sin(36^\circ - a) - \sin(72^\circ + a)$$
$$= \sin a.$$

Примери и Задатци.

1° Колики треба да је полупречник r једног круга, па да разлика између његовог лука, који је a метара дугачак, и одговарајућег тетива c буде мања од $\frac{1}{10^n}$?

Ако узмемо на ум да размере $\frac{a}{r}$ и $\frac{c}{r}$ претстављају лук и његово тетиво, кад је полупречник r узет као јединица, и да је синус једног лука једнак половини тетива двапут већег лука, то ће нам бити јасна сљедећа једначина

$$\sin\frac{a}{2r} = \frac{c}{2r},$$

која се може написати и овако

$$c = 2\,r \sin\frac{a}{2r}.$$

Одузимајући ову једначину од $a = a$ добијамо

$$a - c = a - 2r\,sin\frac{a}{2r} = 2r\left(\frac{a}{2r} - sin\frac{a}{2r}\right);$$

но како је (№ 46)

$$\frac{a}{2r} - sin\frac{a}{2r} < \frac{1}{6}\left(\frac{a}{2r}\right)^3,$$

то је

$$a - c < \frac{2r}{6}\left(\frac{a}{2r}\right)^3 \text{ или } < \frac{a^3}{24\,r^2}.$$

По овоме биће $a - c$ мање од $\frac{1}{10^n}$, ако је

$$\frac{a^3}{24\,r^2} \leqq \frac{1}{10^n} \text{ или ако је } r^2 \geqq \frac{10^n\,a^3}{24}.$$

Например ако је лук $a = 100$ метара, онда, да би разлика између тога лука и његовог тетива била мања од 1 милиметра $= 0{\cdot}^{m}001$, треба да је

$$r^2 \geqq \frac{10^3\,100^3}{24} = \frac{1000^3}{24}, \text{ одакле } r \geqq 6455{\cdot}97 \text{ метра.}$$

2° Наћи границу, којој тежи производ

$$cos\frac{a}{2}\,cos\frac{a}{4}\,cos\frac{a}{8}\,\ldots\ldots\,cos\frac{a}{2^n}$$

кад број (n) његових чинилаца расте бесконачно.

Из обрасца

$$sin\,a = 2\,sin\frac{a}{2}\,cos\frac{a}{2}$$

стављајући у њему место a редом: $a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \frac{a}{8} \ldots \frac{a}{2^{n-1}}$, сљедује

$$\begin{aligned}
sin\, a &= 2\, sin\frac{a}{2} cos\frac{a}{2},\\
sin\frac{a}{2} &= 2\, sin\frac{a}{4} cos\frac{a}{4},\\
sin\frac{a}{4} &= 2\, sin\frac{a}{8} cos\frac{a}{8},\\
sin\frac{a}{8} &= 2\, sin\frac{a}{16} cos\frac{a}{16},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
sin\frac{a}{2^{n-1}} &= 2\, sin\frac{a}{2^n} cos\frac{a}{2^n}.
\end{aligned}$$

Множењем ових једначина, којих је n на броју и по избацају чинилаца, заједничких обема странама нове једначине, добија се

$$sin\, a = 2^n sin\frac{a}{2^n} cos\frac{a}{2} cos\frac{a}{4} cos\frac{a}{8} \ldots\ldots cos\frac{a}{2^n},$$

дакле

$$cos\frac{a}{2} cos\frac{a}{4} cos\frac{a}{8} \ldots cos\frac{a}{2^n} = \frac{sin\, a}{2^n\, sin\frac{a}{2^n}}$$

$$= \frac{sin\frac{a}{2} cos\frac{a}{2}}{2^{n-1}\, sin\frac{a}{2^n}};$$

задатак се дакле своди на то, да се изнађе граница, којој тежи израз

$$\frac{sin\frac{a}{2}\ cos\frac{a}{2'}}{2^{n-1}\ sin\frac{a}{2^n}}$$

кад n бесконачно расти.

Последњи израз може се и овако претставити

$$\frac{\sin\frac{a}{2}\ \cos\frac{a}{2}}{2^{n-1}\ \sin\frac{a}{2^n}} = \cos\frac{a}{2}.\ \frac{\sin\frac{a}{2}}{\left(\frac{a}{2}\right)}.\ \frac{\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\sin\frac{a}{2^n}};$$

количина $\frac{\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\sin\frac{a}{2^n}}$ тежи очевидно јединици, кад број n бесконачно расти, дакле је за $n = \infty$

$\frac{\left(\frac{a}{2^n}\right)}{\sin\frac{a}{2^n}} = 1$, и потоме $\frac{\sin\frac{a}{2}\ \cos\frac{a}{2}}{2^{n-1}\ \sin\frac{a}{2^n}} = \cos\frac{a}{2}.\ \frac{\sin\frac{a}{2}}{\left(\frac{a}{2}\right)}.$

Граница, којој производ $\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{4}\cos\frac{a}{8}\ldots\ldots\cos\frac{a}{2^n}$ тежи, кад n бесконачно расти, јесте дакле

$$\frac{\cos\frac{a}{2}\ \sin\frac{a}{2}}{\left(\frac{a}{2}\right)} \text{ или } \frac{\sin a}{a}.$$

3° Сабрати редове

а) $\sin a \sin b + \sin 2\,a \sin 2\,b + \ldots. + \sin n\,a\ \sin n\,b,$

б) $\sin a \cos b + \sin 2\,a \cos 2\,b + \ldots. + \sin n\,a \cos n\,b,$

в) $\cos a \cos b + \cos 2\,a \cos 2\,b + \ldots. + \cos n\,a\ \cos n\,b$

4° Ако је $a + b + c = \pi$ и $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ тр узастопна члана једне аритметичне постепености, онда је

$$\frac{\sin \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} c} = \frac{\sin \frac{1}{2} (a-b)}{\sin \frac{1}{2} (b-c)}$$

а ако су $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ у аритметичној постепености, онда је

$$\cos^2 \frac{1}{2} b = 2 \sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} c.$$

5° Доказати да из односа

$$a + b + c = \pi,$$

$$\sin^3 x = \sin (a - x) \sin (b - x) \sin (c - x),$$

сљедује

$$\cot g\, x = \cot g\, a + \cot g\, b + \cot g\, c.$$

6° Доказати образац

$$tg\, 3 a = \frac{\sin a + \sin 3 a + \sin 5 a}{\cos a + \cos 3 a + \cos 5 a}.$$

7° Из обрасца

$$\cos a = \frac{\cos \varphi - 1}{1 - e \cos \varphi}$$

израчунати $tg \frac{1}{2} a$ као функцију од $tg \frac{1}{2} \varphi$

8° Доказати обрасце

$$\frac{\pi}{4} = arc\, tg \frac{1}{2} + arc\, tg \frac{1}{3} = arc\, tg \frac{1}{2} + arc\, tg \frac{1}{5} + arc\, tg \frac{1}{8}$$

$$= 2\, arc\, tg \frac{1}{2} - arc\, tg \frac{1}{7} = 2\, arc\, tg \frac{1}{3} + arc\, tg \frac{1}{7}$$

$$= 3\, arc\, tg \frac{1}{3} - arc\, tg \frac{2}{11} = 4\, arc\, tg \frac{1}{5} - arc\, tg \frac{1}{239}$$

$$= arc\ tg\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - arc\ tg\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

9° Ако су a, b, c у аритметичној постепености онда је

а) $tg\,(a-b) = \dfrac{\cos c - \cos a}{\sin a + \sin c} = \dfrac{\sin a - \sin c}{\cos a + \cos c}$

б) $\dfrac{tg\,(b-c)}{tg\,b} = \dfrac{\sin a - \sin c}{\sin a + \sin c}.$

Израчунавање синуса и косинуса помоћу редова.

52. *Израчунавање синуса.*

У № 46 доказано је, да је

$$a - \sin a < \frac{a^3}{6}$$

или што је свеједно

$$\sin a > a - \frac{a^3}{3!}.$$

Одавде сљедује, кад се место a метне $\frac{a}{3}$

$$\sin\frac{a}{3} > \frac{a}{3} - \frac{1}{2.3^4}\,a^3$$

и

$$\sin^3\frac{a}{3} > \frac{a^3}{3^3} - \frac{a^5}{2.3^5} + \frac{a^7}{4.3^8} - \frac{a^9}{8.3^{12}}.$$

Ако претпоставимо да је лук $a < 1$ онда је

$$\frac{a^7}{4.3^8} > \frac{a^9}{8.3^{12}},$$

дакле је тим пре

$$\sin^3\frac{a}{3} > \frac{a^3}{3^3} - \frac{a^5}{2.3^5}.$$

Ако сад у једначини

$$1) \qquad \sin a = 3 \sin \frac{a}{3} - 4 \sin^3 \frac{a}{3},$$

која нам је из № 46 позната, заменимо $\sin^3 \frac{a}{3}$ мањом количином $\frac{a^3}{3^3} - \frac{a^5}{2.3^5}$, десна ће страна једначине 1) постати већа, дакле ће онда бити

$$\sin a < 3 \sin \frac{a}{3} - \frac{4a^3}{3^3} + \frac{2a^5}{3^5};$$

замењујући овде a редом са a, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{3^2}$, $\frac{a}{3^3}$, ... $\frac{a}{3^{n-1}}$ добијамо

$$\sin a < 3 \sin \frac{a}{3} - \frac{4a^3}{3^3} + \frac{2a^5}{3^5},$$

$$\sin \frac{a}{3} < 3 \sin \frac{a}{3^2} - \frac{4a^3}{3^6} + \frac{2a^5}{3^{10}},$$

$$\sin \frac{a}{3^2} < 3 \sin \frac{a}{3^3} - \frac{4a^3}{3^9} + \frac{2a^5}{3^{15}},$$

$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\sin \frac{a}{3^{n-1}} < 3 \sin \frac{a}{3^n} - \frac{4a^3}{3^{3n}} + \frac{2a^5}{3^{5n}};$$

сабирајући ове неједнакости, пошто смо их најпре помножили редом са 1, 3, 3^2, ... , 3^{n-1}, добијамо

$$\sin a < 3^n \sin \frac{a}{3^n} - \frac{4a^3}{3^3}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2n-2}}\right]$$

$$+ \frac{2a^5}{3^5}\left[1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^8} + \dots\dots + \frac{1}{3^{4n-4}}\right],$$

или

$$\sin a < a.\frac{\sin\frac{a}{3^n}}{\left(\frac{a}{3^n}\right)} - \frac{4a^3}{3^3}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^{2n-2}}\right]$$

$$+ \frac{2a^5}{3^5}\left[1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^8} + \ldots\ldots + \frac{1}{3^{4n-4}}\right].$$

При бесконачном рашћењу броја n количина $a\dfrac{\sin\frac{a}{3^n}}{\left(\frac{a}{3^n}\right)}$ тежи очевидно граници a, док међутим геометријске постепености у заградама теже границама $\dfrac{3^2}{3^2-1}$, $\dfrac{3^4}{3^4-1}$; дакле је за $n = \infty$

$$\sin a < a - \frac{4a^3}{3^3}\cdot\frac{3^2}{3^2-1} + \frac{2a^5}{3^5}\cdot\frac{3^4}{3^4-1}$$

или

$$\sin a < a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!}.$$

Ако у овој неједнакости, која претпоставља лук $a < 1$, заменимо a са $\frac{a}{3}$, имаћемо

$$\sin\frac{a}{3} < \frac{a}{3} - \frac{a^3}{2.3^4} + \frac{a^5}{3^5.5!}$$

и с обзиром на то да је $a < 1$

$$\sin^3\frac{a}{3} < \frac{a^3}{3^3} - \frac{a^5}{2.3^5} + \frac{13\,a^7}{3^7.5!}.$$

Ако сад у једначини

$$\sin a = 3\sin\frac{a}{3} - 4\sin^3\frac{a}{3}$$

заменимо $\sin^3 \frac{a}{3}$ већом количином $\frac{a^3}{3^3} - \frac{a^5}{2.3^5} + \frac{13\,a^7}{5!\;3^7}$ десна ће се страна умалити, дакле ће после те замене бити

$$\sin a > 3 \sin \frac{a}{3} - \frac{4a^3}{3^3} + \frac{2a^5}{3^5} - \frac{52\,a^7}{3^7.5!};$$

замењујући овде a редом са $a, \frac{a}{3}, \frac{a}{3^2} \cdots\cdots \frac{a}{3^{n-1}}$, налазимо

$$\sin a > 3 \sin \frac{a}{3} - \frac{4a^3}{3^3} + \frac{2a^5}{3^5} - \frac{52\,a^7}{3^7.5!},$$

$$\sin \frac{a}{3} > 3 \sin \frac{a}{3^2} - \frac{4a^3}{3^6} + \frac{2a^5}{3^{10}} - \frac{52\,a^7}{3^{14}.\,5!},$$

$$\sin \frac{a}{3^2} > 3 \sin \frac{a}{3^3} - \frac{4a^3}{3^9} + \frac{2a^5}{3^{15}} - \frac{52\,a^7}{3^{21}.\,5!},$$

. . . .

$$\sin \frac{a}{3^{n-1}} > 3 \sin \frac{a}{3^n} - \frac{4a^3}{3^{3n}} + \frac{2a^5}{3^{5n}} - \frac{52\,a^7}{3^{7n}.\,5!};$$

сабирајући ове неједнакости, пошто смо их најпре помножили редом са 1, 3, 3^2 . . . . 3^{n-1}, добијамо

$$\begin{aligned}\sin a > 3^n \sin \frac{a}{3^n} &- \frac{4a^3}{3^3}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^{2n-2}}\right]\\ &+ \frac{2a^5}{3^5}\left[1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^8} + \cdots + \frac{1}{3^{4n-4}}\right]\\ &- \frac{52\,a^7}{3^7.\,5!}\left[1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^{12}} + \cdots + \frac{1}{3^{6n-6}}\right]\end{aligned}$$

или

$$\sin a > a \frac{\sin \frac{a}{3^n}}{\left(\frac{a}{3^n}\right)} - \frac{4a^3}{3^3}\left[1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \ldots + \frac{1}{3^{2n-2}}\right]$$

$$+ \frac{2a^5}{3^5}\left[1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^8} + \ldots + \frac{1}{3^{4n-4}}\right]$$

$$- \frac{52a^7}{3^7 . 5!}\left[1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^{12}} + \ldots + \frac{1}{3^{6n-6}}\right]$$

За $n = \infty$ добијамо одавде

$$\sin a > a - \frac{4a^3}{3^3} \cdot \frac{3^2}{3^2 - 1} + \frac{2a^5}{3^5} \cdot \frac{3^4}{3^4 - 1}$$

$$- \frac{52\, a^7}{3^7 . 5!} \cdot \frac{3^6}{3^6 - 1}$$

или $$\sin a > a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!}.$$

Радећи и даље по методи, по којој смо узастопце нашли

$$\sin a > a - \frac{a^3}{3!},$$

$$\sin a < a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!},$$

$$\sin a > a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!},$$

наћићемо из последње неједнакости

$$\sin a < a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \frac{a^9}{9!},$$

из ове

$$\sin a > a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \frac{a^9}{9!} - \frac{a^{11}}{11!}$$

и т. д.

Закључимо дакле да се $sin\,a$ мора налазити између сљедећа два збира

$$a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{a^{2m-1}}{(2m-1)!},$$

$$a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{a^{2m-1}}{(2m-1)!}$$

$$+ (-1)^m \frac{a^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

где m значи буди какав цео и положан број. Разлика између $sin\,a$ и првог од ова два збира мора бити мања од разлике тих збирова т. ј. мања од

$$\frac{a^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

ако је дакле θ буди какав између 0 и 1 налазећи се број, то можемо написати

$$2) \qquad sin\,a = a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \ldots .$$

$$+ (-1)^{m-1}\frac{a^{2m-1}}{(2m-1)!} + (-1)^m \frac{\theta a^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

Помоћу овог реда, у коме a значи лук али у деловима полупречника изражен, може се из познатог лука израчунати његов синус и то тим тачније, што се год више чланова тога реда буде у рачун узело. Ово напослетку речено биће јасно, кад се само погледа на последњи члан, који се зове остатак реда и претставља погрешку, кад се ред са $m^{\text{им}}$ чланом прекине, јер тај је члан очевидно тим мањи што је год m веће, то ће рећи што је год даље идући с лева на десно онај члан, са којим се ред прекида.

За $sin\,a$ нађени образац изведен је са претпоставком, да је лук $a < 1$, но у вишој математици доказује се, да он вреди за све вредности лука a лежеће између $-\infty$ и $+\infty$.

Израчунавање косинуса.

Из № 30 познато је, да је

$$3) \qquad \cos a = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2}.$$

Пошто је

$$\sin \frac{a}{2} < \frac{a}{2} \text{ а } > \frac{a}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{2}\right)^3 \text{ или } > \frac{a}{2} - \frac{a^3}{48}$$

то је

$$\cos a > 1 - \frac{a^2}{2}$$

и

$$\cos a < 1 - 2\left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{48}\right)^3 \text{или} < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24} - 2\left(\frac{a^3}{48}\right)^2,$$

дакле тим пре $\cos a < 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!}.$

Пошто је даље

$$\sin \frac{a}{2} < \frac{a}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{a}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{a}{2}\right)^5,$$

то добијамо из једначине 3) замењујући у њој $\sin \frac{a}{2}$ том већом вредношћу:

$$\cos a > 1 - 2\left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{3!\,2^3} + \frac{a^5}{5!\,2^5}\right)^2$$

или

$$\cos a > 1 - 2\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{3!\,2^3} + \frac{a^6}{(3!)^2\,2^6} + \frac{a^6}{5!\,2^5} - \frac{a^8}{5!\,3!\,2^7} + \frac{a^{10}}{(5!)^2\,2^{10}}\right);$$

но како је $a < 1$, то је очевидно тим пре

$$\cos a > 1 - 2\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{3!\,2^3} + \frac{a^6}{(3!)^2\,2^6} + \frac{a^6}{5!\,2^5}\right)$$

или

$$\cos a > 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!}.$$

Ако опет у једначини 3) заменимо $\sin\frac{a}{2}$ мањом вредношћу

$$\frac{a}{2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{a}{2}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{a}{2}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{a}{2}\right)^7$$

добићемо

$$\cos a < 1 - 2\left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{3!\,2^3} + \frac{a^5}{5!\,2^5} - \frac{a^7}{7!\,2^7}\right)^2$$

или

$$\cos a < 1 - 2\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{3!\,2^3} + \frac{a^6}{(3!)^2\,2^6} - \frac{a^8}{3!5!2^7}\right.$$
$$+ \frac{a^{10}}{3!7!2^9} - \frac{a^{12}}{5!7!\,2^{11}} + \frac{a^6}{5!\,2^5} - \frac{a^8}{7!\,2^7} + \frac{a^{10}}{(5!)^2 2^{10}}$$
$$\left. + \frac{a^{14}}{(7!)^2\,2^{14}}\right);$$

но како је $a < 1$, то је тим пре

$$\cos a < 1 - 2\left(\frac{a^2}{4} - \frac{a^4}{3!\,2^3} + \frac{a^6}{(3!)^2\,2^6} - \frac{a^8}{3!5!2^7}\right.$$
$$\left. + \frac{a^6}{5!\,2^5} - \frac{a^8}{7!\,2^7}\right),$$

или $$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \frac{a^8}{8!}.$$

Продужујући по показаној методи наћићемо из ове неједнакости

$$\cos a > 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \frac{a^8}{8!} - \frac{a^{10}}{10!},$$

из ове

$$\cos a < 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \frac{a^8}{8!} - \frac{a^{10}}{10!} + \frac{a^{12}}{12!},$$

и т. д.

закључимо дакле да се $\cos a$ мора налазити између сљедеће две количине

$$1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \ldots + (-1)^{m-1} \frac{a^{2m-2}}{(2m-2)!},$$

$$1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \ldots + (-1)^{m-1} \frac{a^{2m-2}}{(2m-2)!}$$
$$+ (-1)^m \frac{a^{2m}}{2m!},$$

где m значи буди какав цео и положан број. Разлика између $\cos a$ и прве од ових двеју количина мања је од разлике тих количина то ће рећи од

$$\frac{a^{2m}}{2m!};$$

ако је дакле θ један између 0 и 1 налазећи се број, то можемо ставити

$$4) \qquad \cos a = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \ldots .$$
$$+ (-1)^{m-1} \frac{a^{2m-2}}{(2m-2)!} + (-1)^m \frac{\theta a^{2m}}{2m!}.$$

Ово је образац, који даје косинус лука a, кад је овај последњи познат, и то тим тачније, што се год више чланова буде у рачун узело; јер последњи члан нађеног реда који се зове остатак реда и значи погрешку, кад се при израчунавању косинуса стане код $m^{\text{ог}}$ члана, очевидно је тим мањи, што је год m, то јест број у рачун узетих чланова, веће.

И овај образац изведен је са претпоставком да је лук $a < 1$; но и он, као што се у вишој математици доказује, вреди за све вредности лука a између $-\infty$ и $+\infty$.

Таблице логаритама тригонометријских функција.

53. У применама тригонометрије рачуни се увек свршавају помоћу логаритама; због тога је нужније имати логаритме тригонометријских функција него ли њих саме. Пошто су синуси и косинуси лукова од 10″ до 10″ једном израчунати, није тешко склопити таблицу њихових логаритама. Кад је ова готова, моћиће се саставити таблица логаритама тангената и котангената помоћу образаца

$$log\ tg\ a = log\ sin\ a - log\ cos\ a,$$
$$log\ cotg\ a = log\ cos\ a - log\ sin\ \text{a}.$$

Синуси и косинуси лукова од 0° до 90°, тангенте лукова испод 45° и котангенте лукова од 45° до 90° мањи су од јединице; њихови логаритми морају дакле бити одречни. Да би се избегле одречне значице, због којих би формат таблица морао бити већи, додато је десет јединица сваком одречном логаритму, а у неким таблицама свима логаритмима без разлике; при исписивању логаритама треба дакле тих десет јединица одузети.

Распоред логаритамско-тригонометријских седмомесних таблица.

54. У истим таблицама долази најпре једна мала таблица са логаритмима синуса и тангената лукова од 0° до 5°; стални размак тих лукова износи 1″. Логаритми синуса

sin 3°

″	12′	13′	14′	15′	16′	17′	″
0	8·7468015	8·7490553	8·7512973	8·7535278	8·7557469	8·7579546	60
1	8·7468392	8·7490927	8·7513346	8·7535649	8·7557838	8·7579913	59
2	8·7468769	8·7491302	8·7513718	8·7536020	8·7558206	8·7580280	58
3	8·7469145	8·7491676	8·7514091	8·7536390	8·7558575	8·7580647	57
4	8·7469522	8·7492051	8·7514464	8·7536761	8·7558944	8·7581014	56
5	8·7469898	8 7492425	8·7514836	8·7537132	8·7559313	8·7581381	55
6	8·7470274	8·7492800	8·7515209	8·7537502	8·7559682	8·7581748	54
7	8·7470651	8·7493174	8·7515581	8·7537873	8·7560050	8·7582115	53
8	8·7471027	8·7493549	8·7515954	8·7538243	8·7560419	8·7582481	52
9	8·7471403	8·7493923	8·7516326	8·7538614	8·7560788	8·7582848	51
10	8·7471780	8·7494297	8·7516699	8·7538984	8·7561156	8·7583215	50
11	8·7472156	8·7494672	8·7517071	8·7539355	8·7561525	8·7583582	49
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
49	8·7486430	8 7508871	8·7531197	8·7553409	8·7575507	8·7597493	11
50	8·7486805	8·7509244	8·7531569	8·7553778	8·7575874	8·7597859	10
51	8·7487180	8·7509617	8·7531940	8·7554147	8·7576242	8·7598224	9
52	8·7487554	8·7509990	8·7532311	8·7554517	8·7576609	8·7598589	8
53	8·7487929	8·7510363	8·7532682	8·7554886	8·7576976	8·7598955	7
54	8·7488304	8·7510736	8·7533053	8·7555255	8·7577344	8·7599320	6
55	8·7488679	8·7511109	8·7533424	8·7555624	8·7577711	8·7599685	5
56	8·7489054	8·7511482	8·7533795	8·7555993	8·7578078	8·7600051	4
57	8·7489429	8·7511855	8·7534166	8·7556362	8·7578445	8·7600416	3
58	8·7489803	8·7512228	8·7534536	8·7556731	8·7578812	8·7600781	2
59	8·7490178	8·7512600	8·7534907	8·7557100	8·7579179	8·7601147	1
60	8·7490553	8·7512973	8·7535278	8·7557469	8·7579546	8·7601512	0
″	47′	46′	45′	44′	43′	42′	″

cos 86°

оје на левим, а они тангената на десним странама. Сте-
ни лукова стоје на челу страна, минуте у првој хоризон-
лној врсти а секунде у првом стубу с лева и у истој
сти са логаритмима синуса и тангената лукова. Пошто су
нус и тангента каквог лука односно косинус и котангента
говог комплемента, то иста таблица даје и логаритме ко-
нуса и котангената лукова од 85° до 90°. На левим су
ранама дакле логаритми косинуса а на десним логаритми
тангената истих лукова. Степени тих лукова стоје на дну
раза, минуте у последњој хоризонталној врсти а секунде
последњем с десна стубу.

Зарад бољег разумевања прештампалисмо на страни 108
чести једну страну такве мале таблице из Вегиног дела
ogarithmisch-Trigonometrisches Handbuch“ десето из-
ње од Dr. C. Bremiker-a.

55. После таблице, коју пређосмо, долази таблица са
гаритмима синуса, косинуса, тангената и котангената лу-
ва између 0° и 45°; стални размак тих лукова износи
″. Степени лукова стоје на челу страна а минуте и се-
нде у првом и другом стубу с лева. Логаритми синуса,
синуса, тангената и котангената налазе се у стубовима,
ји су озго са *sin*, *cos*, *tg*, *cotg* означени и у истој врсти
секундама одговарајућих лукова. Десно од стуба, у коме
логаритми синуса, стоји стуб са d (differentia) означен;
њему стоје разлике лево стојећих логаритама синуса; оне
изражене јединицама седмог децималног места и написане
између оних логаритама, које треба одузети, па да исте
ађу. Такав стуб разлика стоји и до стуба, у коме су
гаритми косинуса. Између стубова, у којима су логаритми
нгената и котангената стоји стуб са *d c* (differentia com-
una) означен. Бројеви тога стуба јесу разлике не само
во стојећих логаритама тангената већ и десно налазећих
логаритама котангената усљед обрасца

33°

	461
1	46·1
2	92·2
3	138·3
4	184·4
5	230·5
6	276·6
7	322·7
8	368·8
9	414·9

	460
1	46·0
2	92.0
3	138·0
4	184·0
5	230·0
6	276·0
7	322·0
8	368·0
9	414·0

	138
1	13·8
2	27·6
3	41·4
4	55·2
5	69·0
6	82·8
7	96·6
8	110·4
9	124·2

'	"	sin	d	tang.	d.c.	cotg.	cos.	d	"	'
0	0	9·7361088	324	9·8125174	461	0·1874826	9·9235914	137	0	60
	10	9·7361412	324	9·8125635	460	0·1874365	9·9235777	136	50	
	20	9·7361736	324	9·8126095	461	0·1873905	9·9235641	137	40	
	30	9·7362060	324	9·8126556	461	0·1873444	9·9235504	137	30	
	40	9·7362384	324	9·8127017	461	0·1872983	9·9235367	137	20	
	50	9·7362708	324	9·8127478	461	0·1872522	9·9235230	137	10	
1	0	9·7363032	324	9·8127939	461	0·1872061	9·9235093	136	0	59
	10	9·7363356	324	9·8128400	461	0·1871600	9·9234957	137	50	
	20	9·7363680	324	9·8128861	460	0·1871139	9·9234820	137	40	
	30	9·7364004	324	9·8129321	461	0·1870679	9·9234683	137	30	
	40	9·7364328	324	9·8129782	461	0·1870218	9·9234546	137	20	
	50	9·7364652	324	9·8130243	461	0·1869757	9·9234409	137	10	
2	0	9·7364976	324	9·8130704	460	0·1869296	9·9234272	137	0	58
	10	9·7365300	323	9·8131164	461	0·1868836	9·9234135	137	50	
	20	9·7365623		9·8131625		0·1868375	9·9233998		40	
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	50	9·7378223	323	9·8149576	460	0·1850424	9·9228647	138	10	
9	0	9·7378546	322	9·8150036	460	0·1849964	9·9228509	137	0	51
	10	9·7378868	322	9·8150496	460	0·1849504	9·9228372	138	50	
	20	9·7379190	323	9·8150956	460	0·1849044	9·9228234	137	40	
	30	9·7379513	322	9·8151416	460	0·1848584	9·9228097	138	30	
	40	9·7379835	322	9·8151876	460	0·1848124	9·9227959	138	20	
	50	9·7380157	322	9·8152336	459	0·1847664	9·9227821	137	10	
10	0	9·7380479		9·8152795		0·1847205	9·9227684		0	50
'	"	cos	d	cotg	d.c.	tang.	sin	d	"	'

56°

$$\log tg\, a - \log tg\, b = \log cotg\, b - \log cotg\, a,$$

који постаје, кад се у обрасцу

$$\frac{tg\, a}{tg\, b} = \frac{cotg\, b}{cotg\, a}$$

лево и десно узму логаритми.

На основу својства комплементних лукова логаритми синуса, косинуса, тангената и котангената лукова између 0° и 45° јесу редом логаритми косинуса, синуса, котангената и тангената лукова између 90° и 45°. С тога стубови, који су озго са *sin*, *cos*, *tg* и *cotg* означени, означени су оздо са *cos*, *sin*, *cotg* и *tg*. Доњи означаји вреде дакле за луке од 45° до 90°. Степени тих лукова стоје на дну страна, минуте у последњем а секунде у претпоследњем стубу и у истој врсти са логаритмима одговарајућих тригонометријских функција.

Да би се ово боље разумело, прештампалисмо на страни 110 отчести једну страну из поменутог Вегиног дела.

Употреба таблица.

56. *Задатак I. Дат је број степена, минута и секунада једног лука мањег од 90°; тражи се логаритам његовог синуса, косинуса, тангенте и котангенте.*

Први случај. Ако дани лук има степене, минуте и десетице секунада, треба најпре степене тражити на челу или на дну страна, како је кад лук мањи или већи од 45°. Минуте треба тражити у првом стубу с лева идући одозго на доле, ако је лук мањи од 45°, или у последњем стубу идући одоздо на горе, ако је лук већи од 45°. Кад су минуте нађене, треба прећи у стуб секунада па ићи даље истим правцем, док се ненаиђе на десетице секунада; у истој врсти са овима стоје тражени логаритми синуса, косинуса, тангенте и котангенте.

Ако се на пример тражи *log cos* 67° 56′ 30″, тражићу најпре 67° на дну страна; пошто сам нашао, ићи ћу у последњем стубу одоздо на горе, док не наиђем на 56′; затим ћу прећи у претпоследњи стуб секунада и ићи у њему истим правцем то јест на горе дотле, док ненаиђем на 30″; у истој врсти и у стубу, који је оздо са *cos* означен, наћи ћу број 9·5746682. То је тражени али за 10 јединица већи логаритам. Дакле је

$$\begin{aligned} log\ cos\ 67^\circ 56' 30'' &= 9{\cdot}5746682 - 10 \\ &= 0{\cdot}5746682 - \ \ 1 \end{aligned}$$

Ако се тражи *log tg* 17°37′20″, тражићу најпре 17° на челу страна и пошто сам нашао, прећићу у први стуб, где ћу ићи одозго на доле све дотле, док ненаиђем на 37′; затим ћу прећи у стуб секунада и ићи истим правцем то јест на доле, док ненаиђем на 20″; у истој врсти и у стубу, који је озго са *tg* означен, наћићу 9·5019429. То је тражени али за 10 јединица већи логаритам. Дакле је

$$\begin{aligned} log\ tg\ 17^\circ 37' 20'' &= 9{\cdot}5019429 - 10 \\ &= 0{\cdot}5019429 - \ \ 1 \end{aligned}$$

Други случај. Нека дани лук има још јединице и разломке секунде, које разломке можемо као десетне претпоставити, и нека се, узмимо најпре, тражи *log sin* данога лука. Дани лук налази се по својој величини између два таблична са 10″ разликујућа се лука; с тога логаритам његовог синуса мора се налазити између логаритама синуса тих табличних лукова. Разлика логаритама синуса даног и непосредно мањег табличног лука мора дакле бити мања од разлике логаритама синуса поменутих табличних лукова, која се последња разлика налази у таблицама и зато зове *таблична*. Разлику логаритама синуса даног и непосредно мањег табличног лука тако звану *поправку* треба дакле наћи и додати логаритму синуса непосредно мањег табличног лука, па ћемо имати *log sin* данога лука. Сличним умовањем наћићемо, да се *log tg* исто тако добија, а *log cos* и *log cotg*, кад се нађена поправка одузме од *log cos* и *log cotg* непосредно мањег табличног лука, јер познато је, да већи лук има мањи косинус и котангенту па дакле и мањи *log cos* и *log cotg*. Питање је сад како се налази поправка. Изналажај исте оснива се на сљедећем начелу:

Врло мале промене каквог лука сразмерне су одговарајућим променама логаритама његових тригонометријских функција.

Поменута сразмерност није савршена, али употребљена даје доста тачне резултате, осим у случају, којим ћемо се мало ниже бавити. О приближној истинитости поменутог начела можемо се уверити посматрањем самих таблица; у њима ћемо видити, да су, осим у почетку таблица, разлике логаритама тригонометријских функција за дуго приметно сталне, одакле сљедује, да једнаким променама лукова одговарају приметно једнаке промене логаритама њихових тригонометријских функција.

Узимајући да је $\triangle$ таблична разлика, дакле промена логаритма тригонометријске функције непосредно мањег табличног лука, кад исти лук са 10″ нарасти, да је d разлика између даног и непосредно мањег табличног лука а δ тражена поправка или промена логаритма тригонометријске функције непосредно мањег табличног лука, кад исти лук са d нарасти, имамо на основу горе поменутог начела

$$\frac{\delta}{\triangle} = \frac{d}{10} \quad \text{одакле} \quad \delta = \frac{\triangle}{10}\, d$$

$\frac{\triangle}{10}$ јесте промена логаритма тригонометријске функције непосредно мањег табличног лука, кад исти са 1″ нарасти и зове се разлика за 1″. Дакле се поправка добија, кад се разлика за 1″ помножи разликом d даног и непосредно мањег табличног лука. Ово множење може се врло често свести на просто сабирање, почем се производи многих табличних разлика са бројевима од 0·1 до 0·9 налазе у таблицама. Пошто $\triangle$ и δ претстављају бројеве изражене јединицама седмог децималног места, то за δ треба узети само цели део производа $\frac{\triangle}{10}d$, који део треба са 1 повећати, ако је занемарени десетни део већи од 0·5.

Узмимо да се тражи

1° $\log \sin 51^\circ\, 22'\, 35{\cdot}7''$

$$\begin{array}{lrl}
\log \sin 51^\circ\, 22'\, 30'' = 9{\cdot}8927890 - 10 & & \triangle = 168 \\
\text{због } 5{\cdot}7'' \ldots\ldots & 95{\cdot}76 & \\
\hline
\log \sin 51^\circ\, 22'\, 35{\cdot}7'' = 9{\cdot}8927986 - 10 & &
\end{array}$$

2° $\log \cos 39^\circ\, 44'\, 23{\cdot}5''$

$$\begin{array}{lrl}
\log \cos 39^\circ\, 44'\, 20'' = 9{\cdot}8859070 - 10 & & \\
\text{због } 3{\cdot}5'' \ldots\ldots & -\ 61{\cdot}25 & \triangle = 175 \\
\hline
\log \cos 39^\circ\, 44'\, 23{\cdot}5'' = 9{\cdot}8859009 - 10 & &
\end{array}$$

3° $\log tg\ 77^\circ\, 18'\, 57{\cdot}8''$

$$\begin{array}{lrl}
\log tg\ 77^\circ\, 18'\, 50'' = 0{\cdot}6476148 & & \triangle = 983 \\
\text{због } 7{\cdot}8'' \ldots\ldots & 766{\cdot}74 & \\
\hline
\log tg\ 77^\circ\, 18'\, 57{\cdot}8'' = 0{\cdot}6476915. & &
\end{array}$$

4° $\log cotg\ 46^\circ\, 29'\, 41{\cdot}9''$

$$\begin{array}{lrl}
\log cotg\ 46^\circ\, 29'\, 40'' = 9{\cdot}9773343 - 10 & & \triangle = 421 \\
\text{због } 1{\cdot}9'' \ldots\ldots & -\ 79{\cdot}99 & \\
\hline
\log cotg\ 46^\circ\, 29'\, 41{\cdot}9'' = 9{\cdot}9773263 - 10 & &
\end{array}$$

log sin и *log tg* каквог лука између 0° и 5° као и *log cos* и *log cotg* каквог лука између 85° и 90° може се непосредно у горе споменутој малој таблици наћи, ако дани лук осим степена и минута има још само цео број секунада; но ако дани лук има и делове секунде, онда се логаритам тражи помоћу исте таблице на горе показани начин. С обзиром на обрасце

$$tg\,a = \frac{1}{cotg\,a},\ log\,tg\,a = -\,log\,cotg\,a,$$

добијамо помоћу исте мале таблице *log cotg* каквог лука између 0° и 5° узимајући *log tg* истог лука са противним знаком; на исти начин може се добити и *log tg* каквог лука између 85° и 90° узимајући *log cotg* тога лука са противним знаком,

Ако се на пример тражи *log tg* 1°45′57·82″, то је

$$\begin{array}{lrl} log\,tg\ 1^\circ\,45'\,57'' = & 8{\cdot}4889646 - 10 & \\ \text{због } 0{\cdot}82'' \ldots\ldots & 560{\cdot}88 & \quad \frac{\Delta}{10} = 684 \\ \hline log\,tg\ 1^\circ\,45'\,57{\cdot}82'' = & 8{\cdot}4890207 - 10 & \end{array}$$

Трећи случај. Ако се табличне разлике нагло мењају, што је случај код синуса, тангенте и котангенте, кад је дани лук врло мали ($< 20'$), онда показана метода не даје довољно тачне резултате. У том случају ево како треба радити.

Узимајући да је дани лук изражен у секундама, нека је *a* цели а *d* разломљени део броја секунада данога лука; разломљени део можемо као десетни претпоставити. Да би сад *log sin* $(a + d)$ и *log tg* $(a + d)$ нашли, можемо (№ 45) узети, да је размера врло малих лукова једнака размери њихових синуса и њихових тангената, да је то јест

$$\frac{sin\,(a+d)}{sin\,a} = \frac{a+d}{a},\qquad \frac{tg\,(a+d)}{tg\,a} = \frac{a+d}{a};$$

из ових једначина следује:

$$\log \sin (a + d) = \log (a + d) + \log \sin a - \log a ,$$
$$\log tg (a + d) = \log (a + d) + \log tg a - \log a.$$

Тражећи *log sin a* и *log tg a* у малој таблици, а *log* $(a + d)$ и *log a* у таблици логаритама бројева добићемо помоћу ових образаца *log sin* $(a + d)$ и *log tg* $(a + d)$.

Употреба ових образаца нешто је олакшана тиме, што се разлике

$$\log \sin a - \log a = \log \frac{\sin a}{a}$$

$$\log tg a - \log a = \log \frac{tg a}{a}$$

налазе у таблици логаритама бројева, али са 10 увећане и на дну оне стране, где је број *a* и његов логаритам; прва разлика налази се међу бројевима под знаком *S* а друга под знаком *T*, обе пак десно од броја *a*; 4·685 јесу прве четири цифре бројева под *S* и *T*. Ако број *a* неби био и на дну оне стране, где је он и његов логаритам нађен, онда треба од бројева под *S* и *T* узети онај, спрам којега се стојећи број секунада од *a* најмање разликује.

Нека се на пример тражи *log tg* 0° 4′37·45″. Исти лук у секундама изражен има 277·45″; дакле је $a = 277$ $d = 0{\cdot}45$. *log tg* од 277″ или 4′37″ јесте 7·1280549—10; логаритам броја 277·45 је 2·4431847, и најзад логаритам броја 277 јесте 2·4424798; сабирајући прва два логаритма и од добивеног збира трећи одузимајући налазимо

$$\log tg\ 0^{\circ}\ 4'\ 37{\cdot}45'' = 7{\cdot}1287598 - 10$$

log cotg врло малог лука добија се, кад се *log tg* нађе на показани начин и узме са противним знаком.

Ако се тражи *log cos* врло малог лука $(a + d)$, узећемо образац

$$\cos(a + d) = \frac{\sin(a + d)}{tg\,(a + d)},$$

из којег изводимо

$$\log\cos(a + d) = \log\sin(a + d) - \log tg\,(a + d),$$

образац, помоћу којег се налази $\log\cos(a + d)$, пошто су помоћу горњих образаца нађени $\log\sin$ и $\log tg$ лука $(a + d)$. Но последни образац по замени $\log\sin$ и $\log tg$ њиховим горњим вредностима претвара се у

$$\log\cos(a + d) = \log\sin a - \log tg\, a = \log\cos a,$$

из чега сљедује, да су логаритми косинуса лукова $(a + d)$ и a приметно једнаки, што се у осталом и у самим таблицама може видети.

Узмимо да се на пример тражи $\log\cos 0^{\circ}\, 5'\, 43{\cdot}76''$. Дани лук лежи између табличних лукова $5'\, 40''$ и $5'\, 50''$, којих косинуси имају исти логаритам $9{\cdot}9999994 - 10$, због чега је и

$$\log\cos 0^{\circ}\, 5'\, 43{\cdot}76'' = 9{\cdot}9999994 - 10.$$

Тражење $\log\cos$, $\log tg$, и $\log cotg$ каквог лука близу 90°, у ком се случају табличне разлике такође нагло мењају, своди се на тражење $\log\sin$, $\log cotg$ и $\log tg$ комплемента.

57. *Задатак II. Дат је логаритам једне тригонометријске функције, тражи се број степена, минута и секунада одговарајућег лука.*

Први случај. Дати логаритам треба тражити или у стубу, који је озго или у оном, који је оздо означен именом функције, чији је логаритам дат; и то у првом, ако је тражени лук мањи а у другом ако је он већи од 45°. Да би увек одма могли знати, да ли је тражени лук мањи или већи од 45°, треба само запамтити да је

$$log\ sin\ 45^\circ = log\ cos\ 45^\circ = 9{\cdot}8494850 - 10\,,$$
$$log\ tg\ 45^\circ = log\ cotg\ 45^\circ = 0\,,$$

и да већи лук има већи $log\ sin$ и $log\ tg$ а мањи $tog\ cos$ и $log\ cotg$. По томе биће тражени лук мањи или већи од 45°, како је кад дани $log\ sin$ мањи или већи а дани $log\ cos$ већи или мањи од $9{\cdot}8494850 - 10$; даље како је кад дани $log\ tg$ мањи или већи а дани $log\ cotg$ већи или мањи од 0.

Ако је дати логаритам нађен у стубу, који је озго означен именом функције, чији је логаритам дат, бацићемо очи на други стуб с лева, где ћемо у истој врсти са даним логаритмом наћи десетице секунада траженога лука. Затим ћемо прећи у први стуб с лева, где ћемо или у истој врсти или мало више наћи број тражених минута; на послетку број степена наћићемо на челу стране. Но ако је стуб, где је нађен дати логаритам, означен оздо именом функције, чији је логаритам дат, онда ћемо погледати на претпоследњи стуб десно, где ћемо у истој врсти са даним логаритмом наћи секунде траженога лука; затим ћемо прећи у последњи стуб, где ћемо или у истој врсти или мало ниже наћи тражене минуте; напослетку тражене степене наћићемо на дну стране.

Узмимо на пример да је $log\ sin\ x = 9{\cdot}7561757 - 10$, и да се тражи лук x. Пошто је дати логаритам мањи од $9{\cdot}8494850 - 10$, то ће тражени лук x морати бити мањи од 45°; због тога ћемо дани логаритам тражити у стубу, који је озго са sin означен; нашавши га бацићемо очи на други стуб с лева, где ћемо у истој врсти наћи $40''$; прешавши затим у први стуб с лева, наћи ћемо не у истој врсти него мало више $46'$; најзад на челу стране наћићемо 34°. Дакле је тражени лук

$$x = 34^\circ\ 46'\ 40''.$$

Други случај. Ако се, што је понајчешће случај, дани логаритам у таблицама неналази, но лежи између два узастопна таблична логаритма, онда и тражени одговарајући лук мора лежати између лукова, који поменутим табличним логаритмима одговарају; одатле сљедује, да разлика лукова: траженог који даном и оног, који непосредно мањем табличном логаритму одговара, мора бити мања од 10″. Да би тражени лук нашли, треба очевидно само ту разлику наћи, па је код синуса и тангенте додати а код косинуса и котангенте одузети од лука, који одговара непосредно мањем табличном логаритму, јер већем *log sin* и *log tg* одговара већи лук, док међутим већем *log cos* и *log cotg* одговара мањи лук. Тражење исте разлике оснива се на начелу, које је у другом случају I-вог задатка споменуто.

Ако је $\triangle$ разлика табличних логаритама, између којих се дани налази, δ разлика даног и непосредно мањег табличног логаритма и d разлика њима одговарајућих лукова, то је

$$\frac{d}{10}=\frac{\delta}{\triangle} \text{ одакле } d=\frac{10\delta}{\triangle}=\frac{\delta}{\left(\frac{\triangle}{10}\right)}$$

Број d значи јединице и делове секунде, које ће се код синуса и тангенте додати а код косинуса и котангенте одузети од лука, који одговара непосредно мањем табличном логаритму; исти се број, као што се види, добија деобом броја δ са разликом за 1″.

Узмимо да се тражи лук x, кад је дат

$$1^{\circ}\ log\ sin\ x = 9{\cdot}8742956 - 10 \qquad \triangle = 187$$
$$log\ sin\ 48^{\circ}\ 28'\ 30'' = \underline{9{\cdot}8742884 - 10} \qquad d=72:18{\cdot}7=3{\cdot}85$$
$$72$$

$x = 48^{\circ}\ 28'\ 33{\cdot}85''$.

$$2^{\circ}\ log\ cos\ x = 9{\cdot}8896052 - 10 \qquad \triangle = 171$$
$$log\ cos\ 39^{\circ}\ 8'\ 50'' = \underline{9{\cdot}8895966 - 10} \qquad d=86:17{\cdot}1=5{\cdot}03$$
$$86$$

$$x = 39^{\circ}\, 8'\, 44{\cdot}97''.$$

$$\begin{array}{rll}
3^{\circ} \quad \log tg\, x & = 9{\cdot}6087209-10 & \triangle = 604 \\
\log tg\, 22^{\circ}\; 6'\; 20'' & = \underline{9{\cdot}6087087-10} & d=122:60{\cdot}4=2{\cdot}02. \\
 & \quad 122 &
\end{array}$$

$$x = 22^{\circ}\, 6'\, 22{\cdot}02''.$$

$$\begin{array}{rll}
4^{\circ} \quad \log cotg\, x & = 0{\cdot}4869004-10 & \triangle = 714 \\
\log cotg\, 18^{\circ}\, 3'\, 10'' & = \underline{0{\cdot}4868645-10} & d=359:71{\cdot}4=5{\cdot}03 \\
 & \quad 359 &
\end{array}$$

$$x = 18^{\circ}\, 3'\, 4{\cdot}97''.$$

Ако је познат *log sin* и *log tg* каквог лука између 0° и 5°, или *log cos* и *log cotg* каквога лука између 85° и 90° треба, да би се до што тачнијих резултата дошло, прибећи малој таблици, у којој луци иду од 1″ до 1″, а у осталом радити, као што је мало час показано. Ако је напослетку дат *log cotg* каквог лука између 0° и 5° или *log tg* каквог лука између 85° и 90° треба дани логаритам узети са противним знаком; на тај начин имаћемо у првом случају *log tg* а у другом *log cotg* траженог лука, који се затим помоћу мале таблице на показани начин налази.

Узмимо на пример да се тражи лук x, кад је

$$\begin{array}{rll}
\log cos\, x & = 8{\cdot}3900031-10 & \frac{\triangle}{10} = 857 \\
\log cos\, 88^{\circ}\, 35'37'' & = \underline{8{\cdot}3899392-10} & d=639:857=0{\cdot}74 \\
 & \quad 639 &
\end{array}$$

$$x = 88^{\circ}\, 35'\, 36{\cdot}26''.$$

Трећи случај. Ако се табличне разлике нагло мењају, онда показани начин недаје довољно тачне резултате. То се дешава, кад се какав врло мали лук тражи из свог *log sin*, *log tg* и *log cotg* или кад се какав сасвим близу 90° налазећи се лук тражи из свог *log cos*, *log cotg* и *log tg*. У таквом случају ево како треба радити.

Претпостављајући најпре да се један врло мали лук
ражи из свог $\log \sin$ или $\log tg$, тражићемо у првој-малој-
аблици логаритам, који је даном најближи и одговарајући
ук изразићемо у секундама; означавајући број тих секу-
ада са a, а са са $a + d$ број секунада траженог такође
секундама израженог лука, израчунаћемо $a + d$ помоћу
едног од сљедећих образаца

$$\log (a + d) = \log \sin (a + d) - [\log \sin a - \log a],$$

$$\log (a + d) = \log tg (a + d) - [\log tg\, a - \log a],$$

оји су већ у првом задатку споменути.

Употреба ових образаца нешто је олакшана тиме, што
е, као што смо то већ једном рекли, разлике у заградама
тојеће налазе, али са 10 јединица увећане, у таблицама ло-
аритама бројева.

Узмимо на пример да је $\log \sin x = 7{\cdot}3907048 - 10$,
да се тражи лук x. Непосредно мањи таблични логари-
ам 7·3905824 — 10 одговара луку 0° 8′ 27″, који у се-
ундама изражен износи 507″; логаритам броја 507 јесте
2·7050080; одузимајући овај логаритам од 7·3905824 — 10
нађену разлику од даног логаритма добијамо као разлику
2·7051304. Овом логаритму одговара број 507·143; дакле
је тражени лук $x = 507{\cdot}143''$ или 0°8′27·143″.

Имајући на уму да је

$$\log tg (a + d) = - \log cotg (a + d)$$

моћићемо увек лако и из познатог $\log cotg$ каквог врло ма-
лог лука наћи исти лук. Но ако је познат $\log \cos$ врло ма-
лог лука, то овај није могуће прецизно изнаћи. На пример
ако се тражи лук, коме је 9·9999983 — 10 $\log \cos$ види-
ћемо у таблици, да тај логаритам одговара свима луцима од
9′30″ до 9′40″, одакле сљедује, да се тражени лук са не-
сигурношћу до 10″ може наћи.

Да би један лук сасвим близу 90° из његовог *log cos*, *log tg* и *log cotg* нашли, тражићемо најпре на мало час показани начин његов комплеменат, узимајући на ум да су *log cos*, *log tg* и *log cotg* траженог лука односно *log sin*, *log cotg* и *log tg* његовог комплемента. Најзад из познатог *log sin* једног лука, који је сасвим близу 90°, неможе се лук такође са довољном прецизношћу наћи.

58. Разрешавање задатака у № 56 и 57 оснива се на приближно тачној једнакости

$$1) \qquad \frac{d}{10} = \frac{\delta}{\triangle};$$

ако ставимо

$$2) \qquad \delta = \frac{\triangle}{10} d \pm e, \quad d = \frac{10\,\delta}{\triangle} \pm \varepsilon,$$

e и ε биће погрешке, кад се δ и d у I-м и II-м задатку по обрасцу 1) буду израчунавали. Може се доказати, да је e увек мање од једне јединице седмог десетног места, ако је само лук, коме се тражи *log sin* и *log tg*, прешао неку извесну испод 5° находећу се границу, и да је услед тога то исто случај, ако је лук, коме се тражи *log cos* или *log cotg*, испод неке преко 85° находеће се границе. Образац 1) може се дакле у другом случају I-г задатка у поменутим границама употребити. Такође се може доказати, да је погрешка ε у II-м задатку мања од стотог дела секунде, ако се тражени лук разликује од 0° или 90° количином, која прелази неку испод 1·5 степена находећу се границу, и да је иста погрешка ε сасвим неприметна, ако се тражени лук од 0° или 90° само са неколико степена разликује; одатле сљедује, да се образац

$$d = \frac{10\,\delta}{\triangle} = \frac{\delta}{\left(\frac{\triangle}{10}\right)}$$

другом случају II-г задатка у споменутим границама може
отребити.

Али погрешка учињена при израчунавању броја d не-
лази само отуда, што се количина $\pm\,\varepsilon$ занемарује. Ло-
ритми, којих су разлике са δ и $\triangle$ претстављене, такође
погрешни; и ако је та погрешка код табличних логари-
ма испод једне јединице седмог децималног места, она може
ти много већа код даног логаритма, који је врло често
следак операција са таквим бројевима, који су приближно
ни или нађени. Узимајући сад да погрешка броја δ износи
дну јединицу последњег десетног места, и занемарујући по-
решку од $\triangle$, биће $\frac{10}{\triangle}$ погрешка од d; одакле сљедује, да
прецизност при тражењу лука тим већа, што је већа та-
лична разлика. Из обрасца

$$og\ tg\,(a + d) - log\ tg\ a = [log\ sin\,(a + d) - log\ sin\ a) + [log\ cos\ a - log\ cos\,(a + d)],$$

оји постаје, кад се у обрасцу

$$\frac{tg\,(a + d)}{tg\ a} = \frac{sin\,(a + d)\ cos\ a}{sin\ a\ cos\,(a + d)}$$

ево и десно узму логаритми, сљедује, да је разлика ло-
аритама тангената па дакле и разлика логаритама котанге-
ната двају лукова једнака збиру разлика њихових *log sin* и
њихових *log cos*; одатле сљедује, да се лук увек оштрије
налази из своје тангенте или котангенте него ли из синуса или
косинуса. Пошто разлике логаритама тангената и котангената
до 45° све једнако опадају, а после расту, о чему нас саме
таблице могу уверити, то је погрешка при тражењу лука из

његовога *log tg* или *log cotg* тим већа, што је лук ближи 45°. Код 45° табличне разлике логаритама тангената и котангената износе 421 јединицу седмог десетног места, одакле сљедује, да погрешка од једне јединице седмог десетног места у даном *log tg* или *log cotg* повлачи за собом 0·024″ као одговарајућу погрешку у траженом луку. Истој погрешки у *log sin* или *log cos* одговарала би двапут већа погрешка у траженом луку, то јест 0·048″. Код малих лукова разлике логаритама косинуса врло су мале и зато разлике логаритама синуса скоро су једнаке разликама логаритама тангената или котангената; одатле сљедује, да се мали лук неможе оштро израчунати из свог косинуса, као што је то већ горе казано; напротив он се подједнако оштро може израчунати из свог синуса, тангенте или котангенте. Лако је увидити, да се и један близу 90° налазећи се лук неможе оштро из свог синуса изнаћи, напротив подједнако оштро из косинуса, котангенте или тангенте. Закључимо дакле, да у тригонометријским задатцима, где се траже луци близу 0° или 90°, треба колико је могуће избегавати косинусе или синусе а служити се тангентама или котангентама.

59. Распоред шестомесних таблица, у којима луци иду од минуте до минуте сличан је оном седмомесних таблица. У тим таблицама могу се непосредно наћи логаритми тригонометријских функција само оних лукова, који имају степене и минуте само. Ако дани лук има и секунде, наћићемо логаритме његових тригонометријских функција држећи се начела поменутог у другом случају I-г задатка № 56, Помоћу истог начела наћићемо лако и лук, кад је дат логаритам једне од његових тригонометријских функција.

60. *Примедба.* Означавајући модуо бригових логаритама 0·4342945 са m, са θ један између 0 и 1 налазећи се број, и узимајући секунду за јединицу добијамо помоћу тејлоровог обрасца

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + f''(x+\theta h)\frac{h^2}{2!}$$

дeћи образац

$$sin\,(x+h) - log\,sin\,x = \boldsymbol{mh}\,sin\,1''\,\frac{cos\,x}{sin\,x} - \frac{m\,\theta h^2\,sin^2 1''}{2\,sin^2 x}$$

Узмимо сад нека је △ вредност, коју добија лева страна једначине за $h = 10$, а δ њена вредност за $h = d$ 10; узмимо још нека је θ' вредност коју θ за $h = 10$ ија, па ћемо из последње једначине добити

$$\delta = m\,d\,sin\,1''\,\frac{cos\,x}{sin\,x} - \frac{m\,\theta\,d^2 sin^2 1''}{2\,sin^2 x},$$

$$\triangle = 10m\,sin\,1''\,\frac{cos\,x}{sin\,x} - \frac{100\,m\,\theta'\,sin^2 1''}{2\,sin^2 x}.$$

Замењујући ове вредности у једначинама

$$\pm\,e = \delta - \frac{\triangle d}{10}, \quad \pm\,\varepsilon = d - \frac{10\delta}{\triangle},$$

е из оних под 2) у № 58 сљедују, добијамо после врло остог свођаја

$$e = \frac{m sin^2 1''}{2\,sin^2 x}(10\,\theta' d - \theta\,d^2), \ \pm\,\varepsilon = \frac{d\,sin\,1''\,(10\,\theta' - \theta d)}{sin\,2\,x - \theta\,d\,sin\,1''}.$$

Пошто је $d < 10$, то је бројна вредност количине $10\,\theta' - d$ коће мања од 10, и због тога је

$$e < \frac{50\,m\,sin^2 1''}{sin^2 x}, \qquad \varepsilon < \frac{100\,sin\,1''}{sin\,2\,x - 10\,sin\,1''}.$$

Помоћу ових израза може се оно, што је о количинама и ε у № 58 тврђено, врло лако оправдати што се тиче sin и $log\,cos$; одатле се после изводи, да поменуто тврње вреди и што се тиче тангенте и котангенте.

Удешавање образаца за логаритамски рачун.

61. Да би се при израчунавању вредности каквог израза могли употребити логаритми, треба да је исти за то удешен, да се дакле састоји из самих једночланих чинилаца или с другим речма треба да је израз моном. Ако се у каквом изразу неналазе други многочлани чиниоци осим збира или разлике двају синуса, двају косинуса, двеју тангената или двеју котангената, може се исти израз удесити за логаритамски рачун помоћу образаца у № 39, због чега исти обрасци и јесу од велике важности, Но зато има и општих метода, које ћемо сад одма показати.

Узмимо најпре двочлани израз

$$x = a \pm b$$

и претпоставимо, да се тражи $\log x$; a и b јесу положни бројеви, којима се логаритми могу наћи. Дани израз може се написати

$$x = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right).$$

Претпоставивши то узмимо на ум да је $\frac{b}{a}$ тангента једног извесног између 0° и 90° находећег се лука, који можемо са φ означити, и да је с тога

$$tg\,\varphi = \frac{b}{a};$$

помоћни лук φ израчунава се помоћу обрасца

$$\log tg\,\varphi = \log b - \log a,$$

који се добија, кад се у претстојећем лево и десно узму логаритми. По овоме је

$$x = a\,(1 \pm tg\,\varphi) = a\,\frac{\cos\varphi \pm \sin\varphi}{\cos\varphi};$$

о како је

$$\begin{aligned} \cos\varphi \pm \sin\varphi &= \cos\varphi \pm \cos\,(90^\circ - \varphi) \\ &= 2\cos 45^\circ \cos\,(\varphi \mp 45^\circ) \\ &= \sqrt{2}\,\cos\,(\varphi \mp 45^\circ), \end{aligned}$$

о је најзад

$$x = \frac{a\sqrt{2}\cos\,(\varphi \mp 45^\circ)}{\cos\varphi}.$$

Овај образац згодан је за логаритамски рачун; из њега сљедује

$$\log x = \log a + \frac{1}{2}\log 2 + \log\cos\,(\varphi \mp 45^\circ) - \log\cos\varphi.$$

Иста метода може се применити и на сваки многочлани израз

$$x = a \pm b \pm c \pm d \pm \ldots\ldots\ldots;$$

и доиста увођењем једног помоћног лука можемо бином $a \pm b$ претворити у моном, после чега ће израз имати један члан мање; увођењем новог помоћног лука смањићемо број чланова опет са једном јединицом, и на тај начин свеједнако радећи претворићемо напослетку израз у моном.

Бином $a + b$ може се на још један начин претворити у моном. Претпостављајући опет да су a и b положни бројеви ставимо $\frac{b}{a} = tg^2\varphi$, па ћемо имати

$$a + b = a\,(1 + tg^2\varphi) = \frac{a}{\cos^2\varphi}.$$

Ако је $a > b$, израз $a - b$ претвориће се у моном, кад се стави $\frac{b}{a} = \sin^2\varphi$, јер тада се добија

$$a - b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right) = a\cos^2\varphi.$$

Биноми облика

$$x = a \sin\alpha \pm b \cos\alpha$$

где се a и b могу састојати из других тригонометријских функција, појављују се често у рачунима, зато ћемо да покажемо, како се они претварају у мономе.

Горњи бином може се понајпре написати

$$x = a\left(\sin\alpha \pm \frac{b}{a} \cos\alpha\right);$$

стављајући овде $tg\,\varphi = \frac{b}{a}$ добијамо

$$x = a\left(\sin\alpha \pm \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos\alpha\right) = a\,\frac{\sin\alpha\cos\varphi \pm \cos\alpha\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

или

$$x = \frac{a \sin(\alpha \pm \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Разрешавање квадратне једначине помоћу тригонометријских функција.

62. Корени једначине

$$ax^2 + bx + c = o,$$

где a, b, c значе познате стварне количине, дати су обрасцем

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a}.$$

1° Нека је $b^2 - 4\,ac > 0$, што је случај, кад су корени стварни и неједнаки; a се може увек као положно претпоставити. Ако је још и $c > o$, можемо горњи образац написати овако

$$x = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}\right).$$

Пошто је због $b^2 - 4ac > o$ количина $\frac{4ac}{b^2}$ положна и

ања од јединице, то можемо ставити

$$\sin^2\varphi = \frac{4ac}{b^2},$$

осле чега ћемо имати

$$x = -\frac{b}{2a}(1 \mp \cos\varphi).$$

Но из обрасца под 2) у № 34 сљедује

$$1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi, \qquad 1 + \cos\varphi = 2\cos^2\frac{1}{2}\varphi,$$

акле је

$$x_1 = -\frac{b}{a}\sin^2\frac{1}{2}\varphi, \qquad x_2 = -\frac{b}{a}\cos^2\frac{1}{2}\varphi.$$

Ако је $c < o$, то је $-\frac{4ac}{b^2}$ положна количина, дакле

ожемо тада ставити

$$tg^2\varphi = -\frac{4ac}{b^2},$$

осле чега ћемо имати

$$x = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \frac{1}{\cos\varphi}\right).$$

Одавде написавши корене одвојено добијамо лако

$$x_1 = \frac{b}{a}\frac{\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi}, \qquad x_2 = -\frac{b}{a}\frac{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi}.$$

2° Ако је $b^2 - 4ac < o$, корени су уображени. Образац

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2\,a} = \frac{-b \pm \sqrt{-(4ac - b^2)}}{2\,a}$$

може се сад овако написати

$$x = -\frac{b}{2a}\left(1 \mp \sqrt{-\left(\frac{4ac}{b^2} - 1\right)}\right).$$

Количина $\frac{4ac}{b^2}$ јесте положна и већа од јединице због $c > o$ и $b^2 - 4ac < o$; с тога можемо ставити

$$\frac{4ac}{b^2} = \frac{1}{cos^2\varphi},$$

одакле сљедује

$$\frac{4ac}{b^2} - 1 = \frac{1}{cos^2\varphi} - 1 = \frac{sin^2\varphi}{cos^2\varphi} = tg^2\varphi.$$

Усљед тога је

$$x = -\frac{b}{2a}(1 \mp \sqrt{-tg^2\varphi}),$$

или најпосле мењући краткоће ради $\sqrt{-1} = i$

$$x = -\frac{b}{2a}(1 \mp i\,tg\,\varphi).$$

Ако је $b^2 - 4ac = o$, корени су стварни и једнаки

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

63. На разрешавање квадратне једначине може се свести и задатак, у коме се траже сви луци, који одговарају једначини облика

$$a\,cos\,x + b\,sin\,x = c,$$

где a, b, c значе познате положне или одречне количине; зарад тога треба само $sin\,x$ и $cos\,x$ изразити једном и истом тригонометријском функцијом; али исти задатак може се решити и увођењем једног помоћног лука.

Ако горњу једначину поделимо лево и десно са a, добијамо

$$\cos x + \frac{b}{a} \sin x = \frac{c}{a}.$$

Ако ставимо, што је увек допуштено,

$$\frac{b}{a} = tg\, \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi},$$

где φ значи помоћни између -90° и $+90^\circ$ налазећи се лук, добијамо даље

$$\cos x + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin x = \frac{c}{a},$$

а одатле

$$\frac{\cos x \cos \varphi + \sin x \sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{c}{a},$$

или

$$\cos (x - \varphi) = \frac{c \cos \varphi}{a}.$$

Можност задатка изискује, да се $\frac{c \cos \varphi}{a}$ налази између -1 и $+1$, дакле да је

$$\frac{c^2 \cos^2 \varphi}{a^2} < 1 \quad \text{или} \quad c^2 < a^2 + b^2.$$

Ако је тај захтев испуњен, таблице ће дати један између 0° и 180° налазећи се лук α, коме је $\frac{c \cos \varphi}{a}$ косинус; корени дате једначине биће тада дати обрасцем

$$x = m\, 360^\circ + \varphi \pm \alpha,$$

где m значи буди какав цео број, који може бити положан, одречан а најзад и нула,

Сви корени могу се изразити једним од њих; јер ако један од истих означимо са x_1 имаћемо

$$\alpha = \pm (m' 360^\circ + \varphi - x_1),$$

где m' значи цео број, и усљед тога као општи образац корена

$$x = m\, 360^\circ + \varphi \pm (\varphi - x_1):$$

овај образац због два знака распада се на ова два

$$x = m.\, 360^\circ + x_1, \qquad x = m.\, 360^\circ + 2\varphi - x_1.$$

Задатци.

1° Наћи лук прве четврти, којег је косинус трипут већи од синуса.

2° Наћи лук прве четврти, који је такав, да му се синус има наспрам косинуса као 2:5.

3° Наћи лук, који је такав, да му је тангента трипут већа од синуса двапут већег лука.

4° Удесити за логаритамски рачун обрасце

$$x = m \sin a \sin b + n \cos a \cos b \cos c$$

и

$$tg\, x = \frac{a \sin b}{\sqrt{1 + a \cos b}}.$$

5° Решити једначине

$$\cos nx + \cos (n-2)\, x = \cos x;$$

$$51 \cos x + 24 \sin x + 16 = o;$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + cotg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 4;$$

$$tg\,x + tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = o; \frac{1 - tg\,x}{1 + tg\,x} = tg\,a; \frac{\cos x + \cos a}{\sin x + \sin a} = tgb;$$

$$cotg\,x - tg\,x = (cotg\,x + tg\,x)\cos a;$$

$$tg\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\,tg\,a;$$

$$(\sin x - \cos x)\sin x = a.$$

6° Решити тригонометријским путем једначину

$$x^2 + 0{\cdot}400286\,x - 0{\cdot}236521 = o.$$

7° Доказати да лук изражен у деловима полупречника треба помножити са 206264·8, те да буде изражен у секундама; изразити обратно у деловима полупречника лук, који је дат у степенима, минутама и секундама.

8° Испитати идентичност образаца

$$\cos^2(a - b) + \cos^2 b - 2\cos a \cos b \cos(a - b) = \sin^2 a;$$ = ?

$$\frac{\sin a + 2\sin 3a + \sin 5a}{\sin 3a + 2\sin 5a + \sin 7a} = \frac{\sin 3a}{\sin 5a};$$

$$\frac{1 - tg^2\left(\frac{\pi}{4} - a\right)}{1 + tg^2\left(\frac{\pi}{4} + a\right)} = \sin 2a.$$

9° Повући у кругу тетиво тако, да је један од добивених сегмената једнак четвртини кружне површине

10° Повући у кругу тетиво тако, да је већи од два добивена сегмента геометријска средина између мањег сегмента и целог круга.

11° Доказати, да је даљина сваког предмета, који је виђен под углом од једне секунде, једнака 206264·8 пута његовој дужини.

ДРУГИ ДЕО.

РАВНА ТРИГОНОМЕТРИЈА.

Предмет равне тригонометрије.

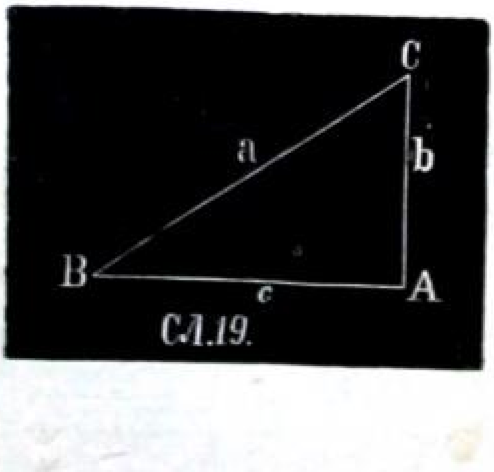
64. У троуглу има шест комада, три стране и три угла. Разрешити троугао значи из три бројно дата комада остале непознате рачуном изнаћи; разуме се, да међу познатим комадима мора бити барем једна страна.

Равна тригонометрија бави се разрешавањем равних троуглова.

Угли троуглова означаваће се увек са A, B, C, а супротне стране малим словима a, b, c. Оштри или тупи угли зову се коси, и троугли, у којих су само коси угли, косоугли; међутим правоугли троугли зову се они, у којих је један угао прав; овај ће се означавати са A, дакле ипотенуза са a.

Односи између страна и углова правоуглог троугла.

65. Обрасци тичући се правоуглог троугла (сл. 19.) ABC јесу ови



Сл.19.

$$B + C = 90^\circ,\ a^2 = b^2 + c^2,$$

$$\sin B = \frac{b}{d},\ \cos B = \frac{c}{a},$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{c},\ \operatorname{cotg} B = \frac{c}{b}.$$

Први образац сљедује из одредбе правоуглог троугла и геометријске теореме о збиру углова у троуглу; други је аналитични превод питагорине теореме; остали су непосредне посљедице одредбе тригонометријских функција

Сви ти односи нису један од другог независни, јер сабирајући квадрате трећег и четвртог добијамо други; делећи трећи четвртим и обратно четврти трећим добијамо пети и шести образац. У ствари имамо дакле само три узајамно независна односа

$$B + C = 90^{\circ},\ sin\ B = \frac{b}{a},\ cos\ B = \frac{c}{a},$$

Шта више може се доказати, да осим ова три односа између страна и углова правоуглог троугла неможе никакав други од њих независан постојати; јер кад би таквог једног односа било, ми би замењујући у њему b, c, B вредностима

$$a\ sin\ B,\ a\ cos\ B,\ 90^{\circ} - C,$$

добили између самих количина a и C једну неидентичну једначину, што би значило, да се ипотенуза правоуглог троугла може наћи, кад су само угли истога познати, а то неможе бити.

Из горњих образаца сљедује

$$b = a\ sin\ B,\ c = a\ cos\ B,\ b = c\ tg\ B,\ c = b\ cotg\ B,$$

што ће рећи

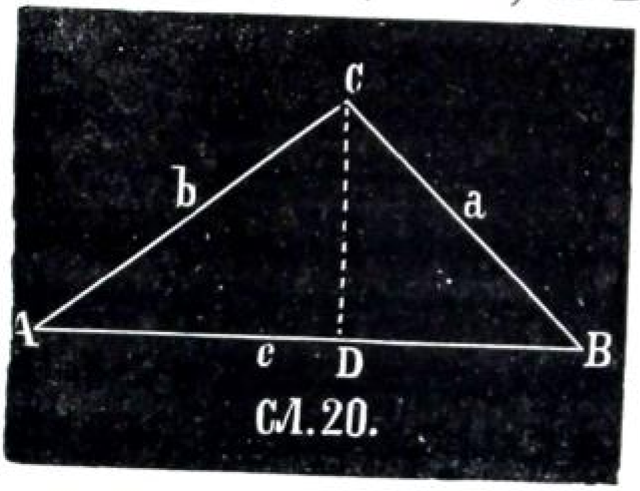
а) *Свака катета једнака је ипотенузи помноженој са синусом угла, који спрам катете или са косинусом угла, који на катети лежи.*

в) *Свака катета једнака је другој катети помноженој са тангентом угла, који је спрам прве катете или са котагентом угла, који на првој катети лежи.*

Односи између страна и углова косоуглог троугла.

66. *Теорема I. У сваком равном троуглу стране су сразмерне синусима супротних углова.*

Нека је (сл. 20) $A B C$ један троугао, у коме су угли A и B оштри; спустимо са темена C управну $C D$ на основицу $A B$; тачка D пада између тачака A и B, и ми добијамо два правоугла троугла $A C D$ и $B C D$, из којих сљедује



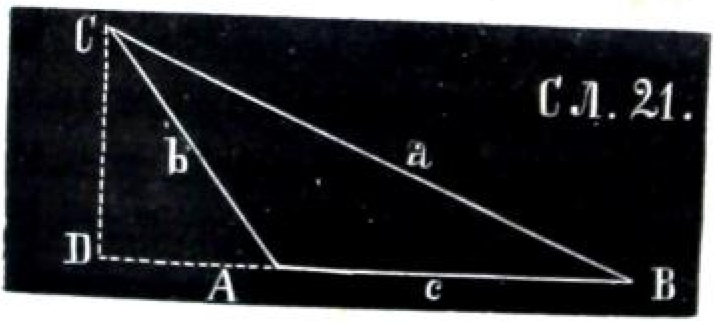
Сл.20.

$$\frac{C D}{b} = \sin A, \ \frac{C D}{a} = \sin B,$$

одакле поделом

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

Ако је (сл. 21) један од углова A или B туп, на пример A, управна $C D$ пада ван троугла $A B C$ и то лево од $A C$. Из троуглова $B C D$ и $A C D$ сљедује тада



Сл. 21.

$$\frac{C D}{a} = \sin B, \ \frac{C D}{b} = \sin (180^{\circ} - A) = \sin A;$$

из ових једначина добијамо поделом исти горњи образац, одакле сљедује, да он вреди уопште.

Примењујући нађени образац на две и две стране добијамо

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \quad \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}, \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

или

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

67. Пошто се један троугао може начинити из три произвољно узета комада, на пример из две стране и захваћеног угла, то је јасно, да су трима комадима једног троугла и остали одређени. Из тога сљедује, да између шест комада једнога троугла могу бити само три међу собом независне једначине, помоћу којих се из три дата комада остала три непозната могу израчунати.

У № 66 нашли смо да између страна и углова једног троугла постоје сљедећа три узајамно независна односа

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} A + B + C = 180^\circ. \\ \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}; \end{array} \right.$$

сви остали односи између страна и углова морају се усљед мало час реченог из ових овде дати извести, нити може бити каквог, који из њих неби сљедовао. То се даје у осталом и овако доказати: из образаца 1) сљедује

$$A = 180^\circ - B - C, \; b = \frac{a \sin B}{\sin (B + C)},$$

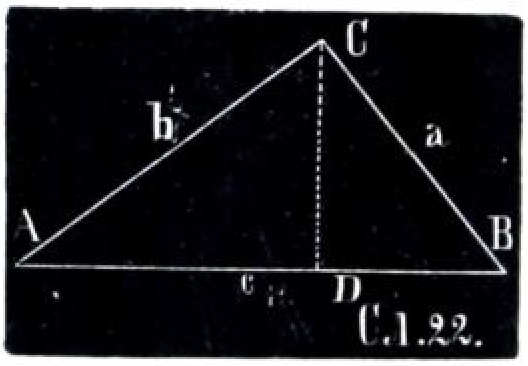
$$c = \frac{a \sin C}{\sin (B + C)}.$$

Кад би сад између страна и углова било каквог од оних под 1) независног односа или обрасца, ми би замењујући у њему *A*, *b*, *c* мало више написаним вредностима добили једну неидентичну једначину између количина a, B, C, што би значило, да се стране равног троугла могу и онда наћи, кад су само угли познати, а то очевидно нестоји.

Но из образаца под 1) може се извести цео један низ нових образаца, који дају толико исто нових теорема; ми ћемо ове најпре непосредно доказати, а после ћемо показати, како се нађени обрасци могу једно из друго извести.

68. *Теорема II. У сваком равном троуглу квадрат једне стране једнак је збиру квадрата осталих двеју страна, мање двоструком производу истих страна и косинуса њима захваћеног угла.*

Нека је (сл. 22) $A\,B\,C$ један троугао, у коме је A оштар угао; спустимо са темена C управну $C\,D$ па ћемо добити два правоугла троугла $A\,C\,D$ и $B\,C\,D$. Из последњега следује



Сл. 22.

$$a^2 = \overline{C\,D}^2 + \overline{B\,D}^2 = \overline{C\,D}^2 + (c - A\,D)^2$$

$$= \overline{C\,D}^2 + c^2 - 2\,c\,A\,D + \overline{A\,D}^2,$$

или пошто из правоуглог троугла $A\,C\,D$

$$\overline{C\,D}^2 + \overline{A\,D}^2 = b^2$$

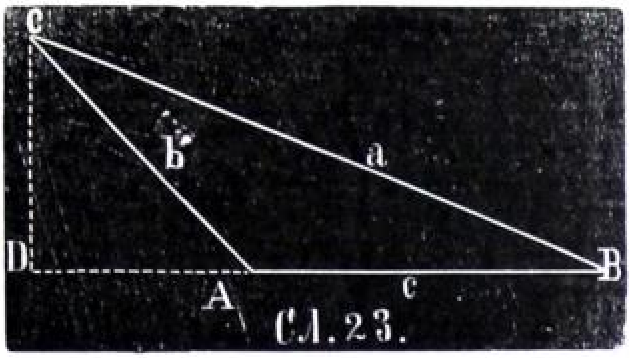
следује, такође

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c.\,A\,D.$$

Ако у овом из геометрије познатом обрасцу заменимо $A\,D$ вредношћу $b \cos A$, добићемо напослетку

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A.$$

Ако ли је (сл. 23) у троуглу $A\,B\,C$ угао A туп, то



Сл. 23.

тада

$$a^2 = \overline{C\,D}^2 + \overline{B\,D}^2 = \overline{C\,D}^2 + (c + A\,D)^2$$

$$= \overline{C\,D}^2 + c^2 + 2\,c.\,A\,D + \overline{A\,D}^2,$$

ли пошто је

$$\overline{C\,D}^2 + \overline{A\,D}^2 = b^2$$

акође

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,c.\,A\,D.$$

Замењујући у овом такође из геометрије познатом обрасцу $A\,D$ вредношћу $b \cos C\,A\,D$ добијамо

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,c.\cos C\,A\,D,$$

или, пошто су угли $C\,A\,D$ и A суплементи и зато $\cos C\,A\,D = -\cos A$, напослетку

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A,$$

дакле исти образац као мало час. Нађени образац вреди и када је $A = 90^\circ$, јер тада се он због $\cos A = \cos 90^\circ = 0$ своди на $a^2 = b^2 + c^2$.

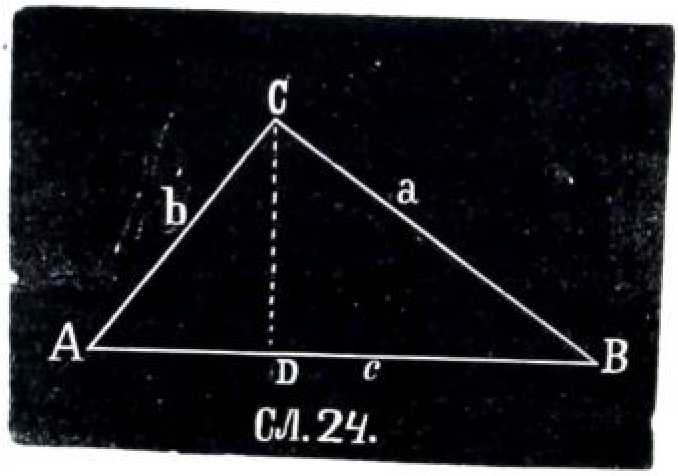
Примењујући доказану теорему на сваку страну троугла, добијамо сљедећа три обрасца

$$2)\quad \left\{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C; \end{aligned}\right.$$

у сваком од њих има, као што се види, све три стране и један угао.

69. *Теорема III. У сваком равном троуглу ма која страна једнака је збиру производа, који се добијају, кад се свака од осталих двеју страна помножи косинусом угла, који она прави са првом страном.*

Нека је (сл. 24) $A\,B\,C$ један троугао; ако управна $C\,D$ спуштена са темена C пада између A и B, дакле ако су угли A и B оштри, имаћемо



СЛ. 24.

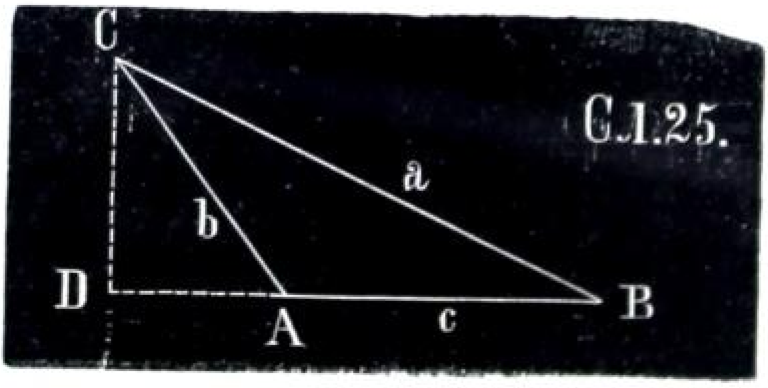
$$A\,B = B\,D + A\,D$$

$$= B\,C \cos B + A\,C \cos A$$

или

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

Ако ли пак (сл. 25) управна $C\,D$ пада ван троугла,



С.Л.25.

дакле ако је један од углова A или B на пример A туп, то је

$$A\,B = B\,D - A\,D = B\,C \cos B - A\,C \cos (180^\circ - A)$$

$$= B\,C \cos B + A\,C \cos A,$$

или

$$c = a \cos B + b \cos A,$$

кле исти образац као и у првом случају, одакле сљедује, он вреди уопште.

Примењујући доказану теорему на сваку страну трогла добијамо обрасце

$$\left\{\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B, \\ b &= c \cos A + a \cos C, \\ c &= a \cos B + b \cos A. \end{aligned}\right.$$

70. У овој ћемо № да видимо, како се једначине под), 2), и 3), једне из других изводе.

Да би једначине под 3) из оних под 2) добили, сабеимо прве две једначине под 2); после врло простог свођаја аћићемо

$$c = a \cos B + b \cos A;$$

о је једна од једначина под 3), остале две добијају е на сличан начин.

Обратно да би једначине под 2) из оних под 3) извели аберимо ове, пошто смо их најпре редом са a, b, $-c$, омножили, па ћемо добити

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C;$$

о је једна од једначина под 2), остале две слично се добијају.

Сад да видимо, како се једначине под 2) или под 3) з основних једначина под 1) изводе.

Из прве једначине под 1) добијамо

$$A = 180^\circ - B - C$$

дакле

$$\cos A = -\cos(B + C) = -\cos B \cos C + \sin B \sin C$$

или

$$\cos A = -\sqrt{1 - \sin^2 B}\sqrt{1 - \sin^2 C} + \sin B \sin C;$$

замењујући овде $\sin B$ и $\sin C$ њиховим вредностима, које из једначина под 1) сљедују, добијамо

$$\left(\cos A - \frac{b\,c \sin^2 A}{a^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{b^2 \sin^2 A}{a^2}\right)\left(1 - \frac{c^2 \sin^2 A}{a^2}\right),$$

одакле после врло простог свођаја

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A;$$

то је једна од једначина под 2) остале две добијају ее на сличан начин.

Из прве једначине под 1) добијамо опет

$$A = 180^0 - (B + C),$$

одакле

$$\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C;$$

замењујући овде $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ редом количинама a, b, c, које су им сразмерне, добијамо

$$a = b \cos C + c \cos B;$$

то је једна од једначина под 3), остале две добијају се на сличан начин.

Обрасци под 3) могу се из оних под 1) извести још и на сљедећи начин:

Из образаца под 1) сљедује

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b \cos C}{\sin B \cos C} = \frac{c \cos B}{\sin C \cos B}$$

$$= \frac{b\ cos\ C + c\ cos\ B}{sin\ (B + C)} = \frac{b\ cos\ C + c\ cos\ B,}{sin\ A}$$

одакле по множењу са $sin\ A$

$$a = b\ cos\ C + c\ cos\ B.$$

Најпосле једначине под 1) могу се извести из оних под 2) или под 3).

Из прве једначине под 2) сљедује

$$cos\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\ b\ c},$$

одавде

$$sin^2 A = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2\ a^2\ b^2 + 2\ a^2\ c^2 + 2\ b^2\ c^2}{4\ b^2\ c^2}$$

одавде опет

$$\frac{a^2}{sin^2 A} = \frac{4\ a^2\ b^2\ c^2}{-a^4 - b^4 - c^4 + 2\ a^2\ b^2 + 2\ a^2\ c^2 + 2\ b^2\ c^2}$$

Иста вредност наћиће се и за количине

$$\frac{b^2}{sin^2 B} \text{ и } \frac{c^2}{sin^2 C},$$

јер за $\frac{a^2}{sin^2 A}$ добивени израз немења се изменом страна a, b, c, као и углова, који су спрам њих. Пошто су угли A, B, C, мањи од 180°, њихови су синуси положни, дакле ћемо моћи написати

$$\frac{a}{sin\ A} = \frac{b}{sin\ B} = \frac{c}{sin\ C}$$

или

$$\frac{a}{b} = \frac{sin\ A}{sin\ B},\ \frac{a}{c} = \frac{sin\ A}{sin\ C},\ \frac{b}{c} = \frac{sin\ B}{sin\ C},$$

Да би ове једначине из оних под 3) извели, избацимо из ових последњих c и C, и то најпре $\cos C$, па ћемо добити

$$a^2 - b^2 = c\,(a \cos B - b \cos A);$$

замењујући овде c вредношћу из последње једначине под 3) добићемо даље

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A$$

или

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A$$

или напослетку

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

На исти начин добијају се и једначине

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C},$$

која са оном вишење свезана даје

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Ако најзад из једначина под 2) или 3) избацимо две ма које стране, трећа ће сама собом отпасти, и ми ћемо добити

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2 \cos A \cos B \cos C - 1 = 0,$$

или

$$(\cos A + \cos B \cos C)^2 = 1 - \cos^2 B - \cos^2 C$$
$$+ \cos^2 B \cos^2 C = \sin^2 B \sin^2 C,$$

или извукавши корене квадратне

$$\cos A = - \cos B \cos C \pm \sin B \sin C = - \cos (B \pm C);$$

одавде сљедује

$$A \pm B \pm C = (2n + 1) . 180^\circ ,$$

где n значи цео број. Ако $A + B + C$ непрелази 180°, то онда мора

$$A + B + C = 180^\circ ;$$

ово је први образац под 1).

71. Три дужине a, b, c и три угла A, B, C појединце мања од 180° морају бити комади једног троугла, кад исте количине задовољавају једначине под 1) или оне под 2) или најзад оне под 3). Јер ако узмемо да исте количине задовољавају на пример једначине под 2), имаћемо

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A ,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B ,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C ,$$

или

$$a^2 = (b + c)^2 - 4\,bc \cos^2 \frac{1}{2} A ,$$

$$b^2 = (a + c)^2 - 4\,ac \cos^2 \frac{1}{2} B ,$$

$$c^2 = (a + b)^2 - 4\,ab \cos^2 \frac{1}{2} C ;$$

одавде сљедује да је

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b ,$$

то јест свака од даних дужина мања је од збира осталих двеју; но то је као што знамо једини услов, који дане дужине морају испунити, па да се из њих један троугао може начинити. Дакле из три дужине a, b, c, које са углима A, B, C једначине 2) задовољавају, може се један троугао

$$1'')\quad \begin{cases} \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}(B+C)}, \\[2ex] \dfrac{b-c}{a} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}. \end{cases}$$

Из нађених образаца видимо, *да се збир двеју страна има ка трећој као косинус полуразлике супротних углова ка косинусу њиховог полузбира*, *и да се исто тако разлика двеју страна има ка трећој као синус полуразлике супротних углова ка синусу њиховог полузбира.*

Делећи једначине под 1) једну другом а тако исто и оне под 1') и 1'') добијамо даље

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{tg\frac{1}{2}(A+B)}{tg\frac{1}{2}(A-B)}, \\[2ex] \dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{tg\frac{1}{2}(A+C)}{tg\frac{1}{2}(A-C)}, \\[2ex] \dfrac{b+c}{b-c} = \dfrac{tg\frac{1}{2}(B+C)}{tg\frac{1}{2}(B-C)}. \end{cases}$$

Из ових образаца видимо, *да се збир двеју страна има ка њиној разлици као тангента полузбира супротних углова ка тангенти полуразлике.*

73. Из обрасца

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A$$

сљедује

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c},$$

замењујући $\cos A$ овом вредношћу у обрасцима

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}},\quad \sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$$

добијамо

$$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{2\,bc + b^2 + c^2 - a^2}{4\,bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(b + c)^2 - a^2}{4\,bc}} = \sqrt{\frac{(a + b + c)\,(b + c - a)}{4\,bc}}$$

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{2\,bc - b^2 - c^2 + a^2}{4\,bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{4\,bc}} = \sqrt{\frac{(a + b - c)\,(a - b + c)}{4\,bc}}$$

Радећи на сличан начин или и простом изменом слова аћићемо сличне обрасце за синусе и косинусе углова $\frac{1}{2}B$ и $\frac{1}{2}C$. Ако затим ставимо

$$a + b + c = 2\,s,$$

дакле сљедује

$$b + c - a = 2\,(s - a),$$
$$a - b + c = 2\,(s - b),$$
$$a + b - c = 2\,(s - c),$$

то ћемо имати

$$3)\quad \begin{cases} \cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}, \\ \cos\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{s\,(s-b)}{ac}}, \\ \cos\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{s\,(s-c)}{ab}}, \end{cases}$$

$$4)\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \\ \sin\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}, \\ \sin\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}, \end{cases}$$

и најзад делећи сваки образац под 4) са одговарајућим под 3) имаћемо

$$5)\quad \begin{cases} tg\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s\,(s-a)}}, \\ tg\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s\,(s-b)}}, \\ tg\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s\,(s-c)}}, \end{cases}$$

У свима нађеним обрасцима треба узети знак + пред кореним знаком, јер половине троуглових углова мање су од

90^0 и зато њихове тригонометријске функције морају бити положне.

Замењујући у обрасцу

$$sin\, A = 2\, sin\, \frac{1}{2}\, A\ cos\, \frac{1}{2}\, A$$

$sin\, \frac{1}{2}\, A$ и $cos\, \frac{1}{2}\, A$ вредностима под 4) и 5) добићемо још

$$sin\, A = \frac{2}{b\,c} \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)(s-c)};$$

на сличан начин добијамо и

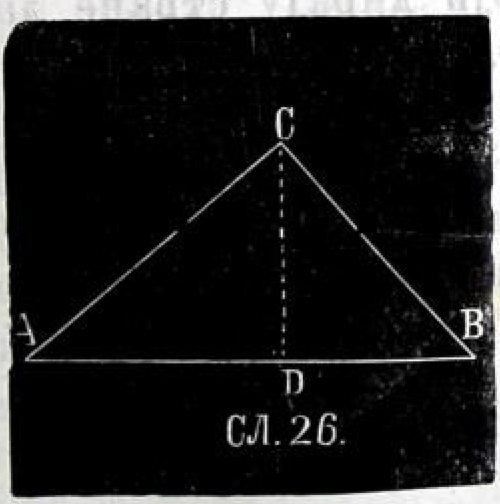
$$sin\, B = \frac{2}{a\,c} \sqrt{s\,(s-a)(s-b)\,(s-c)};$$

$$sin\, C = \frac{2}{a\,b} \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

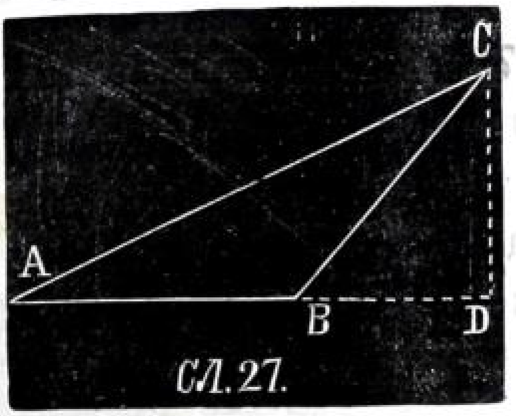
У ова три обрасца треба пред кореним знаком узети такође знак + зато, што су угли *A*, *B*, *C* појединце мањи од 180°, због чега њихови синуси морају бити положни.

Површина троугла.

74. Нека је (сл. 26. и 27.) *ABC* један троугао; са



СЛ. 26.



СЛ. 27.

темена C спустимо управну CD, па ћемо, означавајући са p површину троугла имати

$$p = \frac{1}{2} cAD.$$

Но из правоуглог троугла BDC сљедује $CD = a \sin B$, и потоме је

$$1) \qquad p = \frac{1}{2} ac \sin B.$$

Дакле је *површина троугла једнака половини производа из две стране и синуса њима захваћеног угла.*

Замењујући у 1) C вредношћу, која се из једначине

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}$$

добија, налазимо

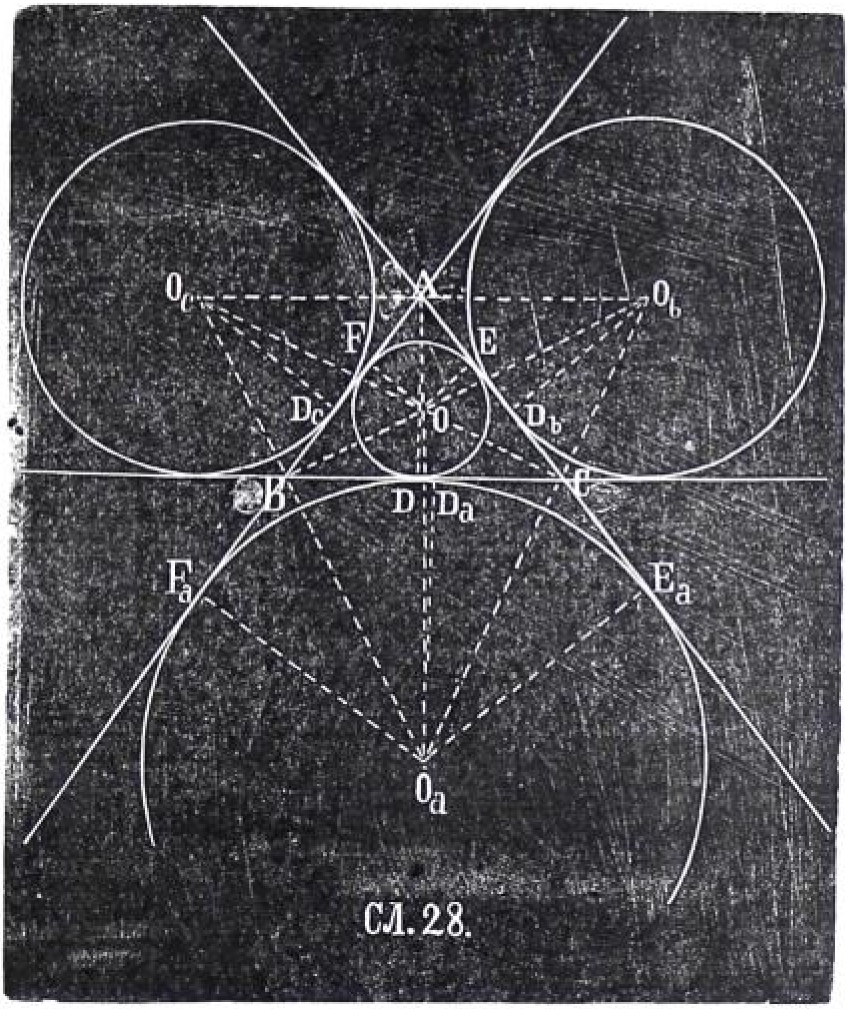
$$2) \qquad p = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin A} = \frac{1}{2} \frac{a \sin B \sin C}{\sin (B + C)}.$$

Стављајући најзад у 1) место $\sin B$ његову вредност из претпоследњег обрасца у № 73 налазимо

$$3) \qquad p = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Полупречници кругова, који дирају стране даног троугла.

75. Познато је да има (сл. 28.) четири круга, који стране једног троугла дирају. Један, који стране троугла изнутра дира, зове се уписани круг; остала три круга дирају с поља по једну страну троугла а остале две у њином продужењу и леже у углима A, B, C. Ми ћемо полупречник уписаног круга означити са r, а полупречнике кругова, који су у углима A, B, C и стране троугла споља дирају са r_a, r_b, r_c.



СЛ. 28.

Свезујући средиште O уписаног круга са теменима троугла разложићемо дани троугао на три троугла, којима су основице стране даног троугла а заједничка висина полупречник r; потоме је

$$p = \frac{(a+b+c)\,r}{2} = s\,r.$$

Свезујући на исти начин средиште O_a круга, који је у углу A, са теменима данога троугла лако ћемо наћи, да је дани троугао једнак збиру троуглова O_aAB, O_aAC, мање троугао O_aBC; како су основице истих троуглова стране даног троугла а r_a заједничка висина то је

$$p = \frac{(b+c-a)\,r_a}{2} = (s-a)\,r_a$$

на сличан начин добићемо и

$$p = (s-b)\,r_b, \qquad p = (s-c)\,r_c.$$

И тако дакле имамо

1) $$p = s\,r = (s-a)\,r_a = (s-b)\,r_b = (s-c)\,r_c,$$

а одавде

$$2)\quad \left\{ \begin{aligned} r &= \frac{p}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}, \\ r_a &= \frac{p}{s-a} = \sqrt{\frac{s\,(s-b)\,(s-c)}{s-a}}, \\ r_b &= \frac{p}{s-b} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)\,(s-c)}{s-b}}, \\ r_c &= \frac{p}{s-c} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)\,(s-b)}{s-c}}. \end{aligned} \right.$$

Нека су D, E, F тачке, где уписани круг дира три стране троугла. Отсечци AE и AF једнаки су, а тако исто и отсечци BD и BF, CD и CE; пошто је збир тих шест отсечака једнак обиму $2s$ троугла, то је збир трију неједнаких отсечака једнак половини обима s. Тако је збир отсечака AE, CD, BD једнак s; но како је збир отсечака CD, BD једнак страни BC троугла, то је

$$AE = AF = s - a;$$

исто је тако и

$$BD = BF = s - b,$$

$$CD = CE = s - c.$$

Ако су D_a, E_a, F_a додирне тачке у углу A налазећег се круга O_a са странама троугла, то је $BF_a = BD_a$, $CE_a = CD_a$ и зато свака од две једнаке дужине AF_a и AE_a једнака половини обима. Одатле сљедује

$$BD_a = s - c = CD, \qquad CD_a = s - b = BD.$$

Праве, што вежу средиште уписаног круга са теменима троугла, полове угле овога и потоме је

$$3)\quad r = (s-a)\, tg \frac{1}{2} A = (s-b)\, tg \frac{1}{2} B = (s-c)\, tg \frac{1}{2} C.$$

Исто је тако

$$4)\quad r_a = s\, tg \frac{1}{2} A = (s-c)\, cotg \frac{1}{2} B = (s-b)\, cotg \frac{1}{2} C.$$

У троуглу BOC угао BOC јесте суплеменат збиру углова $\frac{1}{2} B$ и $\frac{1}{2} C$, пошто је пак $\frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C = 90^\circ - \frac{1}{2} A$, то одатле изводимо

$$BOC = 90^\circ + \frac{1}{2} A;$$

на исти начин налазимо

$$COA = 90^\circ + \frac{1}{2} B; \qquad AOB = 90^\circ + \frac{1}{2} C.$$

Пошто су угли OBO_a и OCO_a, као што се лако увиђа, прави и због тога збир углова BOC и BO_aC једнак 180°, то се око четвороугла OBO_aC може круг описати; одатле сљедује, да су угли AO_aB и AO_aC односно једнаки углима $\frac{1}{2} C$ и $\frac{1}{2} B$ и дакле угао

$$BO_aC = \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} C = 90^\circ - \frac{1}{2} A.$$

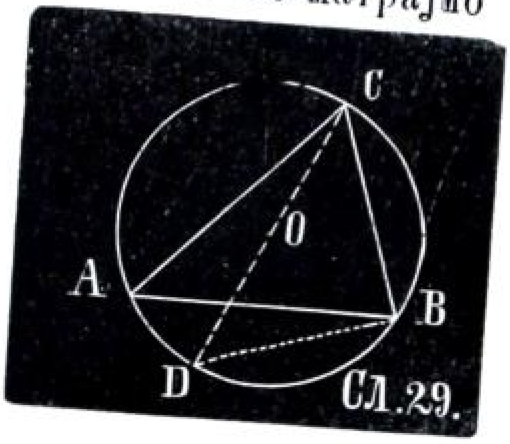
Из обрасца 2) могу се врло лако извести још и многи други занимљиви обрасци као

$$5)\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}, \quad p = \sqrt{r\, r_a\, r_b\, r_c} \\ a = p\left(\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}\right), b = p\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c}\right), c = p\left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b}\right), \end{array} \right.$$

$$5)\left\{\begin{aligned} &AO=\frac{r}{r_a}\sqrt{(r_a+r_b)\,(r_a+r_c)},\quad AO_a=\sqrt{(r_a+r_b)\,(r_a+r_c)}\\ &AF=AE=\sqrt{\frac{r\ r_b\ r_c}{r_a}},\quad BF=BD=\sqrt{\frac{r\ r_a\ r_c}{r_b}}\\ &\qquad CD=CE=\sqrt{\frac{r\ r_a\ r_b}{r_c}},\quad \text{итд.}\end{aligned}\right.$$

Полупречник око троугла описаног круга

76. Посматрајмо сад (сл. 29.) око троугла ABC описани круг; повуцимо кроз теме C пречник $CD = 2\,R$ и повуцимо праву BD; угао код D у правоуглом троуглу CBD једнак је углу A или $180^\circ - A$, како је кад A оштар или туп угао, и потоме је



Сл. 29.

$$a = 2\,R\,sin\,A \quad \text{или} \quad R = \frac{a}{2\,sin\,A},$$

множећи бројиоца и имениоца са bc добијамо

$$R=\frac{abc}{2\,bc\,sin\,A}=\frac{abc}{4p}=\frac{abc}{4\sqrt{s\,(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

а замењујући овде a, b, c и p вредностима под 5) у № 75 добијамо још

$$R=\frac{1}{4}\,(r_a+r_b+r_c-r).$$

Задатци.

1° У сваком је троуглу

$$chord\,A\ chord\,B\ chord\,C=\frac{sin\,2\,A+sin\,2\,B+sin\,2\,C}{sin\,A+sin\,B+sin\,C}.$$

2° Разделити један лук на два комада тако, да збир и производ тетива добивених двају лукова буде максимум.

3° Решити једначине

$$9 \cos x + 10 \sin x - 11 = o \quad \text{и} \quad \frac{3 \sin x}{1 + \cos x} = 2.$$

4° Доказати обрасце

$$\cot g\, a + tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) = \frac{2\,(1 + \sin a)}{\sin 2\,a},$$

$$\sin\frac{1}{2} A \sin\frac{1}{2} B \sin\frac{1}{2} C = \frac{p^2}{sabc},$$

$$\cos\frac{1}{2} A \cos\frac{1}{2} B \cos\frac{1}{2} C = \frac{ps}{abc},$$

$$tg\frac{1}{2} A \; tg\frac{1}{2} B \; tg\frac{1}{2} C = \frac{p}{s^2}.$$

Разрешавање правоуглих троуглова.

77. Ако се изузме прав угао, то остају још пет ко-
да; од ових могу се дати или две стране, или једна страна
један угао; сваки од ова два случаја подраздељује се на
уга два, јер у првом случају обе стране могу бити ка-
те, или једна од њих катета а друга ипотенуза: у дру-
м случају дана страна може бити катета или ипотенуза.
ри разрешавању правоуглих троуглова може дакле бити само
тири различна случаја.

78. *Први случај: Дана је ипотенуза а и оштар угао
, тражи се угао С и катете а и с.*

Непознати комади налазе се помоћу образаца

$$C = 90^\circ - B, \quad b = a \sin B, \quad c = a \cos B.$$

Први даје C непосредно, а остала два дају за логаритамски рачун

$$\log b = \log a + \log \sin B, \qquad \log c = \log a + \log \cos B.$$

79. *Други случај: Дата је ипотенуза a и једна катета b, тражи се катета c и угли B и C.*

Непознати комади траже се помоћу образаца

$$\sin B = \cos C = \frac{b}{a}, \qquad c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b).$$

Угли B и C израчунавају се, као што видимо, први из свог синуса а други из свог косинуса. Ако је угао C мали или угао B близу 90°, то се исти угли немогу довољно тачно израчунати, као што смо то у № 58 разложили. У таквом случају треба најпре c израчунати', па ће се онда C тражити помоћу обрасца

$$tg\ C = \frac{c}{b};$$

за логаритамски рачун имамо

$$\log e = \frac{1}{2}\,[\log\,(a+b) - \log\,(a-b)],$$

$$\log tg\ C = \log c - \log b.$$

Но C се може и непосредно из даних комада изнаћи. Јер на основу познатих образаца је

$$tg\,\frac{1}{2}\,C = \frac{\sin\frac{1}{2}\,C}{\cos\frac{1}{2}\,C} = \sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}.$$

одавде се добија, пошто се $\cos C$ замени његовом вредношћу $\frac{b}{a}$

$$tg\,\frac{1}{2}\,C = \sqrt{\frac{a - b}{a + b}}.$$

Овај је образац понајзгодније употребити за израчунавање гла C, јер логаритми, који су при употреби истог обрасца ужни, већ су нађени при израчунавању стране c.

80. *Трећи случај. Дата је катета b и један од штрих углова на пример B, а тражи се други угао C, атета c и ипотенуза a.*

Непознати комади налазе се помоћу образаца

$$C = 90^{\circ} - B,\ a = \frac{b}{sin B},\quad c = b\ cotg\ B;$$

з првог се угао C непосредно находи, а последња два дају а логаритамски рачун

$$log\ a = log\ b - log\ sin\ B,$$

$$log\ c = log\ b + log\ cotg\ B.$$

81. *Четврти случај. Дане су катете b и c, тражи се ипотенуза a и угли B и C.*

Непознати угли траже се помоћу обрасца

$$cotg\ C = tg\ B = \frac{b}{c}.$$

Пошто су угли израчунати, ипотенуза може се изнаћи помоћу обрасца

$$a = \frac{b}{sin\ B}.$$

Ипотенуза могла би се и непосредно помоћу обрасца

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

изнаћи. Но како овај образац није удесан за логаритамски рачун, то је боље радити онако, као што је речено, то јест најпре израчунати угле а затим помоћу њих ипотенузу. У осталом могао би се предњи образац удесити за логаритамски рачун уводећи по упуству № 61 један помоћни угао. Зарад тога напишимо исти образац најпре као што сљедује

$$a = b\sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2}};$$

означавајући сад са φ помоћни угао, који је такав, да је $tg\,\varphi = \frac{b}{c}$, имаћемо

$$a = b\sqrt{1 + cotg^2\varphi} = b\sqrt{1 + \frac{cos^2\varphi}{sin^2\varphi}}$$

$$= b\sqrt{\frac{sin^2\varphi + cos^2\varphi}{sin^2\varphi}}$$

или простије

$$a = \frac{b}{sin\,\varphi}.$$

Овај образац удесан је за логаритамски рачун, али да би помоћу њега a нашли, треба најпре изнаћи помоћни угао φ; но овај је, као што се лако увиђа, једнак углу B тро угла, и потоме овај начин разрешавања неразликује се од горе показаног, по коме се тражени комади из образаца

$$tg\,B = cotg\,C = \frac{b}{c},\quad a = \frac{b}{sin\,B}$$

израчунавају.

82. Лако је увидити, да је задатак у сваком од горња четири случаја, изузимајући други, можан. Да би задатак у другом случају био можан, треба да је катета мања

ипотенузе; јер ако би се противно десило, геометријска
нструкција показала би, да задатак није можан, што уоста-
м чини и сам рачун.

Образац, који у том случају даје вредност угла B јесте

$$\sin B = \frac{b}{a} \quad \text{или} \quad \log \sin B = \log b - \log a.$$

Ако је сад $b > a$ или $\log b > \log a$, онда је

$$\log \sin B > 1 \quad \text{или} \quad \sin B > 1,$$

о неможе бити, пошто је синус увек мањи од јединице.
пште има се то рећи, да као год што су у алгебри
бражени резултати, исто су тако у тригонометрији резул-
ти као

$$\sin B > 1,\ \cos B > 1 \text{ или } \log \sin B > o,\ \log \cos B > o$$

аци, по којима се са извесношћу може закључити, да за-
так није можан.

83. Пример. Дате су ипотенуза и катета

$$a = 4387{\cdot}67, \quad b = 3897{\cdot}29,$$

ажи се c, B, C,

Рачунање стране c.

$$c = \sqrt{(a+b)(a-b)}.$$

g $(a+b)$ . . 3·9182904
g $(a-b)$ . . 2·6905327
Збир . . . . 6·6088231
g c . . . . . . 3·3044125

$c = 2015{\cdot}63.$

Рачунање угла C.

$$tg\,\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

$\log (a-b)$ . . . . . . 2·6905327
$compl.\log (a+b)$ . . 6·0817096
Збир . . . . . . 8·7722423
$\log tg\,\frac{1}{2}C$ . . 9·3861211—10
$\frac{1}{2}C$ . . . . 13° 40′ 25·46″

$C = 27^\circ\, 20'\, 50{\cdot}92''$

$$B = 90^\circ - C = 62^\circ\, 39'\, 9{\cdot}08''.$$

Разрешавање ма каквих троуглова.

84. Овде могу бити четири различна случаја; јер могу се дати једна страна и два угла, две стране и угао наспрам једне од њих, две стране и захваћени угао, и најзад све три стране.

Први случај. Дата је једна страна на пример с и налегли угли А и В.

85. Да би троугао био можан, треба да је збир датих углова мањи од 180°; ако је исти захтев испуњен, наћићемо трећи угао помоћу обрасца

$$C = 180^\circ - (A + B).$$

Непознате стране a и b наћићемо затим помоћу образаца

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C}, \qquad b = \frac{c \sin B}{\sin C}.$$

86. Пример. Дати су комади

$$A = 42^\circ\, 37'\, 21'', \quad B = 58^\circ\, 52'\, 53'', \quad c = 3791{\cdot}57,$$

тражи се a, b, C и површина p.

$$C = 180^\circ - (A + B) = 78^\circ\, 36'\, 6''.$$

Рачунање стране a.	Рачунање стране b.
$a = \frac{c \sin A}{\sin C}$	$b = \frac{c \sin B}{\sin C}$
$\log c$ . . . . 3·5788191	$\log c$ . . . . 3·5788191
$\log \sin A$ . . 9·8306945—10	$\log \sin B$ . . 9·9324987—10
— $\log \sin C$ . . 0·0088047	— $\log \sin C$ . . 0·0088047
Збир . . 13·4183183—10	Збир . . . . 13·5201225—10
$\log a$ . . . . 3·4183183	$\log b$ . . . . . . 3·5201225
$a = 2620{\cdot}1$.	$b = 3312{\cdot}24$.

Рачунање површине p.

$$p = \frac{1}{2} \frac{c^2 \sin A \sin B}{\sin C}.$$

$2 \log a$	7·1576382	
$\log \sin A$	9·8306945	— 10
$\log \sin B$	9·9324987	— 10
$-\log \sin C$	0·0088047	
compl. $\log 2$	9·6989700	
Збир	36·6286061	— 30
$\log p$	6·6286061	

$$p = 4252125{\cdot}5.$$

Други случај. Дате су две стране a и b и угао A. који је насрам стране a.

87. *Прва метода.* Непознати комади налазе се помоћу образаца

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},\ C = 180^\circ - (A + B),\ c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Кад је B близу 90°, а то је случај, кад је a готово једнако $b \sin A$, то јест висини, која одговара страни c, онда се исти угао неможе тачно из свог синуса изнаћи; у таквом случају треба најпре израчунати $b \sin A$, после чега се угао налази помоћу обрасца

$$tg\, B = \pm \frac{b \sin A}{\sqrt{(a+b \sin A)(a-b \sin A)}},$$

који се добија, кад се у обрасцу

$$tg\, B = \pm \frac{\sin B}{\sqrt{1 - \sin^2 B}}$$

$sin\ B$ замени горњом вредношћу $\frac{b\ sin\ A}{a}$; но може се употребити и образац

$$tg\ (45^\circ + \frac{1}{2} B) = \pm \sqrt{\frac{a + b\ sin\ A}{a - b\ sin\ A}},$$

који се добија, кад се у обрасцу

$$tg\ (45^\circ + \frac{1}{2} B) = \pm \sqrt{\frac{1 + sin\ B}{1 - sin\ B}},$$

$sin\ B$ замени горњом вредношћу; последњи пак образац сљедује просто из првог обрасца под 4) № 39, стављајући тамо $p = 90^\circ$, $q = B$.

Но и последњи обрасци недају B тачно, кад је исти угао сасвим близу 90° и дани комади, као што то често бива, нису савршено тачни; јер тада мала погрешка у даним комадима повлачи за собом велику погрешку у углу B. (Види обрасце № 132)

88. Да би задатак у овом другом случају био можан, треба да је $sin\ B$ то јест $\frac{b\ sin\ A}{a} \leqq 1$ или $a \geqq b\ sin\ A$, то ће рећи треба да a није мање од висине, која одговара страни c. Ако је овај захтев испуњен, таблица ће дати за B један угао $B' < 90^\circ$. Суплеменат угла B' то јест $180^\circ - B' = B''$ има исти синус као и угао B', и потоме наћићемо два и то суплементна угла B' и B'', који количини $sin\ B$ одговарају.

Замењујући B у обрасцу

$$C = 180^\circ - (A + B)$$

узастопце вредностима B' и B'' наћићемо за C две вредности

$$C' = 180^\circ - (A + B'), \; C'' = 180^\circ - (A + B'') = B' - A.$$

Пошто вредности за C морају бити положне, то да би угли B' и B'' задатку одговарали, треба да је

$$A + B' < 180^\circ, \quad A + B'' < 180^\circ.$$

Ако ове неједнакости вреде, синуси углова C', C'' биће положни, и једначина

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

даће за страну c две положне вредности

$$c' = \frac{a \sin C'}{\sin A}, \quad c'' = \frac{a \sin C''}{\sin A}.$$

Једини дакле услови, који морају бити испуњени, јесу

$$A + B' < 180^\circ, \quad A + B' < 180^\circ.$$

Испитајмо, у којим ће то приликама бити случај.

1°. Ако је дани угао $A \geqq 90^\circ$ биће

$$A + B'' > 180^\circ,$$

дакле вредност B'' неће задатку одговарати.

Да би B' задатку одговарало, треба да је

$$A + B' < 180^\circ, \text{ дакле } B' < 180^\circ - A,$$

или пошто су B' и $180^\circ - A$ оштри угли

$$\sin B' < \sin (180^\circ - A) \text{ или } < \sin A,$$

то ће рећи треба да је

$$\frac{b \sin A}{a} < \sin A \quad \text{дакле} \quad b < a.$$

По овоме кад је дани угао $A \geqq 90^\circ$, задатак м
имати само једно разрешење, а да би га имао, изискуј
да је страна наспрам даног угла већа од друге дане стр

2°. Ако је $A < 90^\circ$, биће

$$A + B' < 180^\circ,$$

дакле ће тада B' увек задатку одговарати па било $a \gtrless$
да би и $B'' = 180^\circ - B'$ задатку одговорило, треба да

$$A + B'' < 180^\circ \text{ или } A < 180^\circ - B'',$$

или пошто су угли A и $180^\circ - B''$ оба оштри

$$\sin A < \sin B'', \quad \sin A < \frac{b \sin A}{a}, \text{ дакле } a < b.$$

По овоме да би задатак имао два разрешења, треб
да је страна наспрам даног оштрог угла A мања од друг
дане стране. У осталом овај је услов довољан, претпостављајући само да је $\frac{b \sin A}{a} < 1$, или што је свеједно $a > b \sin A$.

Кад је $a = b \sin A$, тада је

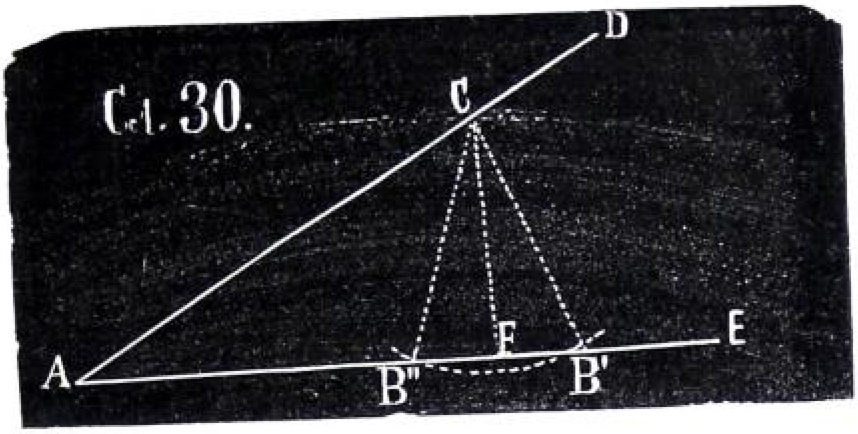
$$B' = 90^\circ, \quad B'' = 90^\circ,$$

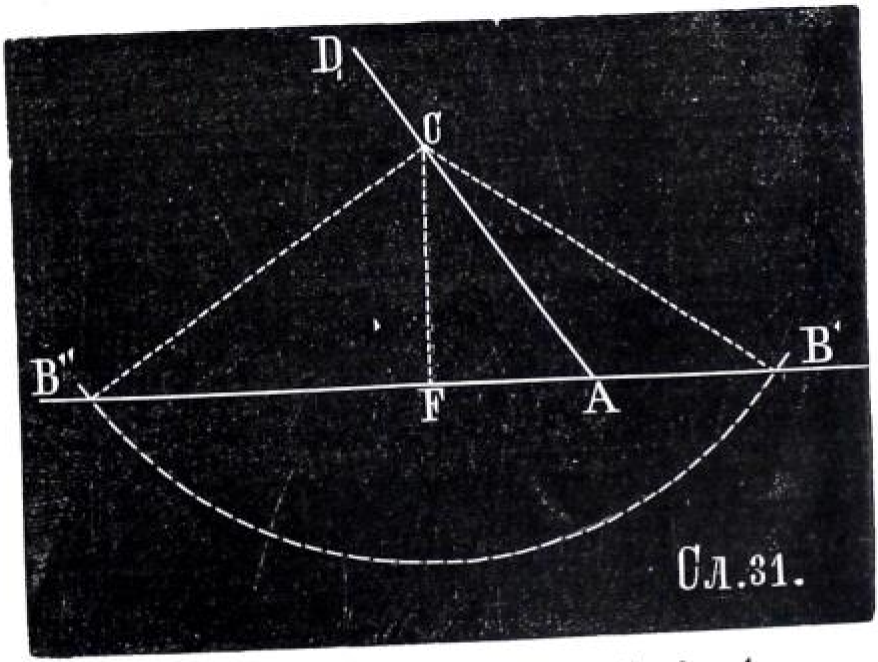
неједнакости $A + B' < 180^\circ$, $A + B'' < 180^\circ$ тада се своде на $A < 90^\circ$; дани угао мора дакле тада бити оштар и задатак има само једно разрешење.

Из овога претреса види се дакле, да кад је задатак можан, дакле кад је $\frac{b \sin A}{a} < 1$, он ће имати једно или два разрешења, како је кад страна стојећа наспрам данога угла већа или мања од друге дане стране.

89. Геометријским претресом задатка долази се до стих резултата као и у № 88.

Нека је (сл. 30 и 31) $D\,A\,E = A$, $A\,C = b$; тачке A, C биће два темена траженог троугла. Треће теме биће у пресеку праве $A\,E$ и круга описаног из средишта C са a као полупречником. Да би се ове две линије секле, треба да је a најмање једнако управној спуштеној са C на $A\,E$. Пошто је у правоуглом троуглу CAF: $C\,F = b \sin A$, то треба да је a најмање једнако $b \sin A$, или што је свеједно $\frac{b \sin A}{a}$ несме бити веће од јединице.





Претпостављајући сад да је $\frac{b \sin A}{a} < 1$, биће

$$a > C\,F;$$

описани круг сећиће у двема тачкама B', B'' праву $A\,E$, продужену ако је нужно на противну страну од A. На тај начин добивене тачке B', B'' одговараће задатку само тако,

ако се налазе на самој правој AE а не на њеном продужењу. Потоме број разрешења биће једнак броју пресека на правој AE.

Претпоставимо сад, да је (сл. 31) угао $A > 90^{\circ}$; тачка F налазиће се на продужењу праве AE; то ће исто бити и са тачком B'', због чега она неможе задатку одговарати. Да би B' задатку одговарало, треба да је

$$FB' > FA, \text{ одакле } CB' > CA \text{ или } a > b.$$

Ако је дани угао $A = 90^{\circ}$, тачке B', B'' биће од A једнако далеко, и с тога троугли CAB', CAB'' једнаки. У том случају биће само једног разрешења, ако је $a > b$, а ниједног, ако тај захтев није испуњен.

Ако је (сл. 30) угао $A < 90^{\circ}$, тачка B' биће на правој AE, и с тога одговараће задатку. Да би и тачка B'' на правој AE била, и дакле задатку одговарала, треба да је $FB'' < FA$, дакле $CB'' < AC$ или $a < b$.

Најзад кад је $CF = a$, дакле $\frac{b \sin A}{a} = 1$, круг ће дирати праву AE или њено продужење у тачки F. Задатак ће тада имати једно разрешење, ако је $A < 90^{\circ}$ а ниједно ако је $A \geqq 90^{\circ}$.

90. *Друга метода*. Горе смо најпре угле B, C израчунали, а затим смо страну c нашли помоћу вредности нађених за исте угле; но може се захтевати, да се страна c непосредно из датих комада израчуна. Исту страну можемо изнаћи помоћу сљедећег обрасца

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A,$$

који се може написати и овако

$$c^2 - 2\,b \cos A.c + b^2 - a^2 = 0.$$

Разрешењем ове квадратне једначине налазимо

$$c = b \cos A \pm \sqrt{b^2 \cos^2 A - b^2 + a^2},$$

или простије

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A},$$

Пошто вредности за c морају бити стварне и положне, то треба најпре да је $a^2 \geqq b^2 \sin^2 A$, или што је свеједно $a \geqq b \sin A$. Претпостављајући да ово стоји, вредности за c биће стварне и неједнаке. Да видимо сад, кад ће оне бити положне.

Кад је $A > 90^0$, $\cos A$ је одречан и зато вредност

$$b \cos A - \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$$

неможе задатку одговарати, јер је одречна. Да би друга за c нађена вредност задатку одговорила, треба да је узастопце

$$b \cos A + \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A} > 0,$$

$$\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A} > - b \cos A,$$

$$a^2 - b^2 \sin^2 A > b^2 \cos^2 A, \qquad a^2 > b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A),$$

и најзад $a > b$.

Ако је $A = 90^0$ биће

$$\cos A = 0, \ \sin A = 1, \text{ дакле } c = \sqrt{a^2 - b^2}, \text{ одакле } a > b.$$

Ако је најпосле $A < 90^0$, онда је $\cos A > 0$ и вредност

$$b \cos A + \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$$

одговара задатку, јер је положна. Да би и друга вредност

$$b \cos A - \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$$

задатку одговарала, треба да је

$$\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A} < b \cos A\,, \quad a^2 - b^2 \sin^2 A < b^2 \cos^2 A$$

$$a^2 < b^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) \text{ и } a < b.$$

И тако дакле наилазимо на исте услове као и при првом претресу задатка.

Да би при израчунавању стране c помоћу обрасца

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$$

могли употребити логаритме, треба десну страну претставити као моном. Помоћу једног врло простог преображаја добијамо најпре

$$c = b \cos A \pm a \sqrt{1 - \frac{b^2 \sin^2 A}{a^2}}$$

Претпостављајући да је корена количина стварна, биће $\frac{b^2 \sin^2 A}{a^2}$ па дакле и $\frac{b \sin A}{a} < 1$; ако означимо са φ угао, који је такав, да је $\sin \varphi = \frac{b \sin A}{a}$, биће

$$\sqrt{1 - \frac{b^2 \sin^2 A}{a^2}} = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \cos \varphi.$$

Једначина $\sin \varphi = \frac{b \sin A}{a}$ даје међутим

$$b = \frac{a \sin \varphi}{\sin A}.$$

Замењујући сад b и $\sqrt{1-\frac{b^2 \sin^2 A}{a^2}}$ њиховим вредностима у последњем за c добивеном изразу наћићемо

$$c = \frac{a \sin \varphi \cos A}{\sin A} \pm a \cos\varphi$$

$$= \frac{a \sin \varphi \cos A \pm a \cos \varphi \sin A}{\sin A},$$

а одатле

$$c = \frac{a \sin (\varphi \pm A)}{\sin A}$$

образац, који је згодан за логаритамски рачун.

Вредности помоћног угла φ мање од 180° и нађене помоћу једначине $\sin \varphi = \frac{b \sin A}{a}$ истоветне су са вредностима угла B, јер је и $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$, По овоме све вредности угла φ дате су обрасцима.

$$2n\pi + B', (2n+1)\pi - B', 2n\pi + B'', (2n+1)\pi - B''.$$

Замењујући угао φ овим вредностима у обрасцу $c = \frac{a \sin (\varphi \pm A)}{\sin A}$, како би на тај начин добили вредности за c, имаћемо

$$c = \frac{a \sin (2n\pi + B' \pm A)}{\sin A},$$

$$c = \frac{a \sin [(2n+1)\pi - B' \pm A]}{\sin A}$$

$$c = \frac{a \sin (2n\,\pi + B'' \pm A)}{\sin A},$$

$$c = \frac{a \sin [(2n+1)\pi - B'' \pm A]}{\sin A}.$$

Ове једначине своде се на сљедеће две

$$c = \frac{a \sin (B' \pm A)}{\sin A}, \qquad c = \frac{a \sin (B'' \pm A)}{\sin A}$$

Угли B' и B'' допуњавају се до 180°, што је случај и са углима $B' + A$ и $B'' - A$, као и са углима $B' - A$ и $B'' + A$; одатле сљедује

$$\sin (B'' - A) = \sin (B' + A), \sin (B' - A) = \sin (B'' + A),$$

и потоме c има само две различне вредности

$$c = \frac{a \sin (B' + A)}{\sin A}, \qquad c = \frac{a \sin (B'' + A)}{\sin A}.$$

Пошто су најзад вредности угла C то јест C', C'' суплементи углова $B' + A$, $B'' + A$, то је

$$c = \frac{a \sin C'}{\sin A}, \qquad c = \frac{a \sin C''}{\sin A}$$

Као што се види овај други начин разрешавања у ствари је исти са оним првим.

Још примећујемо напослетку, да се у случају двојаког разрешења може врло лако дознати, да ли је се добро радило, треба само (сл. 29) израчунати $AF = b \cos A$ и видити, да ли је $AF = \frac{1}{2}(c' + c'')$.

91. **Пример. Дати су комади**

$$A = 23^\circ\, 38'\, 52{\cdot}7'',\; a = 4962{\cdot}5,\; b = 10873,$$

раже се B, C, c.

Израчунавање угла B.

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$\log b$	4·0363494	
$\log \sin A$	9·6032702	— 10
ompl. $\log a$	6·3042995	
збир	19·9439191	— 20
$\log \sin B$	9·9439191	— 10.

Има два разрешења, јер страна a, налазећа се спрам даног угла A, мања је од друге дане стране b.

$$B' = 61^\circ\, 30'\, 18''.$$

Прво разрешење.

$$B' = 61^\circ\, 30'\, 18''.$$

Рачунање угла C.

$$C' = 180^\circ - (A + B')$$

$$A = 23^\circ\, 38'\, 52{\cdot}7''$$

$$B' = 61^\circ\, 30'\, 18''$$

$$A + B' = 85^\circ\;\; 9'\, 10{\cdot}7''$$

$$C' = 94^\circ\, 50'\, 49{\cdot}3''.$$

Рачунање стране c.

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

$$B'' = 118^\circ\, 29'\, 42''$$

Друго разрешење.

$$B'' = 118^\circ\, 29'\, 42''$$

Рачунање угла C.

$$C'' = 180^\circ - (A + B'')$$

$$A = 23^\circ\, 38'\, 52{\cdot}7''$$

$$B'' = 118^\circ\, 29'\, 42''$$

$$A + B'' = 142^\circ\;\; 8'\, 34{\cdot}7''$$

$$C'' = 37^\circ\, 51'\, 25{\cdot}3''$$

Рачунање стране c.

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

log a . . 3·6957005	*log a* . . 3·6957005
log sin C' . 9·9984441—10	*log sin C''*. 9·7879513—10
—*log sin A* . . 0·3967298	—*log sin A* . . 0·3967298
збир . . . 14·0908744—10	збир . . . 13·8803816—10
log c' . . . . 4·0908744	*log c''* . . . . . 3·8803816
$c' = 12327·48.$	$c'' = 7592\ 44.$

Контрола рада

$$A\,F = b \cos A$$

log b	4·0363494	
log cos A	9·9619084	— 10
збир	13·9982578	— 10
log A F	3·9982578	

$$A\,F = 9959·96\,,$$

$$\frac{1}{2}(c' + c'') = 9959·96$$

Трећи случај. Дате су две стране a, b и захваћени угао C.

92. *Прва метода.* Троугао је у овом случају увек можан.

Претпоставимо $a > b$, због чега и $A > B$ бити мора.

Да би непознате угле A, B израчунали, послужићемо се обрасцем првим под 2) у № 72. Из истог обрасца добијамо

$$tg\,\frac{1}{2}(A - B) = \frac{a-b}{a+b}\,tg\,\frac{1}{2}(A + B),$$

или због $\frac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C.$

$$tg\,\frac{1}{2}\,(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\,cotg\,\frac{1}{2}\,C.$$

Из овог обрасца налазимо полуразлику

$$\frac{1}{2}(A-B)=R\,,$$

но с друге стране знамо, да је

$$\frac{1}{2}(A+B)=90^{\circ}-\frac{1}{2}\,C;$$

из ових двеју једначина добијамо сабирањем и одузимањем

$$A=90^{\circ}-\frac{1}{2}\,C+R\,,\;B=90^{\circ}-\frac{1}{2}\,C-R$$

Има се приметити, да као контрола радње неможе служити то, што нађени угли задовољавају једначину $A+B+C=180^{\circ}$; јер угли A и B нису нађени независно један од другога; они су нађени помоћу једначина

$$\frac{1}{2}(A-B)=R \text{ и } \frac{1}{2}(A+B)=90^{\circ}-\frac{1}{2}\,C,$$

од којих је последња иста што и $A+B+C=180^{\circ}$. Из тога сљедује, да угли A, B, C морају задовољити ову једначину, па ма да је R — а с тога угли A, B — погрешно израчунато. И заиста сабирајући једначине

$$A=90^{\circ}-\frac{1}{2}\,C+R\,,\quad B=90^{\circ}-\frac{1}{2}\,C-R$$

налазимо

$$A+B=180^{\circ}-C \text{ или } A+B+C=180^{\circ},$$

па било R тачно израчунато или не.

Пошто су угли A, B израчунати, страна c може се наћи помоћу обрасца

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A};$$

но згодније је тражити је помоћу једног од образаца под 1) № 72. Из истих с обзиром на то, да је због

$$\frac{1}{2}(A + B) = 90^o - \frac{1}{2} C:$$

$$\sin \frac{1}{2}(A + B) = \cos \frac{1}{2} C \text{ и } \cos \frac{1}{2}(A + B) = \sin \frac{1}{2} C$$

добијамо

$$c = \frac{(a + b) \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(A - B)}, \qquad c = \frac{(a - b) \cos \frac{1}{2} C}{\sin \frac{1}{2}(A - B)}.$$

Ови су обрасци згоднији зато, што се код њих само два нова логаритма имају тражити, док међутим код горњег три.

93. *Друга метода.* Страна c може се и непосредно из датих комада a, b, C израчунати, јер из обрасца

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\, ab \cos C$$

сљедује

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\, ab \cos C}.$$

Да би код овог обрасца могли употребити логаритме, треба његову десну страну претворити у моном. Зарад тога заменимо $\cos C$ вредношћу $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} C$, па ћемо добити

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab\,(1 - 2\,sin^2 \frac{1}{2}\,C)},$$

акле

$$c = \sqrt{(a - b)^2 + 4\,ab\,sin^2 \frac{1}{2}\,C}$$

$$= (a - b)\sqrt{1 + \frac{4\,ab\,sin^2 \frac{1}{2}\,C}{(a - b)^2}}$$

Означавајући са φ угао, који је такав, да је

$$tg^2\varphi = \frac{4\,ab\,sin^2 \frac{1}{2}\,C}{(a - b)^2} \quad \text{или} \quad tg\,\varphi = \frac{2\sqrt{ab}\,sin\,\frac{1}{2}\,C}{a - b}$$

обијамо

$$c = (a - b)\sqrt{1 + tg^2\varphi} \quad \text{или} \quad c = \frac{a - b}{cos\,\varphi}\,.$$

Образац

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,ab\,cos\,C}$$

оже се на још један начин удесити за логаритамски рачун.

Множећи $a^2 + b^2$ количином $cos^2 \frac{1}{2}\,C + sin^2 \frac{1}{2}\,C$, оја је једнака јединици и замењујући $cos\,C$ његовом вредношћу $cos^2 \frac{1}{2}\,C - sin^2 \frac{1}{2}\,C$ добијамо

$$= \sqrt{(a^2 + b^2)(cos^2 \frac{1}{2}\,C + sin^2 \frac{1}{2}\,C) - 2ab(cos^2 \frac{1}{2}\,C - sin^2 \frac{1}{2}\,C)}$$

дакле

$$c = \sqrt{(a+b)^2 \sin^2 \frac{1}{2} C + (a - b)^2 \cos^2 \frac{1}{2} C},$$

или

$$c = (a+b) \sin \frac{1}{2} C \sqrt{1 + \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \cot g^2 \frac{1}{2} C.}$$

Означавајући са φ помоћни угао, који је такав, да је

$$tg\, \varphi = \frac{a-b}{a+b} \cot g \frac{1}{2} C.$$

добијамо даље

$$c = (a+b) \sin \frac{1}{2} C \sqrt{1 + tg^2 \varphi}$$

или

$$c = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} C}{\cos \varphi}.$$

Помоћу таблица моћићемо из овог обрасца израчунати страну c, пошто смо најпре из оног за $tg\, \varphi$ угао φ израчунали.

Овај последњи начин разрешавања неразликује се од оног првог у № 92 показаног, јер угао φ једнак је углу $\frac{1}{2}(A-B)$ зато, што је вредност тангенте како једног тако и другог угла

$$\frac{a-b}{a+b} \cot g \frac{1}{2} C$$

одакле сљедује

$$\frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} C}{\cos \varphi} = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} (A-B)},$$

то јест вредност за c у овој № нађена истоветна је са оном која је нађена у № 92.

94. *Трећа метода*. У применама догађа се често, да су не саме стране a, b, већ њини логаритми познати. Да би у таквом случају $\frac{1}{2}(A-B)$ помоћу обрасца

$$tg\frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\,cotg\frac{1}{2}C$$

израчунали, морали би најпре a и b у таблицама тражити; но тај се посао може уштедити употребом једног помоћног угла. Последњи образац може се написати и овако

$$tg\frac{1}{2}(A-B)=\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}}\,cotg\frac{1}{2}C.$$

Означавајући са φ угао, који је такав да је $tg\,\varphi=\frac{b}{a}$, имаћемо

$$tg\frac{1}{2}(A-B)=\frac{1-tg\,\varphi}{1+tg\,\varphi}\,cotg\frac{1}{2}C,$$

или, пошто је $tg\,(45^\circ-\varphi)=\frac{1-tg\,\varphi}{1+tg\,\varphi}$,

$$tg\frac{1}{2}(A-B)=tg\,(45^\circ-\varphi)\,cotg\frac{1}{2}C.$$

Помоћу овог обрасца лако ћемо наћи $\frac{1}{2}(A-B)$, пошто смо најпре израчунали угао φ помоћу обрасца $tg\,\varphi=\frac{b}{a}$

Кад су угли A и B израчунати, страну c треба тражити помоћу обрасца

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

95. *Четврта метода.* При разрешавању задатка у овом трећем случају могу се употребити и обрасци

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin C}{\sin A}, \qquad b = a \cos C + c \cos A;$$

из њих сљедује најпре

$$c \sin A = a \sin C, \qquad c \cos A = b - a \cos C,$$

а после

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}, \qquad tg\, A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C}.$$

Помоћу ових образаца задатак се такође просто решава, особито онда, кад је b непосредно а a преко свог логаритма дато. Из последњих једначина изводимо за логаритамски рачун

$$\log c = \log a + \log \sin C - \log \sin A,$$

$$\log tg\, A = \log a + \log \sin C - \log (b - a \cos C).$$

Лако је увидити, да ће угао $A \lesseqgtr 90^\circ$ бити, како је кад именилац $b - a \cos C \gtreqless 0$. Пошто одречне количичине немају логаритама, то да би последњи образац и онда могао поднети, кад је $b - a \cos C < 0$, треба га написати овако

$$\log \pm tg\, A = \log a + \log \sin C - \log \pm (b - a \cos C),$$

де горњи знаци иду заједно, а тако исто и доњи; то ест кад је $b - a \cos C < 0$, треба променити знак истој оличини, а тако исто и количини $tg\, A$, и тада ће таблица ати место угла A угао суплеменат $180^\circ - A$.

Кад је A нађено, B ће се наћи помоћу обрасца $+ B + C = 180^\circ$, а c помоћу оног горе написаног.

96. Пример. Дати су комади

$$a = 3379{\cdot}6, \quad b = 2796{\cdot}8, \quad C = 49^\circ 32' \, 13{\cdot}78'',$$

раже се A, B и c.

Први начин.

$$a + b = 6176{\cdot}4, \qquad a - b = 582{\cdot}8,$$

$$\frac{1}{2} C = 24^\circ \, 46' \, 6{\cdot}89''.$$

Рачунање углова A и B.

$$tg \frac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \, cotg \frac{1}{2} C.$$

$\log (a - b)$	2·7655195
$\log cotg \frac{1}{2} C$	0·3359228
$compl. \log (a + b)$	6·2092646
$\log tg \frac{1}{2}(A - B)$	9·3107069 — 10
$\frac{1}{2}(A - B)$	11° 33′ 28·79″
$\frac{1}{2}(A + B)$	65° 13′ 53·11″

$$A = 76^\circ \, 47' \, 21{\cdot}9'', \qquad B = 53^\circ \, 40' \, 24{\cdot}32''.$$

Рачунање стране c.

$$c = \frac{(a-b)\cos\frac{1}{2}C}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}$$

$\log(a-b) \,..\, 2{\cdot}7655195$

$\log\cos\frac{1}{2}C \,..\, 9{\cdot}9580893-10$

$-l.s.\frac{1}{2}(A\text{-}B) \, 0{\cdot}6981895$

збир . . . $13{\cdot}4217983-10$

$\log c$ . . . $3{\cdot}4217983$

$c = 2641{\cdot}18.$

Рачунање површине p.

$$p = \frac{1}{2}ab\sin C$$

$\log a$ . . $3{\cdot}5288653$

$\log b$ . . $3{\cdot}4466614$

$\log\sin C$ . . $9{\cdot}8812859-10$

$com.\log 2$ . . $9{\cdot}6989700$

збир . . . $26{\cdot}5557826-20$

$\log p$ . . . $6{\cdot}5557826$

$p = 3595693.$

Други начин.

Рачунање угла A.

$$tg\,A = \frac{a\sin C}{b-a\cos C}.$$

$\log a$ . . $3{\cdot}5288653$

$\log\cos C$ . . $9{\cdot}8122144-10$

збир . . $13{\cdot}3410797$

$\log a\cos C$ $3{\cdot}3410797$

$a\cos C$ . . $2193{\cdot}21$

$b - a\cos C$ $603{\cdot}59$

$\log a$ . . $3{\cdot}5288653$

$\log\sin C$ . . $9{\cdot}8812859-10$

$c.l(b\text{-}a\cos C) \,..\, 7{\cdot}3192580$

збир . . . $20{\cdot}6294092-20$

$\log tg\,A$ . . $0{\cdot}6294092$

$A = 76^{\circ}\,47'\,22''.$

Рачунање стране c.

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A}.$$

log a	3·5288653
log sin C	9·8812859
— *log sin A*	0·0116476
збир	13·4217988
log c	3·4217988

$$c = 2641{\cdot}18.$$

97. *Четврти случај. Дане су све три стране троугла.* Непознати угли израчунавају се помоћу образаца под 3), 4), 5) у № 73. Обрасце под 5), а ти су

$$tg\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\,,$$

$$tg\,\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}\,,$$

$$tg\,\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\,,$$

треба онима под 3) и 4) претпоставити, особито онда кад се сва три угла траже; јер помоћу истих образаца под 5) не само да се угли A, B, C услед № 58 тачније налазе, но се и мање логаритама има тражити, него ли при употреби образаца под 3) и 4).

98. Да би у овом четвртом случају задатак био можан треба, као што то већ из просте геометрије знамо, да је свака страна мања од збира осталих двеју. До истих услова долази се и претресом образаца под 3), 4) и 5) у № 73.

Да би угао A на пример одговарао задатку, треба да је $\frac{1}{2}A < 90^\circ$, дакле да је $tg\,\frac{1}{2}A$ стварна количина, а

$\sin \frac{1}{2} A$ и $\cos \frac{1}{2} A$ да су стварне количине и мање од јединице.

Посматрајмо најпре образац

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

Да би $\sin \frac{1}{2} A$ био стварна количина, треба да су чиниоци $s-b$, $s-c$ једнако означени; но како исти немогу бити одречни, јер је њихов збир $= a$, то треба да је

$$s-b>0 \quad \text{и} \quad s-c>0,$$

или

$$a-b+c>0 \quad \text{и} \quad a+b-c>0$$

или најзад

$$a+c>b \quad \text{и} \quad a+b>c;$$

свака од двеју страна b, c мора дакле бити мања од збира осталих двеју.

Да би $\sin \frac{1}{2} A$ био мањи од јединице, треба да је

$$(s-b)\ (s-c)<bc,$$

то ће рећи

$$(a-b+c)\ (a+b-c)<4\ bc$$

дакле

$$a^2-(b-c)^2<4\ bc$$

$$a^2<(b+c)^2 \quad \text{и} \quad a<b+c;$$

трећа страна мора дакле такође бити мања од збира осталих двеју.

Претресимо сад образац

$$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}$$

Да би $\cos \frac{1}{2} A$ био стварна количина, треба да је

$$s - a > o \quad \text{или} \quad b + c - a > o$$

дакле

$$a < b + c.$$

Да би даље $\cos \frac{1}{2} A$ био мањи од јединице, треба да је

$$s\,(s-a) < bc \quad \text{или} \quad (a+b+c)\,(b+c-a) < 4\,bc,$$

дакле $(b+c)^2 - a^2 < 4\,bc, \quad (b-c)^2 < a^2,$

и потоме ако је $b > c$, треба да је даље

$$b - c < a \quad \text{или} \quad b < a + c.$$

Најзад је $c < a + b$, јер је $b > c$.

Претресимо најзад образац

$$tg \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}.$$

Да би $tg \frac{1}{2} A$ била стварна и коначна количина треба да је $\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}$ положна и коначна количина, а зато се изискује, да је једна од количина $s - a$, $s - b$, $s - c$ положна, а остале две да су или обе положне или обе одречне; но ово последње неможе никако бити, јер је збир ма којих двеју од поменутих количина једнак или a, или b, или најзад c. Из тога сљедује, да ће $tg\,\frac{1}{2}A$ бити само тако стварна и коначна количина, ако су све три количине $s-a$, $s-b$, $s-c$ положне, дакле ако је

$$s-a>o,\ s-b>o,\ s-c>o$$

или

$$(b+c-a)>o,\quad a-b+c>o,\quad a+b-c>o,$$

или најзад ако је

$$a<b+c,\quad b<a+c,\quad c<a+b,$$

то ће рећи, ако је свака страна мања од збира осталих двеју.

99. Пример. Дати су комади

$$a = 548{\cdot}07,\quad b = 585{\cdot}67,\quad c = 289{\cdot}04,$$

траже се угли A, B, C.

$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. .	711·39	$log\ s$	2·8521078
$s-a$	163·32	$log\ (s-a)$.	2·2130394
$s-b$	125·72	$log\ (s-b)$	2·0994044
$s-c$	422·35	$log\ (s-c)$	2·6256725

Рачунање угла A		Рачунање угла B.	
$tg\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s\,(s-a)}}$		$tg\,\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s\,(s-b)}}$.	
$log\ (s-b)$..	2·0994044	$log\ (s-a)$ . . .	2·2130394
$log\ (s-c)$..	2·6256725	$log\ (s-c)$ . .	2·6256725
$com.\ log\ s$...	7·1478922	$compl.\ log\ s$ . .	7·1478922
$c.\ lg.\ (s\text{-}a)$...	7·7869606	$com.\ lg\ (s\text{-}b)$. .	7·9005956
Збир . .	19·6599297—20	Збир . . .	19·8871997—20

$\log tg \frac{1}{2} A$.. 9·8299648—10

$$\frac{1}{2} A = 34^\circ\, 3'\, 35{\cdot}29''$$

$$A = 68^\circ\, 7'\, 10{\cdot}58''.$$

Рачунање угла C.

$$tg \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s\,(s-c)}}$$

$\log (s-a)$.. 2·2130394
$\log (s-b)$.. 2·0994044
$compl\, lg\, s$.. 7·1478922
$c.\, lg. (s-c)$... 7·3743275

Збир .. 18·8346635—20

$\log tg \frac{1}{2} C$ 9·4173318—10

$$\frac{1}{2} C = 14^\circ\, 39'\, 0{\cdot}61''$$

$$C = 29^\circ\, 18'\, 1{\cdot}22''.$$

$\log tg \frac{1}{2} B$.. 9·9435999—10

$$\frac{1}{2} B = 41^\circ\, 17'\, 24{\cdot}09''$$

$$B = 82^\circ\, 34'\, 48{\cdot}18''$$

Рачунање површине p.

$$p = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

$\log s$ . . . . 2·8521078
$\log (s-a)$. . . . . . 2·2130394
$\log (s-b)$ . . . . . 2·0994044
$\log (s-c)$ . . . . . 2·6256725

Збир . . . . 9·7902241
$\log p$ . . . . 4·8951120

$$p = 78543{\cdot}89.$$

Контрола радње: $A + B + C = 180^\circ\, 0'\, 0{\cdot}02''$.

2

Задатци.

1° Разрешити правоугли троугао, кад су дати комади

α) $a = 2172{\cdot}49$, $B = 45^\circ\, 53'\, 41{\cdot}95''$,
β) $a = 2176{\cdot}074$, $c = 274{\cdot}824$,
γ) $b = 1225{\cdot}786$, $B = 88^\circ\, 40'\, 28''$,
δ) $b = 11352$, $c = 5014$.

2° Разрешити равнокраки троугао, кад су дани комади

α) основица и један угао,
β) једна страна и један угао,
γ) основица и једна страна,
δ) висина и један угао,
ε) висина и основица
ς) висина и једна страна.

3° Разрешити један троугао, кад су дати комади

α) $a = 599{\cdot}08,\ A = 117^\circ\, 3'\, 10{\cdot}57'',\ B = 18^\circ\, 50'\, 31{\cdot}38''$

$$\beta)\quad \left\{\begin{array}{l} a = 15324,\ b = 16596,\ A = 67^\circ\, 12'\, 26{\cdot}8'', \\ a = 38756,\ c = 57841,\ A = 41^\circ\, 32'\, 17'', \\ a = 557{\cdot}2,\ b = 8632{\cdot}4, A = 86^\circ\, 23'\, 12{\cdot}7'', \end{array}\right.$$

γ) $b = 217{\cdot}29, c = 280{\cdot}36, A = 48^\circ\, 16'\, 57{\cdot}2'',$

δ) $a = 8657.\quad b = 375{\cdot}4,\ c = 8592{\cdot}1.$

Разрешавање троуглова, кад податци нису све сами комади троугла.

100. *Дата је разлика* $b - c$ *катета и један од оштрих углова на пример* B.

Из обрасца

$$b = a \sin B, \quad c = a \sin C$$

сљедује

$$b - c = a\,(\sin B - \sin C) = 2a \cos\frac{1}{2}\,(B + C)\sin\frac{1}{2}(B - C)$$

$$= 2a \cos 45^\circ \sin\frac{1}{2}\,(B - C),$$

одакле

$$a = \frac{b-c}{2\cos 45^\circ \sin\frac{1}{2}(B+C)} = \frac{b-c}{\sqrt{2}\sin\frac{1}{2}(B-C)}.$$

101. *Дата је ипотенуза a и збир b + c катета.*

Из образаца у почетку № 100 сљедује

$$b + c = a(\sin B + \sin C) = 2a \sin 45^\circ \cos\frac{1}{2}(B - C),$$

одакле

$$\cos\frac{1}{2}(B - C) = \frac{b+c}{2a\sin 45^\circ} = \frac{b+c}{a\sqrt{2}}.$$

Да би задатак био можан треба да је $\cos\frac{1}{2}(B-C) < 1$, дакле да је $b + c < a\sqrt{2}$.

102. *Дата је страна c једног троугла, супротни угао C и збир a + b осталих двеју страна.*

Образац 1) у № 72 даје због $\frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C$

$$\cos\frac{1}{2}(A-B) = \frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{c}.$$

Задатак је можан само тако, ако је

$$\frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{c} < 1 \text{ или } (a+b)\sin\frac{1}{2}C < c.$$

Ако је тај захтев испуњен, нађени образац даће полуразлику

$$\frac{1}{2}(A - B) = R;$$

како је познат и полузбир

$$\frac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C,$$

то ће се сабирањем и одузимањем добити

$$A = 90^\circ - \frac{1}{2}C + R \text{ и } B = 90^\circ - \frac{1}{2}C - R.$$

Количина $90^\circ - \frac{1}{2}C + R$ положна је, јер се претпоставља, да је дани угао $C < 180^\circ$, Што се тиче количине $90^\circ - \frac{1}{2}C - R$, она ће бити положна, ако је

$$90^\circ - \frac{1}{2}C > R, \text{ дакле ако је}$$

$$\cos\left(90^\circ - \frac{1}{2}C\right) < \cos R \text{ или } \sin\frac{1}{2}C < \frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C,}{c}$$

или најзад ако је $c < a + b$.

Два се дакле услова изискују, па да задатак буде можан: прво да је страна c мања од збира $a + b$, и друго да је она барем једнака производу из истог збира и синуса угла $\frac{1}{2}C$.

Пошто су угли A и B израчунати, стране a и b тражиће се помоћу образаца

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C}, \quad b = \frac{c \sin B}{\sin C}.$$

103. *Дат је угао B, страна a и збир или разлика $b \pm c$ осталих двеју страна.*

Из образаца

$$tg\,\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s\,(s-b)}},\quad tg\,\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s\,(s-c)}},$$

добија се множењем и деобом

$$tg\,\frac{1}{2}B\,tg\,\frac{1}{2}C = \frac{s-a}{s},\qquad cotg\,\frac{1}{2}B\,tg\,\frac{1}{2}C = \frac{s-b}{s-c}.$$

Ако је збир $b + c$ дат, познато ће бити s и $s - a$; а ако је разлика $b - c$ дата, познато ће бити $s - b$ и $s - c$; дакле ће се у оба случаја угао C помоћу горњих образаца моћи израчунати. Остали непознати комади и површина моћиће се потом по начину № 85 израчунати.

104. *Дати су угли A, B, C, и обим $2s$ троугла.*

Из једначина

$$\frac{a}{sin\,A} = \frac{b}{sin\,B} = \frac{c}{sin\,C}$$

сљедује

$$\frac{a}{sin\,A} = \frac{a + b + c}{sin\,A + sin\,B + sin\,C} = \frac{2\,s}{sin\,A + sin\,B + sin\,C}$$

Пошто је

$$sin\,A + sin\,B = 2\,sin\,\frac{1}{2}(A + B)\,cos\,\frac{1}{2}(A - B),$$

$$= 2\,cos\,\frac{1}{2}C\;cos\,\frac{1}{2}(A - B),$$

$$sin\,C = 2\,sin\,\frac{1}{2}C\;cos\,\frac{1}{2}C,$$

дакле

$$sin\,A + sin\,B + sin\,C = 2\,cos\,\frac{1}{2}\,C\,[cos\,\frac{1}{2}\,(A + B)$$

$$+\;cos\,\frac{1}{2}\,(A - B] = 4\,cos\,\frac{1}{2}\,A\;cos\,\frac{1}{2}\,B\;cos\,\frac{1}{2}\,C,$$

то је даље

$$\frac{a}{sin\,A} = \frac{2\,s}{4\,cos\,\frac{1}{2}A\,cos\frac{1}{2}B\,cos\frac{1}{2}\,C} = \frac{s}{2\,cos\,\frac{1}{2}A\,cos\frac{1}{2}B\,cos\frac{1}{2}\,C}$$

или

$$\frac{a}{2\,sin\,\frac{1}{2}A\,cos\frac{1}{2}\,A} = \frac{s}{2\,cos\,\frac{1}{2}\,A\;cos\,\frac{1}{2}\,B\;cos\,\frac{1}{2}\,C},$$

или напослетку

$$a = \frac{s\;sin\;\frac{1}{2}\,A}{cos\;\frac{1}{2}\,B\;cos\;\frac{1}{2}\,C}.$$

На исти начин налазе се и

$$b = \frac{s\,sin\,\frac{1}{2}\,B}{cos\;\frac{1}{2}\;A\;cos\;\frac{1}{2}\,C},\qquad c = \frac{s\,sin\,\frac{1}{2}\,C}{cos\;\frac{1}{2}\;A\;cos\;\frac{1}{2}\;B}.$$

Замењујући у обрасцу за површину

$$p = \frac{1}{2}\;bc\;\;sin\;A$$

b и c нађеним вредностима добија се врло лако

$$p = s^2tg\;\frac{1}{2}\;A\;\;tg\;\frac{1}{2}\;\;B\;\;tg\,\frac{1}{2}\,C.$$

105. *Познати су угли A, B, C и површина p.*

Из обрасца 2) у № 74 то јест из

$$p = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin A}$$

сљедује

$$a = \sqrt{\frac{2p \sin A}{\sin B \sin C}};$$

из сличних образаца или и простом изменом слова добијају се

$$b = \sqrt{\frac{2p \sin B}{\sin A \sin C}}, \qquad c = \sqrt{\frac{2p \sin C}{\sin A \sin B}}.$$

106. *Дат је обим 2 s, површина p и страна a троугла.*

Из првог обрасца под 5) у № 73, то јест

$$tg \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

добијамо, множећи бројиоца и имениоца под кореним знаком са $s(s-a)$

$$tg \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2 (s-a)^2}}$$

или

$$tg \frac{1}{2} A = \frac{p}{s-a}.$$

Овај образац даје угао A. Пошто је $b + c = 2s - a$, то је збир $b + c$ познат, дакле ће се помоћу обрасца

$$cos\,\frac{1}{2}\,(B-C) = \frac{(b\,+\,c)\;sin\,\frac{1}{2}\,A}{a},$$

који се из једног обрасца у № 72 лако изводи, угао $\frac{1}{2}\,(B-C)$ моћи израчунати. Пошто је количина $\frac{1}{2}\,(B + C) = 90^\circ - \frac{1}{2}\,C$, дакле позната, то се угли B и C појединце могу лако наћи.

Да би стране b и c нашли, треба само њину разлику $b - c$ израчунати, јер је њин збир, као што је већ речено, познат. Разлика се добија помоћу другог обрасца под 1") у № 72; из њега сљедује

$$b - c = \frac{a\;sin\,\frac{1}{2}\,(B - C)}{cos\,\frac{1}{2}\,A}.$$

107. *Дати су угли A, B, C троугла и полупречник r уписаног круга.*

Из једначине 3) у № 75 сљедује

$$s - a = r\;cotg\,\frac{1}{2}A, \qquad s - b = r\;cotg\,\frac{1}{2}B,$$

$$s - c = r\;cotg\,\frac{1}{2}\,C.$$

Ови обрасци дају разлике $s - a$, $s - b$, $s - c$, из којих се после стране a, b, c лако налазе.

108. *Дати су угли A, B, C троугла и полупречник R описаног круга.*

У № 76 већ је нађено

$$a = 2\,R\ \sin A;$$

на сличан начин налази се и

$$b = 2\,R \sin B \quad \text{и} \quad c = 2\,R \sin C.$$

Ови обрасци дају стране троугла; површина p троугла налази се помоћу обрасца

$$p = \frac{1}{2}\,ab\ \sin C = 2\,R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

109. *Дата је страна c, супротни угао C и висина h, која страни c одговара.*

Управна $CD = h$ дели страну c на два комада; један је од тих комада $= h\ cotg\ A$ а други $= h\ cotg\ B$; дакле је

$$c = h\,(cotg\ A + cotg\ B) = \frac{h \sin (A+B)}{\sin A \sin B} = \frac{h \sin C}{\sin A\ \sin B}$$

$$= \frac{2\,h \sin C}{\cos (A-B) - \cos (A+B)} = \frac{2\,h \sin C}{\cos (A-B) + \cos C}$$

одавде сљедује

$$\cos (A - B) = \frac{2h}{c} \sin C - \cos C.$$

Да би код овог обрасца могли употребити логаритме, треба десну страну претворити у моном. Тога рада ставићемо

$$tg\ \varphi = \frac{c}{2h}$$

па ћемо имати

$$\cos (A - B) = \frac{\sin (C - \varphi)}{\sin \varphi}.$$

Помоћу овог обрасца наћићемо разлику $A - B$; пошто је збир $A + B$ познат, моћићемо лако и угле A, B наћи. Пошто су ови израчунати стране ћемо тражити помоћу образаца

$$a = \frac{h}{\sin B}, \qquad b = \frac{h}{\sin A},$$

изведених из троуглова ACD и BCD.

Задатак ће бити можан ако је $\cos (A - B) < 1$, а зато се изискује, да је

$$C - \varphi < \varphi, \qquad C < 2\varphi, \qquad \frac{1}{2} C < \varphi,$$

дакле

$$tg \frac{1}{2} C < tg\, \varphi \quad \text{или} \quad tg \frac{1}{2} C < \frac{c}{2h}.$$

110. *Дата је страна с, одговарајућа висина h и разлика А — В належних углова.*

Угао C налази се помоћу једначине

$$\sin (C - \varphi) = \cos (A - B) \sin \varphi$$

нађене у претходећем задатку. Пошто се угао φ налази између 0° и 90°, то се угао $C - \varphi$ мора налазити између — 90° и 180°. Ако је $\sin (C - \varphi)$ одречан и α оштар угао, који има исти синус али с променутим знаком, биће $C - \varphi = - \alpha$, одакле $C = \varphi - \alpha$, која ће вредност задатку одговарати, ако је положна. Ако је $\sin (C - \varphi)$ положан и α одговарајући угао, биће $C - \varphi = \alpha$ или $C - \varphi = 180° - \alpha$, одакле $C = \varphi + \alpha$, или $C = 180°$

$+ \varphi - \alpha$; прва вредност увек је добра, а друга само онда, кад је мања од 180°.

Пошто је угао C израчунат, није тешко наћи угле A и B као и стране a и b.

111. *Дате су три висине* h, h', h'' *троугла, које странама* a, b, c *одговарају.*

Из једначина

$$ah = 2p, \quad bh' = 2p, \quad ch'' = 2p$$

или

$$a = \frac{2p}{h}, \quad b = \frac{2p}{h'}, \quad c = \frac{2p}{h''},$$

сљедује, да су стране сразмерне изврнутим висинама, то јест количинама $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{h'}$, $\frac{1}{h''}$; уосталом лако је увидити, да ће десне стране образаца

$$sin\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \; cos\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$tg\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

задржати своје вредности, пошто се у њима количине a, b, c, s, $(s-a)$, $(s-b)$, $(s-c)$ замене сразмерним количинама. Стављајући дакле

$$a' = \frac{1}{h}, \quad b' = \frac{1}{h'}, \quad c' = \frac{1}{h''}, \quad \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} = 2s'$$

наћићемо

$$sin\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s'-b')(s'-c')}{b'c'}}, \; cos\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{s'(s'-a')}{b'c'}}$$

$$tg \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s'—b')\ (s'—c')}{s'\ (s—a')}}.$$

Ма који од ових образаца даје угао A; остала два угла B и C добијају се помоћу сличних образаца, који се на сличан начин, или из ових простом изменом слова, налазе.

Да би се страна a нашла, треба узети на ум да је

$$h' = a\ sin\ C = 2a\ sin \frac{1}{2} C\ cos \frac{1}{2} C$$

$$= \frac{2\,a \sqrt{s'(s'—a')(s'—b')(s'—c')}}{b'c'}.$$

одатле сљедује

$$a = \frac{a'}{2\sqrt{s'\ (s'—a')\ (s'—b')\ (s'—c')}} = \frac{a'}{2p'},$$

где је
$$p' = \sqrt{s'\ (s'—a')\ (s'—b')\ (s'—c')}$$

Истим начином долази се и до

$$b = \frac{b'}{2p'}, \qquad c = \frac{c'}{2p'}.$$

Што се тиче површине, она је

$$p = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} \frac{a'}{2p'} \frac{1}{a'} = \frac{1}{4p'}.$$

Такође је лако изразити висинама полупречнике r и R уписаног и описаног круга. Из образаца

$$r = \frac{p}{s}, \quad s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{a'+b'+c'}{4p'} = \frac{s'}{2p'}, p = \frac{1}{4p'}$$

сљедује

$$r = \frac{1}{4p'} : \frac{s'}{2p'} = \frac{1}{2s'};$$

даље, кад се у обрасцу

$$R = \frac{abc}{4p}$$

a, b, c, p замене њиним горњим вредностима, добија се

$$R = \frac{a'b'c'}{(2p')^3} : \frac{1}{p'} = \frac{a'b'c'}{8p'^2}.$$

Из образаца

$$r = \frac{1}{2s'} \quad \text{и} \quad 2s' = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}$$

налази се напослетку

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''},$$

што ће рећи: изврнути полупречник уписаног круга једнак је збиру изврнутих висина.

Задатци.

1° Решити троугао, кад су податци

α) Угли A, B, C и висина, која страни c одговара.

β) Угао C, висина, која страни c одговара и обим троугла.

γ) Угао C и комади, који постају, кад се са темена C на страну c спусти управна.

δ) три праве, које су са темена A, B, C повучене ка срединама супротних страна.

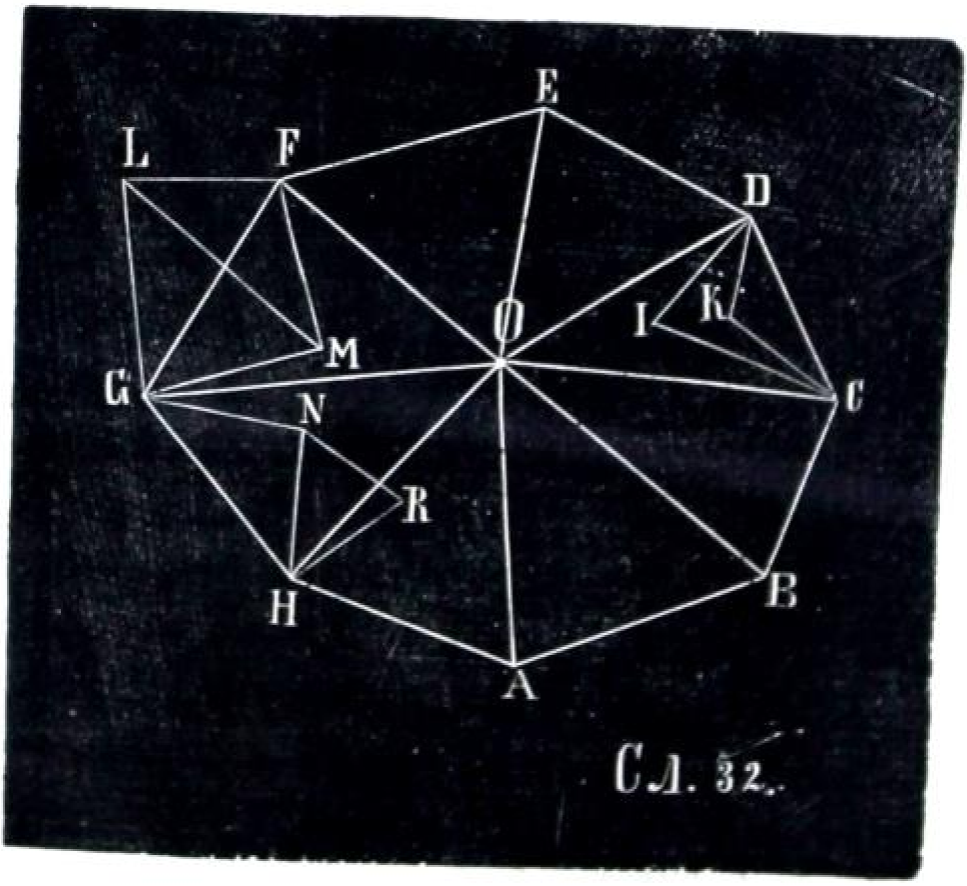
ε) три праве, које полове угле A, B, C.

2° Наћи угле и површину трапеза, кад су дате његове стране.

3°. Поделити један лук на два комада тако, да збир квадрата њихових тетива буде максимум.

Примена равне тригонометрије у практичној геометрији.

112. При премеравању каквог земљишта, за које се тражи тачан снимак, треба га пре свега обићи и проучити; затим треба изабрати што је могуће ближе средишту једну тачку *O* (сл. 32), која се из далека може видити, као врх какве звонаре, знак метнут на каквој повисокој згради, или ако је земљиште равно и једну просту мотку са каквим знаком на њој. Затим треба изабрати у границама земљишта које се има премерити, пет, шест, а ако је нужно и више



Сл. 32.

ачака A, B, C, ... H, одакле се тачка O може видити, исте обележити тако, како би се издалека могле спазити. На тај начин цело земљиште, које се има премерити, биће окривено једном мрежом троуглова ABO, BCO, CDO.... Та се *мрежа* зове *тригонометријска*; склапање исте, и израчунавање појединих троуглова, који је састављају, познато је под именом *триангулације*. Ако земљиште није савршено хоризонтално, што је понајчешће случај, треба га замислити пројецирана на једну хоризонталну испод њега находећу се раван, и тада су комади те пројекције, или као што се каже на *хоризонат сведене* мреже, они који се траже и које треба знати.

Угли троуглова мере се непосредно каквим угломером, најбоље теодолитом, који даје све угле на хоризонат сведене. Од правих само се једна непосредно мери ланцем или хватачом, и зове се *основица*. Остале стране троуглова налазе се рачуном.

При избору тачака, које ће служити као темена појединим троуглима мреже, треба особиту пажњу управити на то, да угли појединих троуглова неиспадну ни врло оштри ни врло тупи; јер кад је каква тачка дата као пресек двеју правих, које се секу под врло оштрим или врло тупим углом, онда мала погрешка у положају једне праве узрок је приметној погрешки у положају саме тачке, у којој се праве секу.

Сад да видимо изближе, како се при триангулацији ради. Пошто је једна страна полигона на пример AB, која је за основицу узета, непосредно измерена и његова темена A, B, C, D, ... обележена тако, да се издалека могу спазити, треба с каквим угломером обићи редом сва темена. Код A треба измерити угле OAH и OAB, код B угле OBA и OBC и т. д., најзад код последње тачке H

угле OHG и OHA. Из величине измерених углова лако је дознати величину углова код O, због чега ове није нужно непосредно мерити, претпостављајући наравно да су угли A. B, C . . . . тачно измерени. Ступањ тачности дознаје се поређењем збира посматраних са збиром полигонских углова, који се последњи збир унапред зна. Разлика поменутих збирова подељена бројем двапут већим од броја полигонских страна даје средњу погрешку посматрања. Ако је та погрешка већа од оне, којој се од употребљеног угломера треба надати, треба посао поновити; у противном случају треба измерене угле сматрати као тачче и манути се непосредног мерења углова код O; али тада треба посматране угле поправити, то јест повећати или смањити их са поменутом средњом погрешком.

Пошто су угли измерени, треба приступити к израчунавању страна појединих троуглова. Из троугла ABO, где су познати угли и страна AB, израчунаће се стране AO и BO; из другог троугла BCO, где су познати угли и страна BO израчунаће се стране BC и CO; из трећег троугла CDO израчунаће се исто тако стране CD и OD . . . ., најзад из последњег троугла HAO израчунаће се стране HA и AO. Разрешењем тога последњег троугла добија се и једно срество контроле целоме послу; јер вредности за страну AO добивене из првог и последњег троугла треба да су једнаке.

Ова прва мрежа троуглова зове се *главна мрежа.* Њене стране могу служити као основице при снимању других тачака. Тако на пример да би се снимиле тачке I и K, треба их свезати са страном CD и угле код C и D у троуглима CID и CKD измерити; затим треба стране истих троуглова израчунати. На исти начин снимиће се тачке L и M, ако се свежу са страном TG главног полигона, а тачка N ако се свеже са страном GH. Пошто су стране ових троуглова другог реда једном израате, могу се и оне узети као основице при снимању дру- тачака. Тако на пример тачка *R* може се снимити, ако веже са страном *MN*.

Ако је земљиште такво, да се за основицу неможе ети једна страна самога полигона, измериће се гдигод уга основица, па ће се иста свезати с једном његовом раном на пример *AB* помоћу једног или највише два троугла. зрешењем истих троуглова наћиће се *AB*, и посао ће се тим наставити, као да је страна *AB* непосредно измерена.

Често се место главног полигона узима прост троугао за основицу једна његова страна. У том случају сва се и угла непосредно мере. Ако њихов збир није = 180°, има се трећина разлике између тог збира и 180°, и то онда средња погрешка посматрања. Ако се та средња грешка може допустити, онда се, као што је горе речено, ли поправљају и потом се троугао решава. Кад су стране зрачунате, онда се тачке, које се желе имати, снимају све- јући их са једном страном троугла.

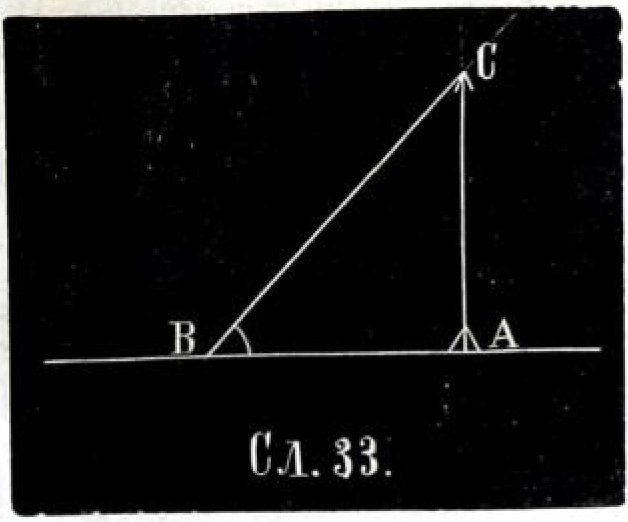
После овога остаје нам још да пређемо неколико за- атака, који се при премеравању често појављују.

113. *Задатак I. Наћи висину предмета, кад му подножје приступно, и земљиште, на коме је, хо- изонтално.*

Нека је (сл. 33) *AC* висина, која се има изнаћи, а *AB* основица од прилике једнака са висином. Измеримо сновицу *AB* и угао *CBA* = *B*, па ћемо из правоуг- ог троугла *ABC* имати

$$AC = AB\,tg\,B,$$

које је тражена висина.



Сл. 33.

Лако је увидити, зашто треба узети основицу од прилике једнаку висини. Угломери недају посматране угле никад савршено тачне већ са неком малом погрешком. Нека је ε та погрешка, која мора бити стална за све угле мерене једним и истим угломером; разлика између нађене и истинске висине предмета биће

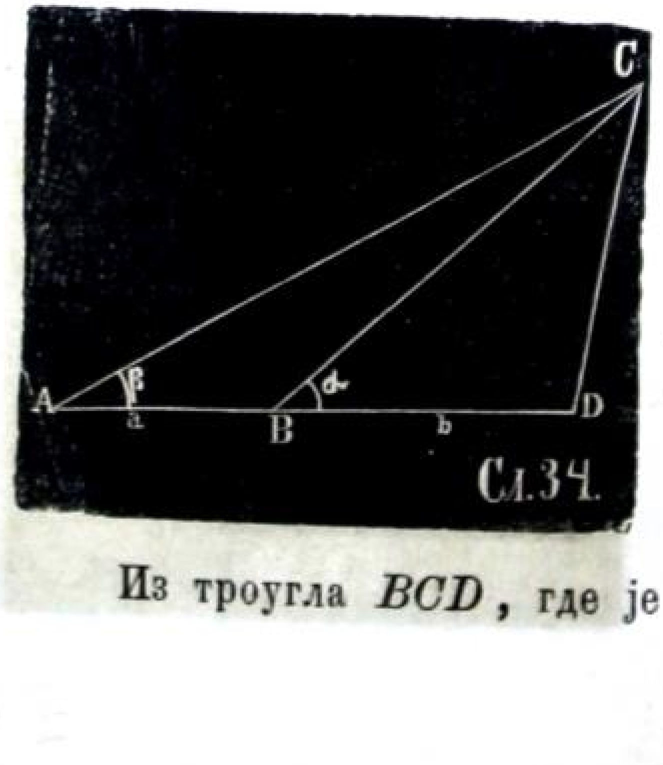
$$AB\,[tg\,(B+\varepsilon) - tg\,B] = AC\,\frac{tg\,(B+\varepsilon) - tg\,B}{tg\,(B+\varepsilon)}$$

$$= AC\,\frac{\sin \varepsilon}{\sin (B+\varepsilon) \cos B} \quad = AC\,\frac{2 \sin \varepsilon}{\sin (2\,B + \varepsilon) + \sin \varepsilon}$$

Пошто је погрешка ε стална, то ће ова разлика бити тим мања што је $\sin\,(2\,B + \varepsilon)$ већи, дакле што је угао $2\,B + \varepsilon$ ближи 90° или угао B ближи 45°. По овоме погрешка учињена при мерењу угла биће од најмањег утицаја на израчунату висину онда, кад је правоугли троугао ABC равнокрак.

114. *Задатак II. Наћи висину предмета, кад се према његовом подножју може мерити.*

а) Нека је (сл. 34) предмет CD, коме се тражи висина, на једној коси; права AD нека иде ка његовом подножју. Измеримо $AB = a$, $BC = b$ као и угле $CBD = \alpha$; $CAD = \beta$. Из троугла ABC, где је угао $ACB = \alpha - \beta$ следује



Сл. 34.

$$BC = \frac{a \sin \beta}{\sin (\alpha - \beta)}.$$

Из троугла BCD, где је сад познато BC, $BD = b$,

ао $CBD = \alpha$, може се висина CD по методи № 92
чунати.

b) Кад је $b = o$, дакле кад је се до подножја D
ло, треба да је осим $AD = a$ и угла $CAD = \beta$ по-
и угао CDA. Ако је γ угао, под којим је AD према
зонту нагнуто, биће угао $CDA = 90^\circ + \gamma$. Из троугла
D добија се тада

$$CD = \frac{a \sin \beta}{\cos(\beta + \gamma)},$$

ле кад је $\gamma = o$, дакле земљиште хоризонтално $CD = a \, tg \, \beta$
и горе у првом задатку.

c) Ако се само до тачке B може мерити, онда треба
A измерити угао, под којим је права AD према хо-
нту нагнута; ако је тај угао $= \gamma$, то је угао $CDA = 90^\circ + \gamma$
оугао BCD даје

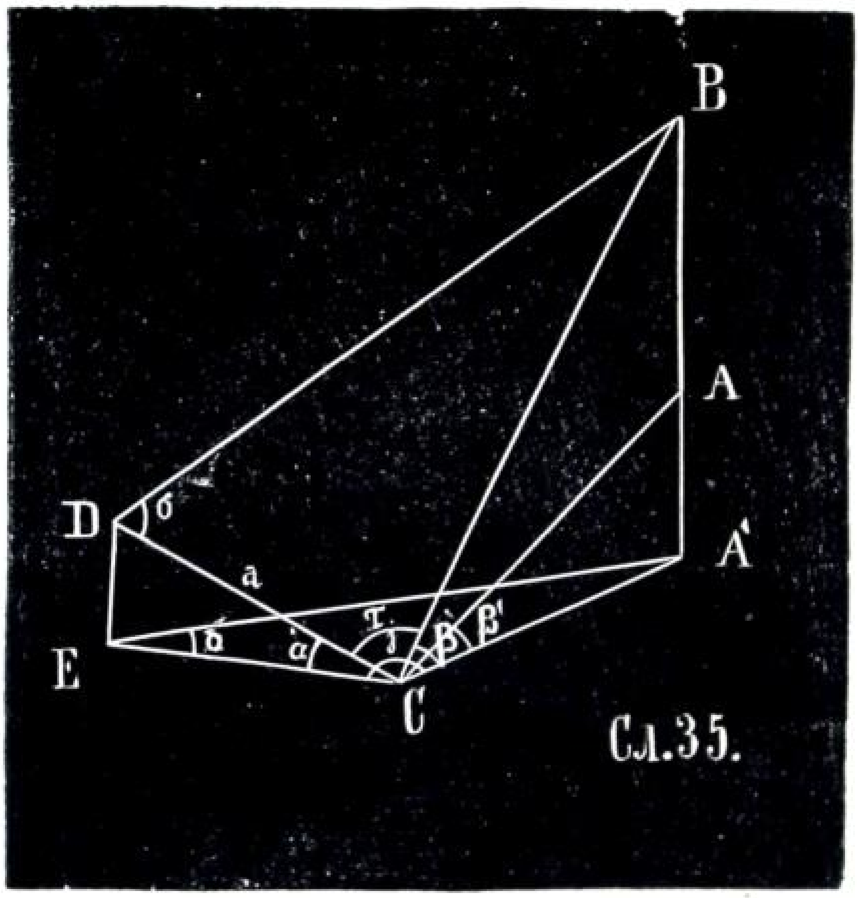
$$CD = \frac{BC \sin \alpha}{\sin(90^\circ + \gamma)} = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta) \cos \gamma}.$$

Ако права иде наниже, а не као што смо претпоста-
навише, онда је $CDA = 90^\circ - \gamma$, но образац се не
. Ако је најзад $\gamma = o$, дакле права AD хоризонтална,
је

$$CD = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

115. *Задатак III. Наћи висину предмета, кад се*
ма његовом подножју неможе никако мерити.

Први начин. Нека је (сл. 35) AB висина, која се има измерити; CD једна под углом α према хоризонту нагнута права; A' и E тачке, где управне AB и DE довољно продужене пробијају кроз C пролазећу хоризонталну раван. Да би сад висину AB измерили, измеримо праву $CD = a$; измеримо такође код тачке C управне



Сл.35.

угле $BCA' = \beta$, $ACA' = \beta'$, $DCE = \alpha$, а код тачака C и D хоризонталне угле $A'CE = \gamma$, $A'EC = \delta$. Учинивши то добићемо из троугла DCE

$$CE = a \cos \alpha ;$$

из троугла $A'CE$

$$A'C = \frac{CE \sin \delta}{\sin (180^\circ - \gamma - \delta)} = \frac{a \cos \alpha \sin \delta}{\sin (\gamma + \delta)} ,$$

и најзад из правоуглог троугла BCA'

$$1) \qquad A'B = A'C \, tg \, \beta = \frac{a \cos \alpha \sin \delta \, tg \, \beta}{\sin (\gamma + \delta)} .$$

На исти начин добијамо из троугла $A'AC$

$$AA' = A'C \, tg \, \beta' = \frac{a \cos \alpha \sin \delta \, tg \, \beta'}{\sin (\gamma + \delta)} .$$

Помоћу вредности нађених за $A'B$ и AA' добијамо

$$AB = A'B - AA' = \frac{a \cos \alpha \sin \delta}{\sin (\gamma + \delta)} (tg\, \beta - tg\, \beta'),$$

и другојачије

$$AB = \frac{a \cos \alpha \sin \delta \sin (\beta - \beta')}{\sin (\gamma + \delta) \cos \beta \cos \beta'}.$$

Ако је A испод A', треба β' заменити са $- \beta'$ и тада мо место обрасца 2) имати образац

$$AB = \frac{a \cos \alpha \sin \delta \sin (\beta + \beta')}{\sin (\gamma + \delta) \cos \beta \cos \beta'}. \qquad)$$

Што се тиче тачке D, она може стајати више или иже тачке C, то ће рећи угао α може бити положан или дречан, резултат се не мења.

По овој методи може се наћи висина каквог предмета долини са каквог оближњег брега, који је виши од самог редмета, но тада морају угли β и β' бити оба одречни, ад се образац 2) употребљује; ако ли се притом образац) употребљује, угао је β одречан и мањи од β'.

Ако је A у A', дакле у хоризонталној равни, која роз C пролази, онда је $\beta' = o$, дакле висину предмета аје образац 1). Ако је $\alpha = o$, дакле права CD хоризонтална, онда је у обрасцима 1), 2), и 3) $\cos \alpha = \cos o^{\circ} = 1$.

Други начин. Пошто смо праву $CD = a$ измерили, као угле $BCA' = \beta$ и $ACA' = \beta'$, измерићемо још и угле $BDC = \sigma$ и $BCD = \tau$, лежеће у косој равни BCD; из роугла BCD имаћемо тада

$$BC = \frac{a \sin \sigma}{\sin DBC} = \frac{a \sin \sigma}{\sin (\sigma + \tau)};$$

из троугла BAC имаћемо даље

$$AB = \frac{BC \sin(\beta - \beta')}{\sin BAC} = \frac{BC \sin(\beta - \beta')}{\sin A'AC},$$

или замењујући BC горњом вредности и имајући у исто доба на уму да је $A'AC = 90^\circ - \beta'$ дакле $\sin A'AC = \cos\beta'$,

$$AB = \frac{a \sin\sigma \sin(\beta - \beta')}{\sin(\sigma + \tau)\cos\beta'}.$$

Ако је A испод A', треба место β' узети $-\beta'$ и тада ће бити

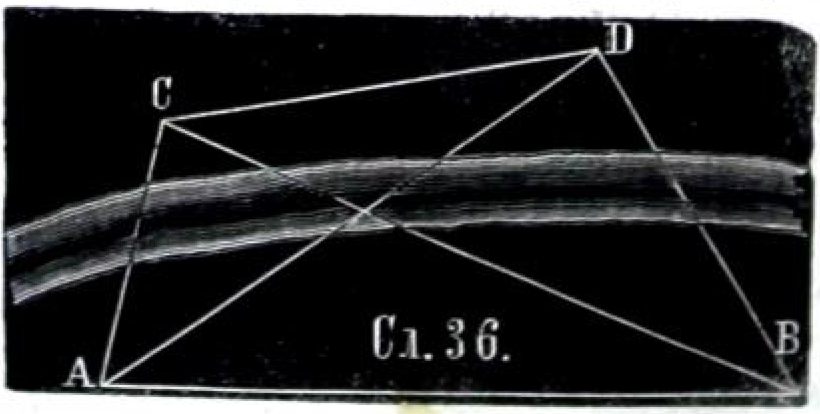
$$AB = \frac{a \sin\sigma \sin(\beta + \beta')}{\sin(\sigma + \tau)\cos\beta'}.$$

Ако је најзад A у A', дакле у хоризонталној равни, која кроз C пролази, биће $\beta' = o$ и због тога

$$AB = \frac{a \sin\sigma \sin\beta}{\sin(\sigma + \tau)}.$$

116. *Задатак. IV. Наћи растојање двеју тачака, од којих је једна неприступна.*

Нека је (сл. 36) C приступна, A неприступна тачка, AC растојање, које се тражи. Да би га израчунали, измерићемо основицу CD и угле ACD и ADC, одакле се вредност угла CAD лако налази; страну AC наћићемо затим помоћу обрасца



Сл. 36.

$$AC = \frac{CD \sin ADC}{\sin CAD}.$$

114. *Задатак V. Наћи растојање двеју непристу-
их тачака.*

Нека су (сл 36) A, B две неприступне тачке, којих
е растојање тражи. Измеримо основицу CD, са чијих се
рајева тачке A, B могу видити; затим измеримо са как-
им угломером угле ADC, BDC, ACD, BCD и ACB.
Из троуглова ACD и BCD, у којих су сада познати угли
страна CD, моћићемо израчунати стране AC и BC. Раз-
ешењем троугла ACB, у кога су сада познате две стране
захваћени угао C, наћићемо страну AB и задатак ће
ити решен.

Ваља приметити, да при израчунавању растојања AB
ије баш нужно знати стране AC и BC. Јер ако означимо
ао и досада, угле троугла ABC са A, B, C, супротне
тране са a, b, c и ставимо $CD = d$, добићемо из троуг-
ова BCD и ACD

$$a = \frac{d \sin BDC}{\sin CBD}, \qquad b = \frac{d \sin ADC}{\sin CAD},$$

дакле

$$\log a = \log d + \log \sin BDC - \log \sin CBD,$$

$$\log b = \log d + \log \sin ADC - \log \sin CAD.$$

Означавајући са φ помоћни угао, који је такав, да је
$g\,\varphi = \frac{b}{a}$, добићемо из троугла ABC (№ 94)

$$tg \frac{1}{2}(A - B) = tg\,(45^{\circ} - \varphi)\, cotg \frac{1}{2} C.$$

Угао φ наћиће се помоћу обрасца

$$\log tg\, \varphi = \log b - \log a$$

или

$$\log tg\, \varphi = \log \sin ADC + \log \sin CBD - \log \sin CAD$$
$$- \log \sin BDC;$$

угао $\frac{1}{2}(A - B)$ наћиће се пак помоћу обрасца

$$\log tg \frac{1}{2}(A - B) = \log tg\,(45^\circ - \varphi) + \log cotg \frac{1}{2} C.$$

Пошто је $\frac{1}{2}(A + B)$ као комплеменат познатог угла $\frac{1}{2} C$ познат, то је врло лако наћи затим угле A и B посебице. Тражено растојање израчунаће се потом помоћу обрасца

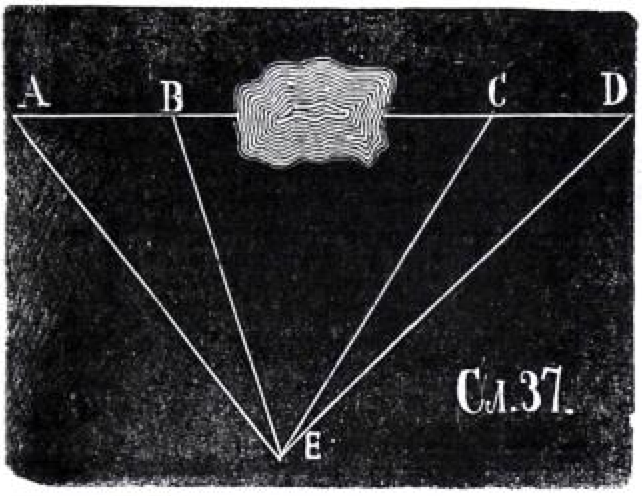
$$c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

који се по замени количине a вредношћу и пошто се затим узму логаритми лево и десно од знака једнакости, претвара у сљедећи

$$\log c = \log d + \log \sin BDC - \log \sin CBD + \log \sin C$$
$$- \log \sin A.$$

118. *Задатак VI. Израчунати, комад једне праве, која се због неке препреке неможе непосредно измерити, али тако, да се притом никаква основица у помоћ неузима.*

Нека је (сл. 37) AD права , BC један комад њезин,



Сл.37.

и се неможе непосредно
ерити и E једна тачка
ан праве AD. Измеримо
$= a$, $CD = b$ и са тач-
E угле $AEB = \alpha$,
$C = \beta$, $CED = \gamma$; ста-
о непознату дужину BC
x. Ако са тачке E зами-
мо повучену на AD једну управну и дужину исте озна-
о са h, имаћемо

$$\triangle\, AEB = \frac{ah}{2} = \frac{AE.\ BE\ sin\ \alpha}{2}$$

$$\triangle\, CDE = \frac{bh}{2} = \frac{CD.\ DE\ sin\ \gamma}{2}$$

$$\triangle\, AED = \frac{(a+b+x)\,h}{2} = \frac{AE.DE.\ sin\,(\alpha+\beta+\gamma)}{2}$$

$$\triangle\, BCE = \frac{xh}{2} = \frac{BE.\ CE\ sin\ \beta}{2}\,.$$

Делећи производ последњих двеју једначина произво-
м првих двеју добијамо

$$\frac{(a+b+x)\,x}{ab} = \frac{sin\,(\alpha+\beta+\gamma)\,sin\,\beta}{sin\,\alpha\ sin\,\gamma}\,,$$

и

$$(a+b)\,x + x^2 = \frac{ab\ sin\,(\alpha+\beta+\gamma)\,sin\,\beta}{sin\,\alpha\ sin\,\beta}\,;$$

зрешењем ове квадратне једначине налазимо

$$x = -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{ab \sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta}{\sin\alpha\sin\gamma} + \frac{(a+b)^2}{4}}$$

$$= -\frac{a+b}{2} \pm \frac{a+b}{2}\sqrt{\frac{4\,ab \sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta}{(a+b)^2 \sin\alpha\sin\gamma} + 1}$$

Означавајући са φ помоћни угао, који је такав, да је

$$tg^2\varphi = \frac{4\,ab\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\beta}{(a+b)^2\sin\alpha\sin\gamma}$$

добијамо даље

$$x = -\frac{a+b}{2} \pm \frac{a+b}{2}\sqrt{tg^2\varphi + 1}$$

$$= -\frac{a+b}{2} \pm \frac{a+b}{2}\,\frac{1}{\cos\varphi};$$

пошто вредност за x мора бити положна, задржаћемо само горњи знак, па ћемо тако имати

$$x = -\frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2}\,\frac{1}{\cos\varphi}$$

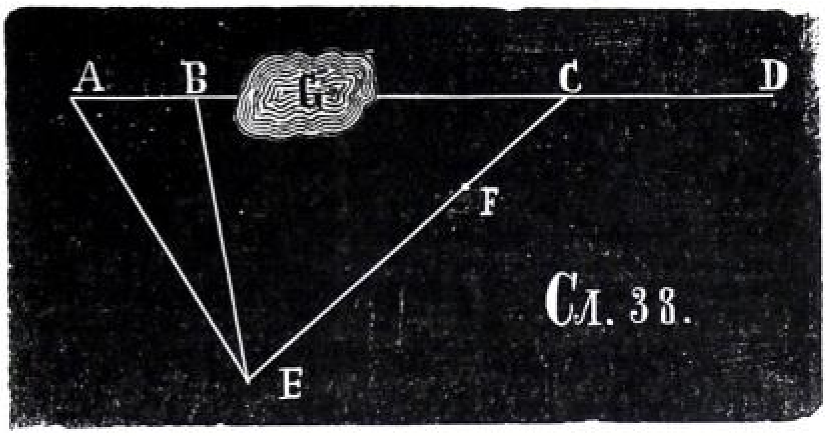
$$= \frac{a+b}{2}\left(-1 + \frac{1}{\cos\varphi}\right) = \frac{a+b}{2}\,\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi},$$

или најзад због $1 - \cos\varphi = 2\sin^2\frac{1}{2}\varphi$

$$x = \frac{(a+b)\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi}.$$

119. *Задатак VII. Продужити једну праву у по-*
преко неке препреке, преко које се неможе видити.

Нека је (сл. 38) AB права, која се преко препреке
има продужити и
една тачка, ода-
се лево и десно
сте препреке мо-
видити. Измеримо
и угле A, B тро-
а ABE, па онда
ачунајмо страну



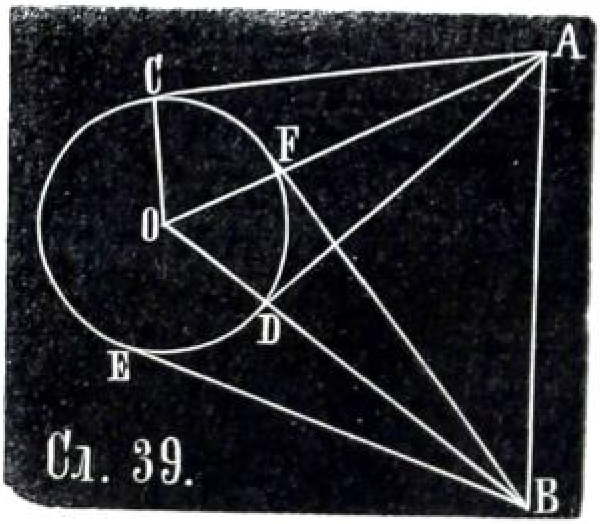
Сл. 38.

. Обележимо затим полазећи од тачке E буди какву
ву EF према оном крају, који је иза препреке G, и
еримо још угао AEF; ако је C тачка, где се права
сече са продуженом правом AB, знаћемо у троуглу ACE
ану AE и налегле угле, дакле ћемо моћи израчунати
ану CE тога троугла; пренесавши израчунату дужину
у правцу обележене праве EF, добићемо једну тачку
аженога продужења. Понављајући ову радњу моћи ћемо
ћи колико хоћемо тачака тога продужења, а можемо, ако
ћемо, тражено продужење добити и на тај начин, да кроз
чку C повучемо праву CD нагнуту према правој CE под
лом, који је суплеменат познатом углу ACE.

120. *Задатак VIII. Наћи средиште и полупречник*
дне неприступне кружне зграде.

Измеримо основицу AB (сл. 39 на страни 214) и по-
ћу каквог угломера у тачкама A и B угле CAB, DAB,
BA и FBA. Нека је O тражено средиште зграде; у тро-
лу OAB позната је страна AB и налегли угли BAO и
BO, од којих је први једнак полузбиру код A а други
лузбиру код B измерених углова; дакле се могу AO и

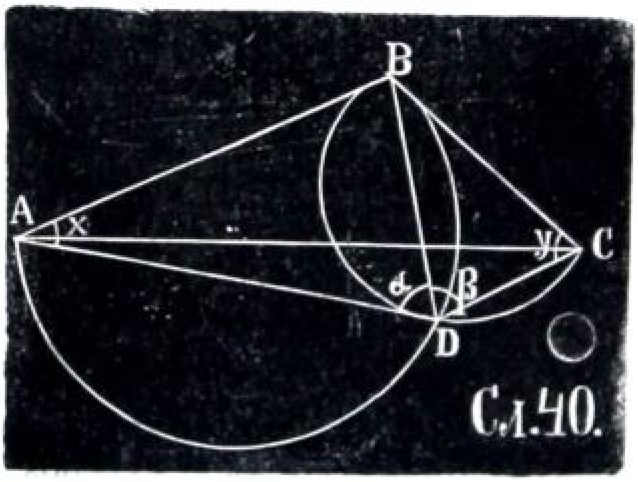
BO, који средиште одређују, израчунати. Полупречник добија се разрешењем правоуглог троугла AOC, у кога је позната ипотенуза и оштар угао OAC, који је последњи полуразлика код A измерених углова.



Сл. 39.

121. *Задатак IX. Три тачке* A, B, C (сл. 40) *налазе се у пољу; тражи се четврта тачка* D, *одакле су праве* AB *и* BC *виђене под познатим углима* α *и* β.

Геометријско разрешавање овог задатка врло је лако; треба само над странама AB и BC као тетивима описати два круга тако, да сегменти над AB и BC хватају угле α и β; исти кругови сећиће се осим тачке B још у тачки D, која ће бити тражена тачка. Но како је иста конструкција у пољу непрактична, то ћемо потражити рачуном угле $BAD = x$ и $BCD = y$, помоћу којих се тачка D може наћи.



Сл. 40.

Претпоставимо, да су осим углова $ADB = \alpha$ и $BDC = \beta$ измерене још и праве $AB = a$ и $BC = b$ као и угао $ABC = B$. Из троуглова ABD, BCD добијамо

$$BD = \frac{a \sin x}{\sin \alpha}, \qquad BD = \frac{b \sin y}{\sin \beta},$$

одакле

$$\frac{a \sin x}{\sin \alpha} = \frac{b \sin y}{\sin \beta} \quad \text{или} \quad \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}.$$

Стављајући $\frac{a \sin \beta}{\sin \alpha} = m$, која се количина помоћу логаритама може лако израчунати, добијамо

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b}{m} \text{ одакле } \frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{b+m}{b-m}.$$

Одавде помоћу првог обрасца под 4) у № 39 добијамо даље

$$\frac{tg \frac{1}{2}(x+y)}{tg \frac{1}{2}(x-y)} = \frac{b+m}{b-m} \quad \text{и}$$

$$tg \frac{1}{2}(x-y) = \frac{b-m}{b+m} tg \frac{1}{2}(x+y).$$

Пошто је у четвороуглу *ABCD*

$$x + y + \alpha + \beta + B = 360^{\circ},$$

одакле сљедује

$$\frac{1}{2}(x+y) = 180^{\circ} - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + B)$$

то је напослетку

$$tg \frac{1}{2}(x-y) = \frac{b-m}{b+m} tg \left[180^{\circ} - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + B)\right]$$

Помоћу овог обрасца израчунаћемо угао $\frac{1}{2}(x-y)$, па како је угао $\frac{1}{2}(x+y)$ познат, то је лако угле x и y, којима је положај тачке D одређен, појединце изнаћи.

Треба још приметити, да има један случај, где угли α и β, под којима су стране AB и BC са тачке D виђене, положај тачке D неодређују; тај случај наступа онда, кад је $\alpha + \beta + B = 180^\circ$; у том случају може се око четвороугла $ABCD$ круг описати, јер се супротни угли B и $D = \alpha + \beta$ до 180° допуњавају; кругови над AB и BC описани, који својим пресецањем тачку D дају, тада се несеку, већ поклапају, и с тога све тачке око четвороугла $ABCD$ описаног круга задатку одговарају, овај је последњи дакле неодређен. Ово се у осталом потврђује и самим последњим обрасцем, јер из истог сљедује у поменутом случају за $tg\,\frac{1}{2}(x - y)$ вредност неодређеног облика $0.\infty$. И заиста због

$$\alpha + \beta + B = 180^\circ \text{ дакле } 180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + B) = 90^\circ$$

други је чинилац у горњем обрасцу, то јест

$$tg\,[180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta + B)] = \infty;$$

пошто је даље у том случају $\alpha = ACB$ и $\beta = BAC$, то је

$$\frac{sin\,\beta}{sin\,\alpha} = \frac{sin\,BAC}{sin\,ACB} = \frac{b}{a} \text{ или } \frac{a\,sin\,\beta}{sin\,\alpha} = b.$$

Но такође је

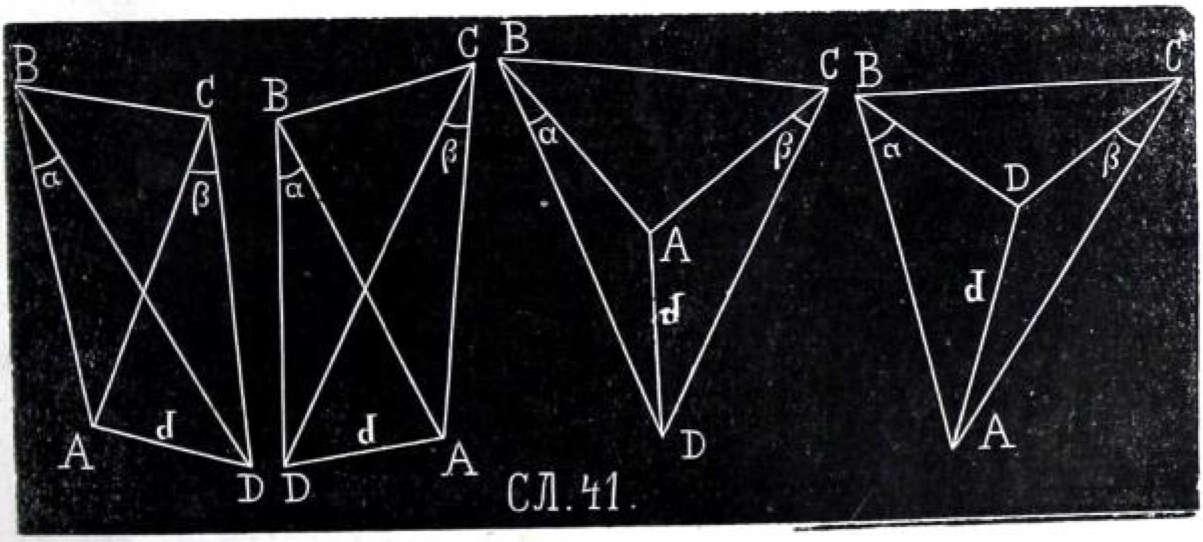
$$\frac{a\,sin\,\beta}{sin\,\alpha} = m, \text{ дакле } b - m = o;$$

Први чинилац у изразу за $tg\,\frac{1}{2}(x - y)$ jесте дакле нула и потоме је исти израз неодређеног облика $0.\,\infty$.

122. *Задатак X. Свођење углова на средиште (центрирање).*

При премеравању већих простора, казато је да се цело
мљиште покрива целом једном мрежом троуглова; за те-
ена тим троуглима узимају се обично врло високе тачке,
ао врхови звонара, високих дрва или ма какви знаци по-
тављени на врховима брегова. При мерењу појединих углова
реже ретко се дакле догађа, да се угломер може поставити
ачно над теменом угла, који се има измерити; у таквом
лучају он се поставља гдигод близу темена, па се одатле
гао мери. Измерени угао није тада угао самога троугла,
ећ угао, који се од њега врло мало разликује; њега дакле ваља
оправити или као што се каже *свести* — редуцирати —
а средиште.

Нека је (сл. 41) *ABC* један од троуглова тригонометријске мреже, *A* угао који се има измерити, *D* близу темена находећа се тачка, где је угломер постављен, *BDC* = *D* угао, који је измерен и из којег треба извести угао *BAC* = *A*.



СЛ. 41.

Означимо са α и β два врло мала угла *ABD* и *ACD*, са d врло малу дужину *AD*, а са a, b, c стране троугла *ABC*. Из прве слике сљедује

$$A + \alpha = D + \beta, \text{ дакле } A = D + (\beta - \alpha),$$

из друге $A + \beta = D + \alpha$, дакле $A = D - (\beta - \alpha)$,

из треће $A = D + (\alpha + \beta)$,

из четврте $D = A + \alpha + \beta$, дакле $A = D - (\alpha + \beta)$.

Да би дакле добили тражени угао $BAC = A$, треба у случају прве или друге слике додати или одузети измереном углу $BDC = D$ количину $k = \beta - \alpha$; у случају треће или четврте слике треба измереном углу додати или одузети количину $k = \beta + \alpha$.

Сад да видимо, како се израчунавају угли α и β. Из сваке од горњих слика сљедује

$$\frac{\sin \alpha}{\sin BDA} = \frac{d}{c}, \qquad \frac{\sin \beta}{\sin CDA} = \frac{d}{b},$$

дакле

$$\sin \alpha = \frac{d \sin BDA}{c}, \qquad \sin \beta = \frac{d \sin CDA}{b}.$$

Из № 45 познато је, да се синус врло малог лука од самога лука врло мало разликује; с тога могу се $\sin \alpha$ и $\sin \beta$ приближно заменити са α и β и на тај начин биће

$$a = \frac{d \sin BDA}{c}, \qquad \beta = \frac{d \sin CDA}{b}.$$

Угли се обично неизражавају, као што то већ знамо, дужином својих лукова, већ бројем њихових степена, минута и секунада, и кад су угли врло мали, секунда се узима као јединица. Кад је угао изражен у секундама, врло је лако наћи дужину одговарајућег лука и обратно. Пошто половина периферије има 648000 секунада, то је дужина лука од једне секунде $\frac{\pi}{648000}$, претпостављајући наравно да је полупречник узет за јединицу. Ако је δ дужина лука од једне секунде, λ дужина ма каквог лука, а λ' број његових секунада, то је очевидно $\lambda = \delta\lambda'$ и обратно $\lambda' = \frac{\lambda}{\delta}$. Али како се δ, то јест дужина лука од једне секунде, разликује од његовог синуса у мање од пола јединице $13^{\text{га}}$ децималног места, то се може у рачунима исти лук заменити својим синусом; на тај начин биће

$$\lambda = \lambda' \sin 1'', \qquad \lambda' = \frac{\lambda}{\sin 1''}.$$

По овоме, *кад је угао изражен дужином лука, који је са полупречником јединицом између његових кракова описан, изразићемо га у секундама делећи дужину лука са* $\sin 1''$; обратно *кад је угао изражен у секундама, нaћићемо дужину одговарајућег лука множећи број секунада са* $\sin 1''$.

Ако су α' и β' вредности углова α и β, кад се изразе у секундама, биће

$$\alpha' = \frac{d \sin BDA}{c \sin 1''}, \qquad \beta' = \frac{d \sin CDA}{b \sin 1''}.$$

По томе поправка k, којом треба поправити у тачки D измерени угао BDC, дана је у случају прве и друге слике обрасцем

$$k = \frac{d \sin CDA}{b \sin 1''} - \frac{d \sin BDA}{c \sin 1''},$$

а у случају треће и четврте обрасцем

$$k = \frac{d \sin CDA}{b \sin 1''} + \frac{d \sin BDA}{c \sin 1''}.$$

Угли CDA и BDA мере се угломером у исти мах кад и угао BDC; но доста је, ако се само један од њих измери, јер у случају прве и друге слике њихова је разлика познати угао BDC; у случају треће слике њихов је збир познати угао BDC, а у случају четврте слике њихов је збир $= 360^0 - BDC$, дакле опет познат.

Осим углова CDA и BDA налазе се у обрасцу дужина $AD = d$, која се мери што је могуће тачније, и стране b и c троугла ABC. За изналажај поправке k није нужно имати тачне вредности истих страна, но је довољно ако их имамо приближно тачне; јер погрешка, која ће отуда за k произаћи, биће према самој тој количини тако мала, да се може занемарити. Троугао ABC, о коме је била реч, јесте један од троуглова тригонометријске мреже; разрешењем претходећих троуглова морала је једна његова страна бити израчуната; даље барем два угла морала су бити измерена угломером, постављеним близу њихових темена; ако измерене угле узмемо још непоправљене и разрешимо троугао, наћићемо приближне вредности осталих страна, помоћу којих се после поправка измерених углова може израчунати. Пошто је поправка израчуната, поново ћемо троугао разрешити али са поправљеним углима, да би на тај начин добили тачне вредности непознатих страна.

Узимајући на пример да смо при разрешавању претходећих троуглова израчунали страну $AB = c$, имаћемо

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} \quad \text{одакле} \quad b = \frac{c \sin B}{\sin C};$$

замењујући ово у горњим за k нађеним изразима добићемо

$$k = \frac{d \sin C \sin CDA}{c \sin B \sin 1''} - \frac{d \sin BDA}{c \sin 1''},$$

$$k = \frac{d\, sin\, C\, sin\, CDA}{c\, sin\, B\, sin\, 1''} + \frac{d\, sin\, BDA}{c\, sin\, 1''}.$$

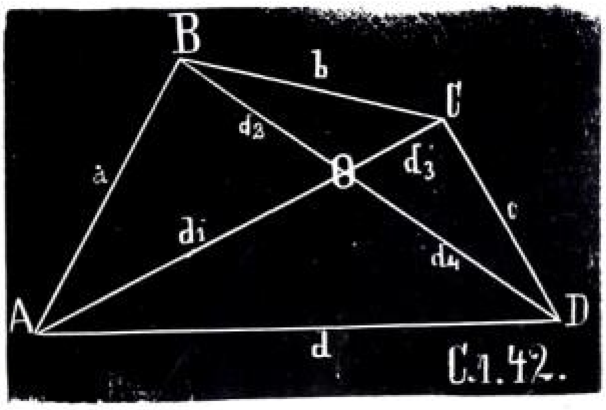
Поправку k израчунаћемо помоћу ових образаца служећи се приближним вредностима углова.

Угао B, ако при мерењу истога угломер није такође постављен тачно над његовим теменом, поправиће се на сличан начин.

ПРИМЕНА ТРИГОНОМЕТРИЈЕ У ГЕОМЕТРИЈИ.

Површина четвороугла.

123. Нека је $ABCD$ (сл. 42) буди какав четвороугао, коме се тражи површина p. Дијагонале AC и BD деле површину на четири троугла; угли тих троуглова код O имају исти синус, јер су они или једнаки или се до 180° допуњавају. Дакле је (№ 74)



Сл. 42.

$$p = \frac{1}{2}\, sin\, O\, (d_1 d_2 + d_2 d_3 + d_3 d_4 + d_4 d_1)$$

$$= \frac{1}{2}\, sin\, O \left[d_2 (d_1 + d_3) + d_4 (d_3 + d_1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\, sin\, O\, (d_1 + d_3)(d_2 + d_4).$$

или због $d_1 + d_3 = AC,\ d_2 + d_4 = BD$

$$p = \frac{1}{2}\, AC.BD\, sin\, O,$$

што ће рећи, *да се површина четвороугла добија, кад се производ дијагонала помножи са синусом угла, који оне захватају.*

Својства четвороугла, око кога се може описати круг.

124. Нека је (сл. 42) $ABCD$ такав један четвороугао; нека су му a, b, c, d стране, а A, B, C, D угли, p површина и R полупречник описаног круга.

Из троугла ABC сљедује

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\,cos\,B$$

Пошто је угао D у троуглу ACD суплеменат углу B, то је такође

$$\overline{AC}^2 = c^2 + d^2 + 2\,cd\,cos\,B.$$

кад се из ових двеју једначина AC избаци, добија се

$$cos\,B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2\,(ab + cd)}.$$

Одавде сљедује

$$tg\,\frac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{1 - cos\,B}{1 + cos\,B}} = \sqrt{\frac{(c + d)^2 - (a - b)^2}{(a + b)^2 - (c - d)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(-a + b + c + d)(a - b + c + d)}{(a + b - c + d)\,(a - b + c - d)}},$$

или кад се стави $a + b + c + d = 2\,s$

$$tg\,\frac{1}{2}\,B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}}.$$

Помоћу овог обрасца и њему аналогног

$$tg\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}$$

израчунавају се угли четвороугла из познатих страна. Да би изнашли дијагонале, заменимо у првој или другој једначини ове №° *cos B* његовом вредношћу из треће једначине, па ће изаћи

$$AC = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}};$$

на сличан начин добијамо и

$$BD = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

Множењем и деобом последњих двеју једначина добијамо обрасце

$$AC.BD = ac + bd \qquad \frac{AC}{BD} = \frac{ad+bc}{ab+cd}.$$

у којима су исказане сљедеће из геометрије познате теореме: *у сваком четвороуглу, око којега се може описати један круг, производ дијагонала једнак је збиру производа супротних страна, а размера дијагонала једнака је размери збирова производа оних страна, које се у њиним крајевима стичу.*

Површина четвороугла добија се помоћу обрасца

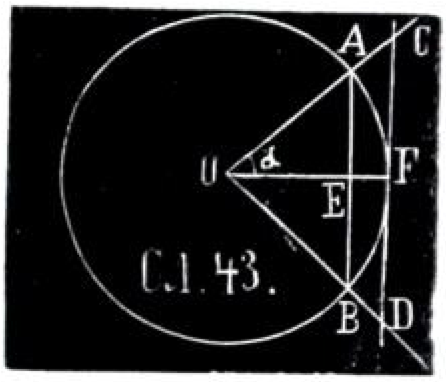
$$p = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin B = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

а полупречник описаног круга помоћу обрасца

$$R = \frac{AC}{2\,sin\,B} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}}{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}.$$

Правилни полигони.

125. Нека је (сл. 43) AB страна у круг уписаног полигона од n страна, r полупречник тога круга, OF управна на AB, CD управна на OF и потоме страна описаног полигона од n страна.



Сл. 43.

Ставимо $AB = s$, $CD = S$, дакле $AE = \frac{1}{2}s$, $CF = \frac{1}{2}S$; $AOB = \frac{1}{n}360^\circ = 2\alpha$, дакле $AOF = \frac{1}{n}180^\circ = \alpha$, па ћемо узимајући на ум, да је $AO = BO = r$, из правоуглих троуглова AOE и COF добити

$$\frac{s}{2r} = sin\,\alpha, \quad \frac{S}{2r} = tg\,\alpha$$

дакле

1) $$s = 2r\,sin\,\alpha, \quad S = 2r\,tg\,\alpha$$

Помоћу ових образаца израчунавају се стране уписаног и описаног правилног полигона из познатог полупречника.

Ако у првом обрасцу под 1) разумемо под s не страну уписаног правилног полигона, већ уопште кружно тетиво, моћићемо помоћу њега решавати сљедећа три задатка:

1° Наћи тетиво s из полупречника r и средишног угла $AOB = 2\alpha$.

2° Наћи полупречник r из тетива s и средишног угла 2α.

3° Наћи средишни угао 2α из тетива s и полупречника r.

Из образаца 1) изводимо

$$2) \qquad r = \frac{s}{2 \sin \alpha}, \quad r = \frac{S}{2 \operatorname{tg} \alpha};$$

помоћу ових образаца израчунава се полупречник круга из стране уписаног или описаног правилног полигона.

Из образаца под 1) изводимо такође обрасце

$$3) \qquad s = S \cos \alpha, \quad S = \frac{s}{\cos \alpha},$$

помоћу којих се стране уписаног и описаног полигона једна из друге израчунавају.

Пошто је (№ 74)

$$\triangle\, AOB = \frac{1}{2} r^2 \sin 2\alpha,$$

то је површина уписаног полигона

$$4) \qquad p = \frac{1}{2} nr^2 \sin 2\alpha.$$

Пошто је $OF = r$ висина а $CF = r \operatorname{tg} \alpha$ половина основице троуглу COD, то је

$$\triangle\, COD = r^2 \operatorname{tg} \alpha;$$

површина P описаног полигона састоји се из n таквих троуглова, дакле је

$$5) \qquad P = nr^2 \operatorname{tg} \alpha.$$

Из 4) и 5) налази се размера површина уписаног и описаног полигона

$$\frac{p}{P} = cos^2 \alpha.$$

Ако је $n = 4$, то је $\alpha = 45^\circ$, дакле

$$\frac{p}{P} = cos\, 45^\circ = \frac{1}{2};$$

дакле је размера површина уписаног и описаног квадрата $\frac{1}{2}$, што је већ из геометрије познато.

Ако су p' и P' површине уписаног и описаног правилног полигона од $2n$ страна, биће на основу образаца 4) и 5)

6) $$p' = nr^2 sin\, \alpha, \quad P' = 2nr^2 tg\, \alpha.$$

Из ових образаца и оних под 4) и 5) сљедује

$$\frac{p}{p'} = \frac{sin\, 2\,\alpha}{2\, sin\, \alpha} = cos\, \alpha, \qquad \frac{p}{P} = \frac{sin\, \alpha}{tg\, \alpha} = cos\, \alpha;$$

одавде се изводи

7) $$\frac{p}{p'} = \frac{p'}{P} \quad \text{или} \quad p'^2 = p\, P;$$

дакле *је површина уписаног полигона од 2 n страна средња геометријска сразмерна површинама уписаног и описаног полигона од n страна.*

На пример површина уписаног квадрата јесте $2\, R^2$, описаног $4\, R^2$, дакле по мало час доказаној теореми биће површина уписаног правилног осмоугла $= \sqrt{2\, R^2 .\, 4\, R^2}$ $= 2\, R \sqrt{2.}$

Исто је тако лако изразити и P' са p, P и p'. Из образаца 6) добија се деобом

$$\frac{P'}{p'} = \frac{2\,tg\,\frac{1}{2}\,\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{1}{cos^2\,\frac{1}{2}\,\alpha},$$

ли пошто је $2\,cos^2\,\frac{1}{2}\,\alpha = 1 + cos\,\alpha$,

$$\frac{P'}{p'} = \frac{2}{1 + cos\,\alpha}.$$

Горе је нађено $\frac{p}{p'} = cos\,\alpha$; ако се дакле ово у по-ледњој једначини замени, изаћиће

$$8) \qquad \frac{P'}{p'} = \frac{2p'}{p + p'} \quad \text{и} \quad P' = \frac{2p'^2}{p + p'} = \frac{2\,pP}{p + p'}$$

Примери и задатци.

1° Пример за № 115:

$a = 365{\cdot}2$, $\alpha = -\,4^\circ\,15'\,47''$, $\beta = -\,12^\circ\,54'\,28''$,

$\beta' = -\,21^\circ\,32'\,7''$, $\gamma = 84^\circ\,21'\,36''$, $\delta = 62^\circ\,22'\,51''$.

2° Пример за № 116.

$CD = 206{\cdot}3$, $ADC = 81^\circ 35' 12''$, $ACD = 55^\circ 48' 39''$.

3° Пример за № 117.

$CD = 41986{\cdot}3$, $ADC = 42^\circ 59' 38''$, $BDC = 65^\circ 25'\,14''$

$ACD = 107^\circ 29' 18{\cdot}6''$, $BCD = 66^\circ 6' 37''$, $ACB = 41^\circ 22' 41{\cdot}6''$.

4° Пример за № 118.

$a = 1450$, $b = 965$, $\alpha = 25^\circ 37'$, $\beta = 48^\circ 19'$ $\gamma = 32^\circ 53'$

5° Пример за № 121

$$a = 6082{\cdot}769,\quad b = 4963{\cdot}763,\quad B = 70^\circ\, 15'\, 36'\, 7''$$

$$\alpha = 34^\circ\, 52'\, 10{\cdot}8'',\quad \beta = 19^\circ\, 29'\, 12{\cdot}1''.$$

6° Пример за № 122

$$\alpha)\ b = 143{\cdot}62,\ c = 236{\cdot}54,\ d = 2{\cdot}345,\ BDA = 106^\circ 42' 32'',$$

$$CDA = 37^\circ\, 45'\, 19''.$$

$$\beta)\ b = 8459{\cdot}4,\ c = 6694{\cdot}68,\ d = 10{\cdot}82,\ BDA = 150^\circ 30' 40'',$$

$$CDA = 144^\circ\, 7'\, 9{\cdot}75''.$$

7° Нађи површину трапеза, кад су познате основице и дијагонале.

8° Из једне стране и два угла једнога троугла израчунати праве, које полове његове угле.

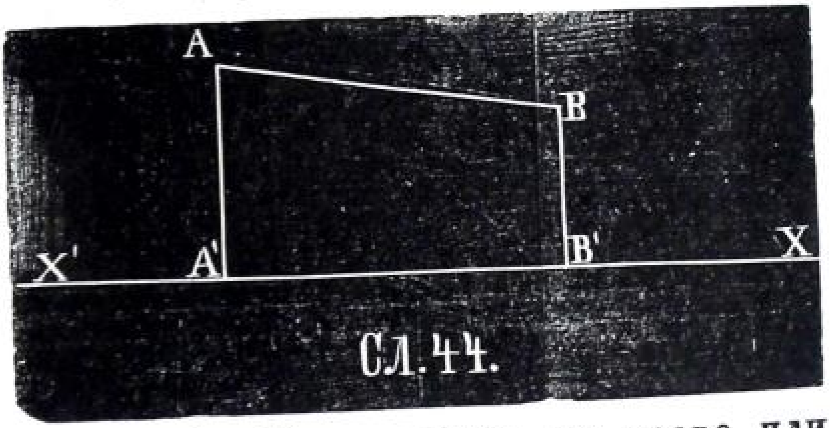
9° Дате су две оближње стране паралелограма и угао, који једна од њих прави са оближњом дијагоналом, траже се угли и дијагонале паралелограма.

10° Површина уписаног полигона од 28 страна износи 17539·7; нађи полупречник дотичног круга, дужину стране уписаног полигона, површину описаног полигона од 28 страна и дужину његове стране, и најзад површине уписаног и описаног полигона од 56 страна као и дужину једне њихове стране.

11° Нађи тетиво, кад је одговарајући средишни угао $= 36^\circ\, 52'\, 37{\cdot}8''$ а полупречник $r = 257{\cdot}32$; нађи даље отстојање тетива од средишта као и део кругове површине између тетива и лука, који му одговара.

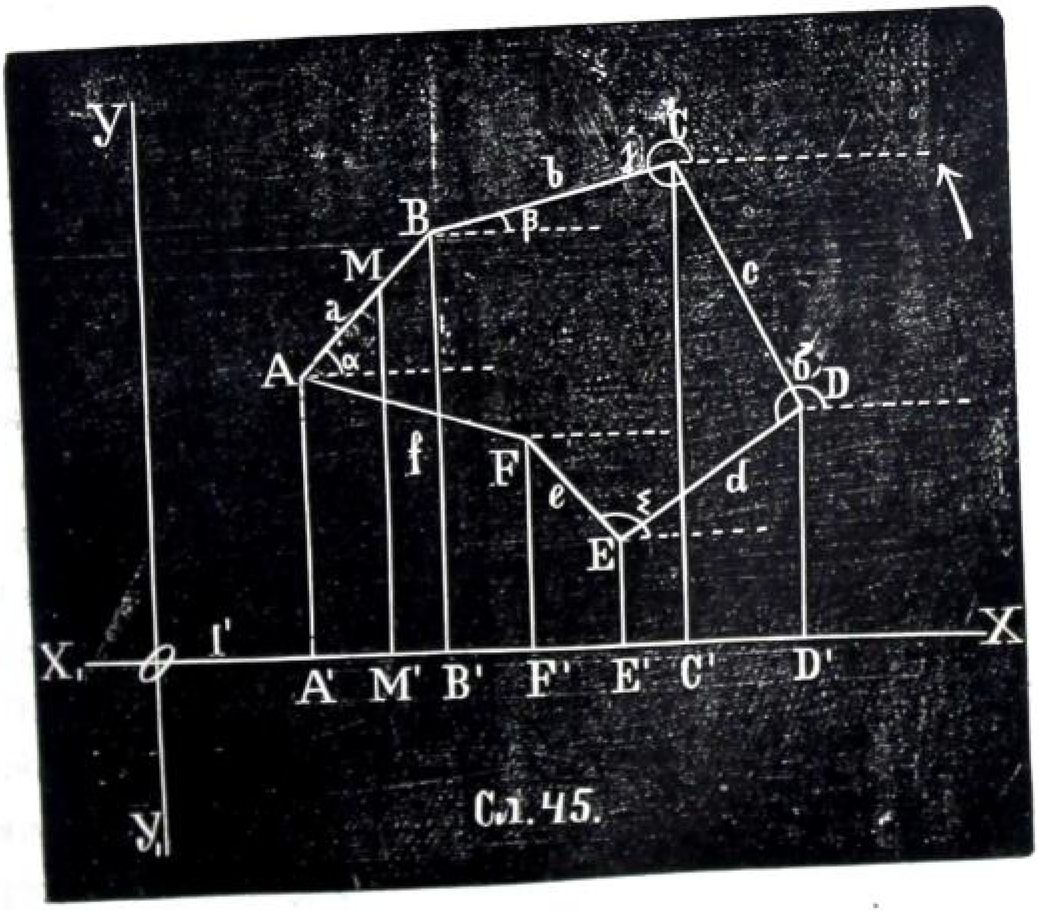
Теорија пројекција.

126. Нека је (сл. 44) XX_1 једна непокретна права оса, а A и B какве две тачке, могу лежати у ој равни или не. из тачака A и повучемо две праили две равни уано на осу X_1X, тачке A', B', у којима те праве или равни осу X_1X секу, зову се *пројекције* тачака A и B оси X_1X. Комад $A'B'$ осе, ограничен пројекцијама тачака и B, зове се пројекција праве AB у оси X_1X. Пројерати једну тачку или праву на какву осу значи наћи им ојекције у истој оси.



Сл. 44.

127. Посматрајмо сад једну испреламану линију $ABCDEF$ л. 45), која код A започиње а код F се свршује. Поје-



Сл. 45.

дине стране њене могу бити у једној и истој равни или не. Да би добили угле тих страна са произвољном осом X_1X, повуцимо кроз почетке A, B, C, D .... страна паралелне са X_1X; угли, које поменуте паралелне описују обрћући се из свог положаја — у правцу на слици назначеном — до у положај дотичних страна, јесу угли тих страна са осом X_1X. Повуцимо праву AF, којом се из A у F непосредно долази, и коју ћемо звати *резултантом* испреламане линије. Пројецирајмо даље стране испреламане линије на осу X_1X, а тако исто и тачку M, о којој ћемо претпоставити, да испреламану линију почињући од A и у правцу $ABCD$ .... описује; пројекција тачке M нека је M'. Узмимо још на оси X_1X и у отстојању l' од A', пројекције тачке A, једну тачку O; кроз ову повуцимо управно на X_1X једну раван $УУ_1$, која сва темена испреламане линије десно оставља, па тражимо свагдање отстојање тачке M — или њене пројекције M' — од исте равни.

Понајпре јасно је, да ће се при кретању тачке M по линији $ABCDEF$ и њена пројекција M' по оси X_1X кретати и то час на десну час на леву страну; јер докле тачка M описује једну и исту страну испреламане линије, дотле ће се и тачка M' кретати по оси X_1X једним и истим правцем; али тај правац може се променути при прелазу тачке M с једне стране испреламане линије на другу. Кад тачка M описује страну, која је према X_1X нагнута под оштрим или оштро-испупченим (270°—360°) углом, она се удаљава од равни $УУ_1$ и то за дужину једнаку њеној пројекцији; ову последњу прелази притом тачка M' с лева на десно; ако ли је пак страна, коју тачка M описује, нагнута према оси X_1X под тупим или тупоиспупченим (90°—270°) углом, онда се тачка M равни $УУ_1$ приближује и то опет за дужину једнаку њеној пројекцији, коју последњу тачка M' описује с десна на лево, дакле у правцу, који је прењем противан. Из реченога сљедује, да је отстојање та- M — или њене пројекције M' — од равни $УУ_1$ увек днако l', више збиру пројекција оних тачком M описаних рана, које са X_1X праве оштре или оштроиспупчене угле, ње збиру пројекција оних истом тачком описаних страна, је са X_1X праве тупе или тупоиспупчене угле. Но ако јпре поменуте пројекције, које тачка M' описује с лева десно, сматрамо као положне, а оне друге, које тачка M' описује с десна на лево, дакле у противном правцу, као дречне количине, и потоме их у рачун узмемо са противим знацима, онда можемо такође рећи, да је отстојање тачке M — или M' — од равни $УУ_1$ увек једнако l', више биру пројекција страна, које је тачка M описала. Ако дале пројекције страна, узете са одговарајућим знацима, означимо са a', b', c', d', e', биће отстојање тачке M — или M' — од равни $УУ_1$, кад је тачка M целу испреламану линију обишла и у F приспела

$$l' + a' + b' + c' + d' + e'.$$

Претпоставимо сад да тачка M полазећи из A иде резултантом AF у F; дошав у F биће њено отстојање од равни $УУ_1$ једнако l', више пројекцији f' резултанте. Пошто отстојања тачке M од равни $УУ_1$ у оба случаја морају бити једнака, то је

$$l' + a' + b' + c' + d' + e' = l' + f',$$

одакле

$$1) \quad a' + b' + c' + d' + e' = f',$$

што ће рећи: *збир пројекција једне испреламане линије у буди каквој оси једнак је пројекцији њене резултанте у истој оси.*

Одавде изводимо, да, кад се две или више испреламаних линија започињу и свршују у истим двема тачкама, збир пројекција њиних страна мора бити сталан и једнак пројекцији заједничке резултанте.

Ако тачка M описује затворену испреламану линију, онда последња тачка пада над првом, резултанта је нула, па дакле и њена пројекција. Одатле сљедује, *да је збир пројекција страна једне затворене испреламане линије у ма каквој оси једнак нули.*

Најзад лако је увидити

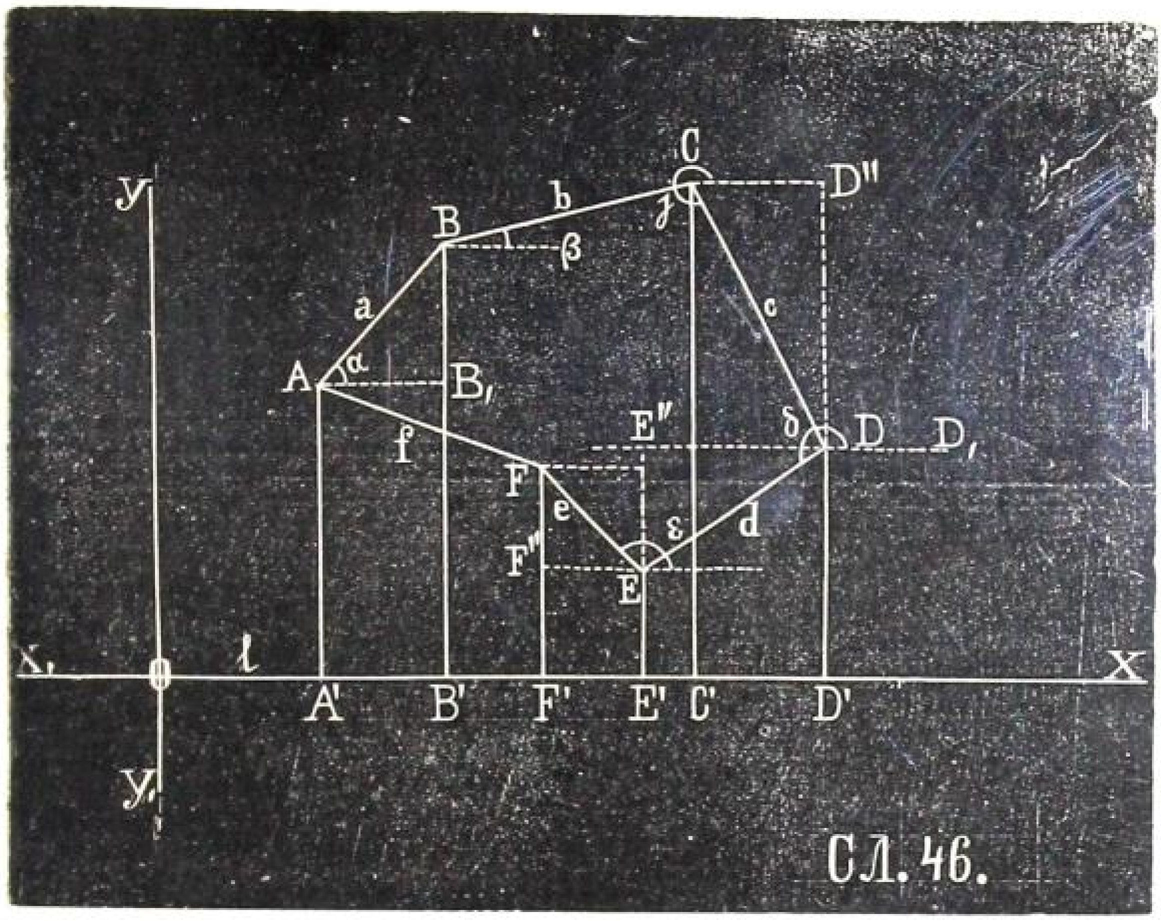
1° Да је збир пројекција страна једне испреламане линије максимум, кад је резултанта паралелна с осом, и да је тај максимум једнак самој резултанти.

2° Да је збир пројекција страна једнак нули, кад резултанта стоји управно на оси.

128. Сад ћемо да покажемо, како се пројекције, узете са одговарајућим знацима, могу изразити помоћу тригонометријских функција.

Узмимо (сл. 46) опет испреламану линију $ABCDEF$. Означимо са a, b. c, d, e дужине њених страна, а са α, β, γ, δ, ε угле истих са осом X_1X; означимо још са φ угао осе X_1X са резултантом, чију ћемо дужину означити са f. Горе смо већ казали, да ћемо пројекције страна, које са X_1X праве оштре или оштроиспупчене угле, сматрати као положне, а пројекције страна, које са X_1X, праве тупе или тупоиспупчене угле, као одречне количине, и да прве пројекције тачка M' описује с лева на десно, а друге у противном правцу, то јест са десна на лево. Тако на пример страна AB прави са X_1X оштар а страна CD оштроиспупчени угао, њине су пројекције дакле положне; страна EF прави са X_1X туп а страна DE тупоиспупчени угао, њине су пројекције дакле одречне.

Посматрајмо сад најпре прву страну AB, којој је пројекција $+ A'B'$; кроз A са X_1X паралелно повучена права



СЛ. 46.

пробија управну раван BB' у тачки B''; из правоуглог троугла ABB'', који на тај начин постаје, добијамо

$$AB'' = AB \cos \alpha = a \cos \alpha;$$

но како је $AB'' = A'B'$ то је такође

$$A'B' = a \cos \alpha.$$

Дакле пројекција стране AB, која са осом X_1X прави оштар угао, једнака је производу из дужине исте стране и косинуса угла, који она прави са X_1X.

Посматрајмо праву CD, којој је пројекција $C'D'$; паралелна кроз C пробија управну раван DD' у тачки D''; из правоуглог троугла CDD'', који се на тај начин добија, изводимо

$$CD'' = CD \cos DCD'' = c \cos (360^\circ - \gamma)$$

дакле због $CD'' = C'D'$

$$C'D' = c \cos \gamma.$$

Дакле пројекција стране CD, која са осом X_1X прави оштроиспупчени угао, једнака је производу из исте стране и косинуса угла, који она прави са осом X_1X.

Посматрајмо сад страну EF, којој је пројекција $-E'F'$; паралелна кроз E на лево продужена пробија управну раван FF' у тачки F''; из правоуглог троугла EFF'' сљедује

$$EF'' = EF \cos FEF'' = e \cos (180^0 - \varepsilon);$$

одавде због $E'F' = EF''$ добијамо

$$-E'F' = e \cos \varepsilon.$$

Дакле је пројекција — узета с одговарајућим знаком — стране EF, која са осом X_1X прави туп угао, једнака производу из исте стране и косинуса угла, који она прави са осом X_1X.

Посматрајмо напослетку страну DE, којој је пројекција $-D'E'$; паралелна кроз D лево продужена пробија управну раван EE' у тачки E''; из правоуглог троугла $EE''D$ сљедује

$$DE'' = DE \cos EDE'' = d \cos (\delta - 180^0)$$

а одавде опет

$$-D'E' = d \cos \delta.$$

Дакле је најзад и пројекција стране DE, која са осом X_1X прави тупоиспупчени угао, једнака производу из исте стране и косинуса угла, који она прави са осом X_1X.

Закључимо дакле, да је *уопште пројекција сваке праве у ма каквој оси једнака производу из дужине исте праве и косинуса угла, који она прави са осом.*

Пошто је збир пројекција страна испреламане линије једнак пројекцији резултанте, то је

3) $a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma + d \cos \delta + c \cos \varepsilon = f \cos \varphi.$

Ако AF сматрамо као страну затворене испреламане линије $ABCDEF$, онда је почетак стране AF не A већ F, дакле њен угао са осом X_1X не φ већ $\varphi' = \varphi - 180^\circ$. Пошто је збир пројекција страна затворене испреламане линије једнак нули то је

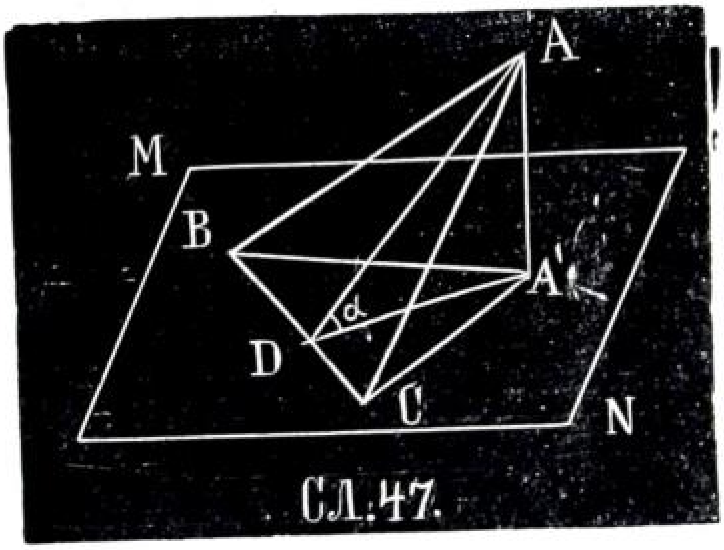
4) $a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma + d \cos \delta + e \cos \varepsilon + f \cos \varphi' = 0,$

која се једначина од оне под 3) због $\cos \varphi' = - \cos \varphi$ у ствари неразликује.

129. *Примедба.* Пошто угли, који се до 2π или 360° допуњавају, имају једнаке и једнако означене косинусе, то се у теорији пројекција могу свуда оштроиспупчени и тупоиспупчени угли заменити њиховим допунама до 360°, као на пример угао γ (сл. 46) углом $D''CD$, угао δ углом EDD_1; то ће рећи као угао једне стране са осом X_1X може се увек узети мањи од она два угла, које описује кроз почетак стране пролазећа паралелна, обрћући се из свог положаја у једном или другом противном правцу до у положај дотичне стране.

130. У № 128 нашли смо, да је пројекција једне праве у буди каквој оси једнака производу из њене дужине и косинуса угла, који она прави са осом. Слична теорема вреди и за ма какву равну слику и њену пројекцију у буди каквој равни. Пројекција једне равне слике у буди каквој равни зове се слика, која је у тој равни пројекцијом обима дане равне слике ограничена.

Узмимо (сл. 47) да имамо најпре троугао ABC, и претпоставимо, да се једна његова страна BC налази у равни MN; ако из A спустимо AA' управно на раван MN, троугао $A'BC$ биће пројекција даног троугла; ако даље повучемо $A'D$ управно на BC, то ће, као што је из стереометрије познато, и AD стајати управно на BC, и потоме угао $ADA' = \alpha$ биће угао, под којим је раван троугла ABC нагнута према равни MN. Означавајући са P и p површине троуглова ABC и $A'BC$ имамо



СЛ. 47.

$$P = \frac{1}{2} BC . AD , \qquad p = \frac{1}{2} BC . A'D ;$$

но како је у правоуглом троуглу $AD'A$

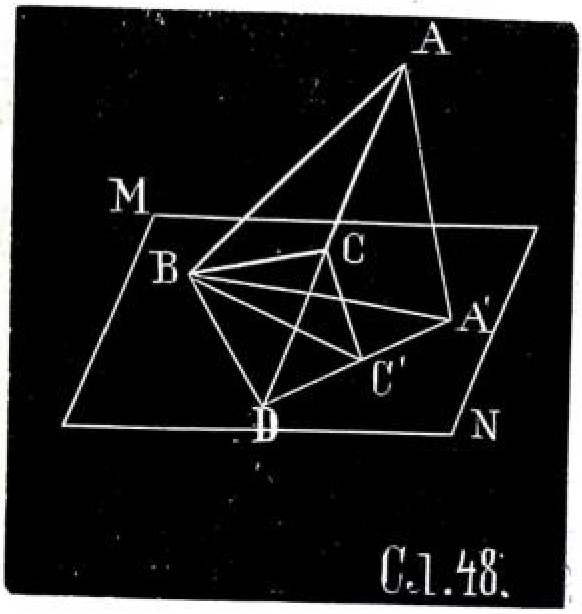
$$\frac{A'D}{AD} = \cos \alpha , \quad \text{одакле} \quad A'D = AD \cos \alpha ,$$

то добијамо даље

$$p = \frac{1}{2} BC . \ AD \cos \alpha \ \text{или} \ p = P \cos \alpha ;$$

дакле површина пројекције троугла ABC у равни MN једнака је производу из површине тога троугла а косинуса угла, који његова раван прави са равни MN.

Посматрајмо сад (сл. 48 види страну 237) троугао ABC у ма каквом положају према равни MN. Пројекција троугла ABC неће се очевидно променити, ако раван MN паралелно покренемо дотле, докле она кроз теме B троугла



Сл. 48.

непрође. Спустимо из A и C управне AA' и CC' и продужимо AC до пробоја D са равни MN; троугао $A'BD$ биће пројекција троугла ABD, троугао $C'BD$ пројекција троугла CBD. Ако је α угао равни ABC и MN, биће услед мало час доказаног

$$A'BD = ABD \cos \alpha,$$

$$C'BD = CBD \cos \alpha.$$

Одавде се добија одузимањем

$$A'BC' = ABC \cos \alpha;$$

но $A'BC'$ јесте пројекција троугла ABC, дакле стоји уопште теорема: *површина пројекције једног равног троугла у ма каквој равни* MN *једнака је производу из површине тога троугла и косинуса угла, који његова раван прави са равни* MN.

Иста теорема вреди и за ма какав полигон. Јер ако је P дани полигон, а P, P'', P'''. . . . . троугли, из којих се он састоји, његова пројекција p састојаће се из одговарајућих троуглова p', p'', p''' . . . .; ако је α угао, под којим је раван полигона P нагнута према равни MN, биће

$$p' = P' \cos \alpha, \quad p'' = P'' \cos \alpha, \quad p''' = P''' \cos \alpha, \ldots .$$

одакле сабирањем

$$p' + p'' + p''' + \ldots . = (P' + P'' + P''' + \ldots) \cos \alpha,$$

или

$$p = P \cos a.$$

Пошто се свака кривом линијом ограничена слика може сматрати као полигон од бесконачно много страна, то вреди теорема уопште за ма какву равну слику.

131. Помоћу доказаних теорема о пројекцијама доказују се на најпростији и најнепосреднији начин различни обрасци тригонометрије и аналитичне геометрије. Тако је на пример теорема изражена обрасцем

$$a = b \cos C + c \cos B$$

само особени случај теореме изражене обрасцем 3) у № 128. Овде ће се још само показати, како се помоћу теорије пројекција изводе обрасци у № 26.

Нека су (сл. 49) a и b ма каква два лука. Да би лук $a + b$ описали, опишимо на кружној линији почињући од A и у одговарајућем правцу лук a, то јест на горе или на доле од A, како је кад лук a положан или одречан; узимајући да је B крај тога лука опишимо почињући од B и у одговарајућем правцу лук b. Из крајне тачке C тога лука спустимо управну CD на пречник BB' и узмимо X_1X за осу пројекција.

Сл. 49.

Пројекција стране OD испреламане линије ODC у оси X_1X у сваком је случају

$$OD \cos AOB = OD \cos AB$$

или пошто је лук $a = 2n\pi + AB$,

$$OD \cos a.$$

Угао, који CD прави са осом X_1X једнак је углу $90^\circ + AOB$, као што то кроз O са CD повучена паралелна EE' сведочи; потоме је пројекција стране CD

$$CD \cos (90^\circ + AOB) = CD \cos \left(\frac{\pi}{2} + AB\right),$$

или, пошто је лук $a = 2n\pi + AB$,

$$CD \cos \left(\frac{\pi}{2} + a\right).$$

Напослетку је пројекција резултанте CO

$$OC \cos AOC = OC \cos AC,$$

или, пошто је лук $a + b = 2n'\pi + AC$,

$$OC \cos (a + b).$$

Пошто је пројекција резултанте једнака збиру пројекција страна, то је

$$OC \cos (a + b) = OD \cos a + CD \cos \left(\frac{\pi}{2} + a\right),$$

или

$$\cos (a+b) = \frac{OD}{OC} \cos a + \frac{CD}{OC} \cos \left(\frac{\pi}{2} + a\right),$$

но како је

$$\frac{OD}{OC} = \cos b, \quad \frac{CD}{OC} = \sin b, \quad \cos \left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a,$$

то је напослетку

1) $$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Овај образац вреди, као што то из његовог извођења сљедује за ма какво a и b. Замењујући у њему a са $\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ b са $\left(\frac{\pi}{2} - b\right)$, добијамо

$$\cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(-b)$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(-b),$$

која једначина због

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a,\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) = \sin(a+b)$$

прелази у сљедећу

2) $$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Стављајући у 1) и 2) $-b$ место b добијамо

$$\cos(a-b) = \cos a \cos(-b) - \sin a \sin(-b)$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos(-b) + \cos a \sin(-b)$$

или

3) $$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

4) $$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

Образац 1) вреди, рекосмо горе уопште, то исто мора дакле бити и са обрасцима 2), 3), 4).

О утицају погрешних података на количине, које су из њих рачуном нађене.

132. Комади једног троугла, из којих се остали непознати имају израчунати, морају се обично наћи непосредним мерењем. Али свако мерење, правих линија као и углова, није никад без погрешке. Осим извесних сталних погрешака, које долазе од саме направе употребљених инструмената, и које се донекле могу определити, па дакле и поправити, има при сваком посматрању и неизбежних погрешака, којима су узрок случајне прилике, као стање температуре, светлости, већа или мања пажња и т. д. Ове прилике, о којима се у даном случају неможе са сигурношћу рећи, да ли постоје или не, узрок су такозваним неизбежним погрешкама посматрања, којима се код свију посматрањем нађених података треба надати. Наравно је, да треба само такве податке употребити, који су у даном случају са што тачнијим посматрањем нађени, тако да су погрешке података што мање. Поменуте погрешке могу бити како положне тако и одречне, то ће рећи посматрањем или мерењем добивене количине могу бити веће а могу бити и мање од своје праве вредности. Код углова то је по себи јасно. Код правих напротив положна погрешка чешће ће се јављати од одречне, јер се многе и то неизбежне околности стичу, због којих мерене дужине морају испасти веће но што су, као на пример отступање од правца, лабаво држање ланца и т. д.

Као што рекосмо, погрешке посматрањем нађених података биће према самим тим податцима врло мале тако, да се производи као и виши степени истих могу занемарити. Пошто су погрешке углова врло мале, то се може косинус такве погрешке у рачунима заменити јединицом а синус дужином одговарајућег и полупречником јединицом описаног лука, која се дужина по № 114 добија множећи *sin* 1'' бројем секунада погрешке.

Кад су посматрањем нађени комади погрешни, онда то исто мора бити случај и са онима, који су из њих рачуном нађени. Но при сваком посматрању може се наћи крајна граница погрешке, то јест може се с исвесношћу рећи, да погрешка непрелази једну извесну количину, на пример код углова 20''. Одатле мора ће се дати израчунати граница погрешке количинама које су рачуном нађене, тако да се може казати, погрешке истих количина непрелазе ту и ту вредност. Наш је задатак сада да покажемо, како се, кад су познате границе погрешака датих, могу изнаћи границе погрешака оних комада, који су из њих рачуном нађени.

Да би овај задатак решили, треба нам најпре изнаћи односе, који постоје између погрешака даних и погрешака рачуном нађених комада. Исте односе извешћемо из оних образаца, које смо при израчунавању непознатих комада употребили, а то су основни обрасци под 1) у № 67, или обрасци из њих изведени; ми ћемо их извести из основних образаца.

Узмимо нека су a, b, c, A, B, C комади једног троугла, отчести непосредно измерени, а отчести рачуном нађени; δa, δb, δc, δA, δB, δC нека су погрешке тих комада, дакле $a + \delta a$, $b + \delta b$, $c + \delta c$, $A + \delta A$, $B + \delta B$, $C + \delta C$ њихове праве вредности. Основни обрасци равне тригонометрије јесу

$$1) \quad \frac{a}{sin\ A} = \frac{b}{sin\ B} = \frac{c}{sin\ C}, \ A + B + C = 180^{\circ},$$

или што је свеједно

2) $a \sin B = b \sin A,\ a \sin C = c \sin A,\ A + B + C = 180^\circ$.

Ови обрасци морају бити задовољени не само правим вредностима троуглових комада већ и погрешним, јер су при израчунавању непознатих комада из познатих погрешних употребљени ови обрасци или они из њих изведени. Потоме дакле вреде осим последњих једначина још и сљедеће

$$(a + \delta a) \sin (B + \delta B) = (b + \delta b) \sin (A + \delta A),$$
$$(a + \delta a) \sin (C + \delta C) = (c + \delta c) \sin (A + \delta A),$$
$$A + \delta A + B + \delta B + C + \delta C = 180^\circ;$$

но усљед једне горе учињене примедбе је

$$\sin (A + \delta A) = \sin A + \cos A . \delta A,$$
$$\sin (B + \delta B) = \sin B + \cos B . \delta B,$$
$$\sin (C + \delta C) = \sin C + \cos C . \delta C.$$

Замењујући ове вредности у претходећим једначинама и занемарујући производе $\cos B . \delta a\ \delta B$, $\cos A . \delta c\ \delta A$ и т. д. добијамо

$$a \sin B + \sin B . \delta a + a \cos B . \delta B = b \sin A + \sin A . \delta b$$
$$+ b \cos A . \delta A\ ,$$

$$a \sin C + \sin C . \delta a + a \cos C . \delta C = c \sin A + \sin A . \delta c$$
$$+ c \cos A . \delta A,$$

$$A + B + C + \delta A + \delta B + \delta C = 180^\circ,$$

или због једначина под 2)

$$3)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sin B.\delta a + a \cos B.\delta B = \sin A.\delta b + b \cos A.\delta A, \\ \sin C.\delta a + a \cos C.\delta C = \sin A.\delta c + c \cos A.\delta A, \\ \qquad\qquad \delta A + \delta B + \delta C = 0. \end{array} \right.$$

Ово су тражене једначине, у којима су исказани односи који морају постојати између количина δa, $\delta b, \ldots\ldots \delta C$; сваки други однос, који између истих количина постоји, мора се из ових овде дати извести. Прве две једначине могу се мало другачије и за памћење згодније претставити. Из прве једначине сљедује

$$\sin B.\delta a - b \cos A.\delta A = \sin A.\delta b - a \cos B.\delta B,$$

$$\frac{\sin B}{b}\delta a - \cos A.\delta A = \sin A \frac{\delta b}{b} - \frac{a}{b} \cos B.\delta B;$$

или због $\quad \dfrac{\sin B}{b} = \dfrac{\sin A}{a} \quad$ и $\quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{\sin A}{\sin B}$

$$\frac{\sin A}{a}\delta a - \cos A.\delta A = \sin A \frac{\delta b}{b} - \frac{\sin A}{\sin B} \cos B.\delta B,$$

или најзад по деоби са $\sin A$

$$\frac{\delta a}{a} - \operatorname{cotg} A.\delta A = \frac{\delta b}{b} - \operatorname{cotg} B.\delta B;$$

на исти начин сљедује из друге једначине

$$\frac{\delta a}{a} - \operatorname{cotg} A.\delta A = \frac{\delta c}{c} - \operatorname{cotg} C.\delta C.$$

На тај начин место горњих једначина имамо сљедеће

$$4)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\delta a}{a} - cotg\, A.\delta A &= \frac{\delta b}{b} - cotg\, B.\delta B \\ &= \frac{\delta c}{c} - cotg\, C.\delta C, \\ \delta A + \delta B + \delta C &= 0. \end{aligned} \right.$$

Помоћу ових дакле образаца моћићемо, кад су од шест количина δa, δb, ... δC три познате, остале три непознате израчунати, претпостављајући, да се међу познатим количинама налази погрешка барем једне стране. Свега различитих задатака може бити четири, које ћемо редом у сљедећој № прећи; но нетреба с ума сметнути, да за рачун место $\delta A, \delta B, \delta C$ треба писати $\delta A\, sin\, 1''$, $\delta B\, sin\, 1''$, $\delta C\, sin\, 1''$.

133. *Задатак I.* У једном троуглу дати су комади a, B, C, одакле су после израчунати комади A, b, c; из погрешака δa, δB, δC датих траже се погрешке δA, δb, δc рачуном нађених комада. Из образаца под 4) добијамо

$$5)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta A &= -\delta B - \delta C, \\ \delta b &= \frac{b}{a}\,\delta a + b\, sin\, 1''\,(cotg\, B.\delta B - cotg\, A.\delta A). \\ \delta c &= \frac{c}{a}\,\delta a + c\, sin\, 1''\,(cotg\, C.\delta C - cotg\, A.\delta A). \end{aligned} \right.$$

Задатак II. У једном троуглу дати су комади a, b, A, одакле су израчунати B, C, c. Из погрешака δa, δb, δA датих траже се погрешке δB, δC, δc рачуном нађених комада.

Из образаца под 4) добијамо

$$6)\quad \begin{cases} \delta B = -\dfrac{tg\, B}{a \sin 1''}\delta a + \dfrac{tg\, B}{b \sin 1''}\delta b + \dfrac{tg\, B}{tg\, A}\delta A, \\ \delta C = -\delta A - \delta B, \\ \delta c = \dfrac{1}{\cos B}\delta a - \dfrac{\cos C}{\cos B}\delta b - c\, tg\, B \sin 1''\, \delta A. \end{cases}$$

Задатак III. У једном троуглу дати су комади a, b, C, из којих су потом рачуном нађени c, A, B; из погрешака δa, δb, δC датих траже се погрешке δc, δA, δB рачуном нађених комада.

Из образаца под 4) добијамо

$$7)\quad \begin{cases} \delta c = \cos B.\delta a + \cos A.\delta b + a \sin B \sin 1''\, \delta C, \\ \delta A = \dfrac{\sin B}{c \sin 1''}\delta a - \dfrac{\sin A}{c \sin 1''}\delta b - \dfrac{a \cos B}{c}\delta C, \\ \delta B = -\delta A - \delta C. \end{cases}$$

Задатак IV. У једном троуглу дати су комади a, b, c, одакле су израчунати комади A, B, C; из погрешака δa, δb, δc датих траже се погрешке δA, δB, δC израчунатих комада.

Из образаца под 4) добијамо

$$8)\qquad \delta A = \frac{1}{c \sin B \sin 1''}\delta a - \frac{\cos C}{c \sin B \sin 1''}\delta b - \frac{\cos B}{c \sin B \sin 1''}\delta c;$$

слична два обрасца за δB и δC добијају се из овог простом изменом слова.

134. Обрасци у предњој № нађени могу се употребити и онда, кад се захтева, да се из врло малих промена познатих комада израчунају одговарајуће промене осталих рачуном нађених комада.

Рачуни при једној триангулацији састоје се, као што смо у № 112 видили, у разрешавању појединих троуглова тригонометријске мреже, где су увек познати једна страна и угли; применимо на један од тих троуглова обрасце под 5). Из истих образаца видимо, да на израчунате стране b и c утичу, осим погрешке δa стране a и погрешке углова; даље видимо, да ће се погрешка једног угла тим слабије осећати, штогод је исти угао ближи 90°, и да иста погрешка неће бити баш од никаква утицаја, кад је одговарајући угао $= 90^\circ$. Но како сва три угла једног равног троугла немогу бити $= 90^\circ$, то ће очевидно онај случај бити најугоднији, где су сва три угла $= 60^\circ$; с тога се при премеравању и снимању равнострани троугли сматрају као најбољи, и никад се недопуштају троугли, у којима би један од углова био мањи од 30°.

135. *Пример I.* Претпоставимо нека су сљедећи комади једног троугла непосредно измерени

$$a = 5876, \quad B = 57^\circ\, 18'\, 39'', \quad C = 72^\circ\, 3'\, 26'';$$

комади пак

$$A = 50^\circ\, 37'\, 55'', \quad b = 6396{\cdot}738, \quad c = 7230{\cdot}915$$

нека су из првих изнађени рачуном. Ако претпоставимо даље да се при мерењу стране $a = 5876$ није више погрешило од 0·0001 њене дужине, а тако исто и при мерењу углова не више од 1″, то онда $\frac{\delta a}{a}$ неће бити веће од 0·0001 ни

δB и δC већи од $1''$. Да би у овом случају изнашли погрешке израчунатих комада, то јест δb, δc и δA мораћемо се служити обрасцима под 5) у № 133, и у њима ставити $\frac{\delta a}{a} = 0{\cdot}0001$, $\delta B = \delta C = 1''$.

Израчунавање погрешке δA.

$$\delta A = 1'' + 1'' = 2''.$$

Израчунавање погрешке δb.

$\log b$	$3{\cdot}8059586$
$\log \delta B \sin 1''$	$4{\cdot}6855749-10$
$\log \operatorname{cotg} B$	$9{\cdot}8073466-10$
Збир	$18{\cdot}2988801-20$

$\log b \sin 1'' \operatorname{cotg} B.\delta B$	$0{\cdot}2988801-2$
$b \sin 1'' \operatorname{cotg} B.\delta B$	$0{\cdot}0199016.$

$\log b$	$3{\cdot}8059586$
$\log \delta A \sin 1''$	$4{\cdot}9866049-10$
$\log \operatorname{cotg} A$	$9{\cdot}9140559-10$
Збир	$18{\cdot}7066184-20$

$\log. b \sin 1'' \operatorname{cotg} A.\delta A$	$0{\cdot}7066184-2$
$b \sin 1'' \operatorname{cotg} A.\delta A$	$0{\cdot}050883.$
$\frac{b\delta a}{a}$	$0{\cdot}6396738.$

Дакле је

$$\delta b = 0{\cdot}6396738 + 0{\cdot}0199016 - 0{\cdot}0508883,$$

или

$$\delta b = 0{\cdot}5986871.$$

Израчунавање погрешке δc.

$\log c$	$3{\cdot}8591933$
$\log \delta C \sin 1''$	$4{\cdot}6855749-10$
$\log \operatorname{cotg} C$	$9{\cdot}5102982-10$
Збир	$18{\cdot}0550664-20$

$\log c \sin 1'' \operatorname{cotg} C.\delta C$	$0{\cdot}0550664-2$
$c \sin 1'' \operatorname{cotg} C.\delta C$	$0{\cdot}0113518.$

$\log c$	$3{\cdot}8591933$
$\log \delta A \sin 1''$	$4{\cdot}9866049-10$
$\log \operatorname{cotg} A$	$9{\cdot}9140559-10$
Збир	$18{\cdot}7598541-20$

$\log c \sin 1'' \operatorname{cotg} A.\delta A$	$0{\cdot}7598541-2$
$c \sin 1'' \operatorname{cotg} A.\delta A$	$0{\cdot}0575247$

Дакле је

$$\delta c = 0{\cdot}7230915 + 0{\cdot}0113518 - 0{\cdot}0575247,$$

или

$$\delta c = 0{\cdot}6769186.$$

Као што се види погрешке рачуном нађених страна износе мање од 0·0001 њине дужине.

136. *Пример II*. Тражимо погрешку висине CD, која е у № 114, b) израчуната.

Дате су биле количине a, α, β, из којих се најпре C израчунало, па онда из њега висина CD. Треба дакле ајпре израчунати погрешку стране BC у троуглу ABC и помоћу образаца под 5) у № 133, у којим обрасцима еба ставити

$$a = AB = a,\ \ b = BC,\ \ B = \beta,\ \ A = ACB = \alpha - \beta,$$

$$\delta a = \delta AB,\ \ \delta b = \delta BC,\ \delta B = \delta\beta,\ \ \delta A = \delta ACB = \delta\alpha - \delta\beta,$$

па ће изаћи

$$\delta BC = \frac{BC\delta a}{a} + BC\, \mathit{sin}\, 1''\ [\mathit{cotg}\, \beta.\delta\beta - \mathit{cotg}\, (\alpha - \beta)\ (\delta\alpha - \delta\beta)].$$

Да би сад помоћу нађене погрешке δBC израчунали погрешку δCD висине CD, треба употребити опет обрасце под 5) у № 133, у којима треба ставити сада

$$a = BC,\ b = CD,\ \ A = CDB = 90^\circ + \gamma,\ B = \alpha,$$

$$\delta a = \delta BC,\ \delta b = \delta CD,\ \delta A = \delta\gamma,\ \delta B = \delta\alpha,$$

па ћемо имати

$$\delta CD = \frac{CD.\delta BC}{BC} + CD\, \mathit{sin}\, 1''\ (\mathit{cotg}\, \alpha.\, \delta a + \mathit{tg}\, \gamma.\, \delta\gamma),$$

или кад δBC његовом нађеном вредношћу заменимо

$$\delta CD = \frac{CD}{BC}\left[\frac{BC.\delta a}{a} + BC\, \mathit{sin}\, 1'' \left\{\mathit{cotg}\, \beta.\delta\beta - \mathit{cotg}\, (\alpha - \beta).(\delta\alpha - \delta\beta)\right\}\right] + CD\, \mathit{sin}\, 1''\ (\mathit{cotg}\, \alpha.\delta\alpha + \mathit{tg}\, \gamma.\delta\gamma).$$

Одавде поступним свођењем добијамо редом

$$\delta CD = CD\left[\frac{\delta a}{a} + \left\{\mathit{cotg}\, \beta + \mathit{cotg}\, (\alpha - \beta)\right\} \mathit{sin}\, 1''\ \delta\beta - \left\{\mathit{cotg}\, (\alpha - \beta) - \mathit{cotg}\, \alpha\right\} \mathit{sin}\, 1''\ \delta\alpha + \mathit{tg}\, \gamma.\delta\gamma\, \mathit{sin}\, 1''\right],$$

$$\delta CD = CD\left[\frac{\delta a}{a} + \frac{\sin\alpha.\delta\beta\ \sin 1''}{\sin\beta \sin(\alpha - \beta)}\right.$$

$$\left. - \frac{\sin\beta.\delta\alpha\ \sin 1''}{\sin\alpha \sin(\alpha - \beta)} + tg\,\gamma.\delta\gamma\ \sin 1''\right].$$

До овог истог резултата може се, као што ће се одмах показати, доћи и непосредно без помоћи образаца у № 133; тај непосредни начин решавања овоме сличних задатака често је лакши но онај помоћу образаца поменуте № 133.

У № 114 нашли смо

$$1)\qquad CD = \frac{a \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)\cos\gamma},$$

који се образац може написати и овако

$$CD \sin(\alpha - \beta)\cos\gamma = a \sin\alpha \sin\beta.$$

Ова једначина мора очевидно вредити и онда, кад се место CD, a, α, β и γ стави $CD + \delta CD$, $a + \delta a$, $\alpha + \delta\alpha$, $\beta + \delta\beta$ и $\gamma + \delta\gamma$, где δC, δa, $\delta\alpha$, $\delta\beta$ и $\delta\gamma$ значе погрешке количина CD, a, α, β, и γ; дакле по овоме је

$$(CD + \delta CD) \sin\left[(\alpha - \beta) + (\delta\alpha - \delta\beta)\right] \cos(\gamma + \delta\gamma)$$
$$= (a + \delta a) \sin(\alpha + \delta\alpha) \sin(\beta + \delta\beta).$$

Одавде узимајући на ум оно, што је у № 132 о погрешкама углова речено, добијамо

$$(CD + \delta CD)\left[\sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - \beta)(\delta\alpha - \delta\beta) \sin 1''\right]$$
$$(\cos\gamma - \sin\gamma.\delta\gamma \sin 1'') = (a + \delta a)(\sin\alpha + \cos\alpha.\delta\alpha \sin 1'')$$
$$(\sin\beta + \cos\beta.\delta\beta \sin 1''),$$

или ако свршимо означена множења, сећајући се притом онога, што је у № 132 о производима и вишим степенима погрешака поменуто

$$CD \sin(\alpha-\beta)\cos\gamma - CD \sin(\alpha-\beta)\sin\gamma.\delta\gamma \sin 1''$$
$$+ CD \cos(\alpha-\beta)(\delta\alpha-\delta\beta)\cos\gamma \sin 1'' + \delta CD \sin(\alpha-\beta)\cos\gamma$$
$$= a \sin\alpha \sin\beta + a \sin\alpha \cos\beta \, \delta\beta \sin 1''$$
$$+ a \cos\alpha \sin\beta \, \delta\alpha \sin 1'' + \delta a \sin\alpha \sin\beta.$$

Пошто је $CD \sin(\alpha-\beta)\cos\gamma = a \sin\alpha \sin\beta$, то из последње једначине добијамо даље

$$-CD \sin(\alpha-\beta)\sin\gamma.\delta\gamma \sin 1'' + CD \cos(\alpha-\beta)(\delta\alpha-\delta\beta)$$
$$\cos\gamma \sin 1'' + \delta\, CD \sin(\alpha-\beta)\cos\gamma = a \sin\alpha \cos\beta.\delta\beta \sin 1''$$
$$+ a \cos\alpha \sin\beta.\delta\alpha \sin 1'' + \delta a \sin\alpha \sin\beta,$$

или

$$\delta\, CD \sin(\alpha-\beta)\cos\gamma = \delta a \sin\alpha \sin\beta + \delta\alpha \Big[a \cos\alpha \sin\beta$$
$$- CD \cos(\alpha-\beta)\cos\gamma\Big] \sin 1'' + \delta\beta \Big[a \sin\alpha \cos\beta +$$
$$+ CD \cos(\alpha-\beta)\cos\gamma\Big] \sin 1'' + CD \sin(\alpha-\beta)\sin\gamma.\delta\gamma \sin 1''.$$

Из ове једначине по замени количина $a \sin\alpha$, $a \sin\beta$ и $a \sin\alpha \sin\beta$ њиним вредностима, које се из обрасца 1) лако добијају, налазимо

$$\delta\, CD \sin(\alpha-\beta)\cos\gamma = \delta a \frac{CD \sin(\alpha-\beta)\cos\gamma}{a}$$

$$+ \delta\alpha \sin 1'' \left[\frac{CD \sin(\alpha-\beta) \cos\alpha \cos\gamma}{\sin\alpha} - CD \cos(\alpha\text{-}\beta) \cos\gamma\right]$$

$$+ \delta\beta \sin 1'' \left[\frac{CD \sin(\alpha-\beta) \cos\beta \cos\gamma}{\sin\beta} + CD \cos(\alpha\text{-}\beta) \cos\gamma\right]$$

$$+ CD \sin(\alpha-\beta) \sin\gamma . \delta\gamma \sin 1'',$$

или

$$\delta\, CD \sin(\alpha--\beta) \cos\gamma = CD \left[\frac{\delta a}{a} \sin(\alpha-\beta) \cos\gamma\right.$$

$$+ \delta\alpha \sin 1'' \cos\gamma \left\{\frac{\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{\sin\alpha} - \cos(\alpha-\beta)\right\}$$

$$+ \delta\beta \sin 1'' \cos\gamma \left\{\frac{\sin(\alpha-\beta)\cos\beta}{\sin\beta} + \cos(\alpha-\beta)\right\}$$

$$\left. + \sin(\alpha-\beta) \sin\gamma . \delta\gamma \sin 1''\right],$$

или

$$\delta\, CD \sin(\alpha-\beta) \cos\gamma = CD \left[\frac{\delta a}{a} \sin(\alpha-\beta) \cos\gamma\right.$$

$$- \delta\alpha \sin 1'' \cos\gamma \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \delta\beta \sin 1'' \cos\gamma \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\left. + \sin(\alpha-\beta) \sin\gamma . \delta\gamma \sin 1''\right].$$

Деобом ове једначине са $\sin(\alpha-\beta) \cos\gamma$ добијамо најзад

$$\delta\, CD = CD \left[\frac{\delta a}{a} - \frac{\sin \beta . \delta \alpha \sin 1''}{\sin \alpha \sin (\alpha - \beta)} \right.$$

$$\left. + \frac{\sin \alpha . \delta \beta \sin 1''}{\sin \beta \sin (\alpha - \beta)} + tg\, \gamma .\, \delta \gamma \sin 1'' \right],$$

дакле исти образац као и горе.

Из последњег обрасца, који смо на два различна начина нашли, види се да угао $ACB = \alpha - \beta$ несме бити врло мали, одакле сљедује, да дужина a несме бити врло мала; даље да, кад је угао γ врло мали, дакле земљиште скоро хоризонтално и мало већа погрешка у углу γ није од замашног утицаја. Пошто је увек $\alpha > \beta$, и потоме $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} > 1$ а $\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} < 1$, то треба, као што се то опет из нађеног обрасца види, угао β особито тачно мерити. Напослетку види се из обрасца, да треба и дужину a што тачније измерити.

ТРЕЋИ ДЕО.

СФЕРНА ТРИГОНОМЕТРИЈА.

Предмет сферне тригонометрије.

137. Сферна тригонометрија бави се разрешавањем сферних троуглова, то јест таквих, који постају на површју лопте или сфере пресецањем трију великих кругова.

Стране сферних троуглова обично се дају у степенима, минутама и секундама; али кад је познат број степена, минута и секунада једне стране, лако ју је (№ 6) изразити у деловима полупречника.

Угли сфернога троугла означавају се са A, B, C а *супротне* им стране са a, b, c.

Ми ћемо се бавити само са таквим сферним троуглима, *којих су стране мање од 180°*, то јест од пола периферије једног великог круга, јер се на разрешавање оваквих троуглова може увек свести разрешавање осталих.

138. Ако је ABC један сферни троугао, и његова се темена A, B, C вежу са средиштем O лопте, на којој се исти троугао налази, постаће тространи телесни рогаљ $OABC$. Оштрични угли тога рогља једнаки су странама сфернога троугла, јер су ове последње луци, који су из O и са полупречником лопте између рогљевих оштрица описани; те-

лесни угли истога рогља, то јест угли његових страна или равни AOB, AOC и BOC једнаки су углима сфернога троугла, јер стране овога леже у рогљевим равнима AOB, AOC, BOC, а познато је, да се углом двају великих лукова зове угао равни, у којима се они налазе.

Ако се кроз темена сфернога троугла повуку на његове стране дирке, оне ће се налазити у рогљевим странама или равнима и стајаће управно на његовим оштрицама; угли тих дирака јесу потоме једнаки углима рогљевих страна па дакле и углима сфернога троугла.

Пошто сваком сферном троуглу одговара један тространи рогаљ, којег су оштрични и телесни угли односно једнаки странама и углима сфернога троугла, то је јасно, да сваки однос између страна и углова сфернога троугла даје аналогни однос између оштричних и телесних углова тространог рогља и обратно. Сваки дакле образац између страна и углова сфернога троугла биће у исти мах и образац између оштричних и телесних углова тространог рогља.

Пре него што пређемо на истраживање односа између страна и углова сфернога троугла, прећићемо укратко главна својства тространог телесног рогља, лопте и сфернога троугла.

Тространи телесни рогаљ.

139. Из геометрије познато је да се *тространим телесним рогљем* зове део бесконачног простора, који постаје, кад се три равни секу по трима правима, које се у једну тачку стичу. Пресеци SA, SB и SC зову се *оштрице*, њин пресек S *теме*, а делови ограничавајућих равни између две и две оштрице *равни* или *стране* телесног рогља.

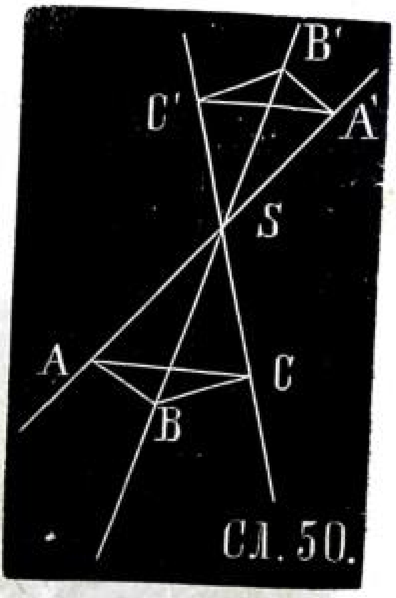
Кад се 4, 5, 6 . . . . . равни секу по 4, 5, 6, ... правих линија, које се све у једну тачку стичу, онда постаје четворострани, петострани, шестострани . . . . телесни рогаљ.

Угли, које две и две оштрице праве, зову се *оштрични угли*, а угли, које две и две стране праве, зову се *телесни угли* рогља. Телесни и оштрични угли рогља зову се његови комади.

Телесни рогаљ означава се или словом, којим је његово теме означено, или кад се иза истог слова напишу још редом слова, којима су поједине оштрице означене. Тако ће се например казати рогаљ S или $SABC$.

Кад је један телесни угао тространог рогља = 90° он се зове правоугао. Лако је увидити, да кад су два телесна угла тространог рогља посебице = 90°, и њима супротне стране морају бити = 90°; исто тако кад су сва три телесна угла тространог рогља = 90°, онда и супротне им стране морају бити = 90°.

Кад се (сл. 50) оштрице једног телесног рогља продуже преко његовог темена, добија се нов један телесни рогаљ, којег су комади једнаки комадима данога рогља, али опет зато оба рогља нису подударна (конгруентна), то јест недају се поклопити, јер су једнаки комади оба рогља на сасвим противан начин распоређени. Такви рогљеви зову се *симетрични*. Али има један случај, где се оба рогља могу поклопити, а то је онај, *кад је дани рогаљ SABC равнокрак*, то јест кад су му два оштрична угла једнака.



Сл. 50.

Узмимо на пример да је оштрични угао ASB (сл. 50) једнак углу BSC. Ако рогаљ $SA'B'C'$ обрнемо око S тако, да SB' падне на SB, то ће се оба рогља поклопити, јер пошто је телесни угао код SB' једнак телесном углу код

SB, то ће раван $B'SC'$ пасти у раван ASB и раван $A'SB'$ у раван BSC, а осим тога због $ASB = BSC = B'SC = A'SB'$ права $C'S$ пашће у AS и $A'S$ у CS. Дакле у овом особеном случају два симетрична рогља подударају се или поклапају.

Одавде се у исто доба види, да телесни угао код SA мора бити једнак оном код SC, јер се телесни угао код SC', који је једнак оном код SC, подудара са оним код SA. Дакле:

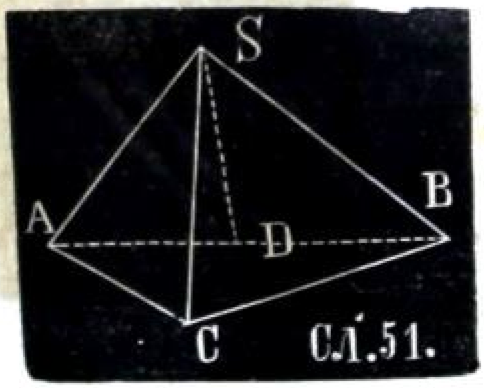
У сваком равнокраком тространом рогљу насирам једнаких оштричних углова леже и једнаки телесни угли.

Лако је такође доказати *да, кад су у једном тространом телесном рогљу два телесна угла једнака, насирам тих углова морају лежати и једнаки оштрични угли, и да је потоме тространи рогаљ равнокрак.*

Најзад лако је увидити, да, кад су сва три оштрична угла једнака, то исто мора бити и са телесним углима и обратно.

140. *У једном тространом рогљу сваки је оштрични угао мањи од збира осталих двају.*

Нека је (сл. 51) $SABC$ дани тространи рогаљ, и ASB највећи од његова три оштрична угла. Повуцимо у равни ASB праву SD тако, да је угао ASD једнак оштричном углу ASC и начинимо $SD = SC$. Кроз D повуцимо праву ADB, која ће оштрице SA и SB сећи у тачкама A и B, и вежимо C са A и B. Троугли ASD, ASC једнаки су, јер је $SC = SD$, $AS = AS$, и $ASC = ASD$; дакле је $AD = AC$. Троугао ACB даје



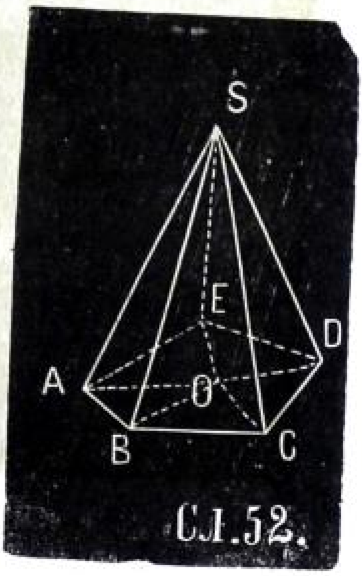
Сл. 51.

$$AD + DB < AC + CB \quad \text{или} \quad DB < CB.$$

Троугли DSB, CSB имају дакле две стране једнаке, али трећа страна DB првога мања је од треће стране CB другога. Потоме угао DSB мањи је од угла CSB, па дакле и оштрични угао $ASB = ASD + DSB$ мањи је од збира осталих двају то јест од $ASC + BSC$.

141. *У сваком телесном рогљу збир оштричних углова мањи је од 360°.*

Повуцимо (сл. 52) једну раван тако, да иста оштрице рогља испод његовог темена S пресеца, па ћемо добити као пресек један полигон $ABCDE$. Узмимо једну тачку O унутра у полигону и вежимо је са теменима A, B, C, D, E полигона. Код тачака A, B, C, D, E имамо саме тростране рогљеве. На основу теореме у № 140 је дакле



Сл. 52.

$$BAE \text{ или } BAO + OAE < SAB + SAE,$$

$$ABC \text{ или } ABO + OBC < SBA + SBC,$$

$$BCD \text{ или } BCO + OCD < SCB + SCD.$$

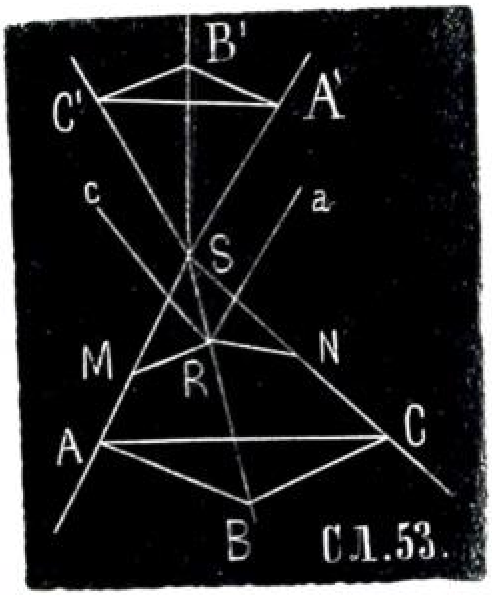
. . . .

Сабравши све ове неједнакости наћићемо, да је збир углова налазећих се на основицама троуглова, којима је теме O, мањи од збира углова налазећих се на основицама троуглова, којима је теме S. Пошто је првих троуглова са теменом код O онолико исто колико и других са теменом код S, то је јасно, да збир углова код O мора бити већи од збира углова код S. Но збир углова код O износи 360°; дакле збир углова код S, то ће рећи збир оштричних углова рогља $SABCDE$ јесте мањи од 360°.

Ово вреди за рогљеве од ма колико страна па дакле и за тространи рогаљ.

142. Кад се у темену S једног тространог рогља подигну управне на његове три стране, постаје нов један тространи рогаљ. *Дани и нови рогаљ стоје у таквој свези, да су оштрични угли једнога суплементи* — допуне до 180° — *одговарајућих телесних углова другога рогља.*

Нека је (сл. 53) $SABC$ дани тространи рогаљ. У темену S подигнимо на стране SAB, SAC и SBC редом управне SC', SB', SA', које ће бити оштрице новог једног рогља $SA'B'C'$. Али и обратно оштрице SA, SB, SC даног рогља стоје управно на равнима или странама данога рогља. Јер праве SB' и SC' стоје управно прва на страни SAC а друга на страни SAB, дакле и на њином пресеку SA, и обратно SA стоји управно на SB' и SC' дакле и на страни $SB'C'$; на исти начин доказује се, да SB стоји управно на страни $SA'C'$ и SC на страни $SA'B'$. Дакле кад би се рогаљ $SA'B'C'$ сматрао као дани, истом конструкцијом као мало час нашао би се као нов рогаљ $SABC$.



Сл. 53.

Телесни угао једног и оштрични угао другог од два посматрана рогља зову се *одговарајући*, кад оштрице последњег — оштричног — угла стоје управно на равнима првог. Тако су на пример одговарајући угли.

Телесни угао код SB и оштрични $A'SC'$
„ „ „ SA „ „ $B'SC'$
„ „ „ SC „ „ $A'SB'$
„ „ „ SA' „ „ BSC
„ „ „ SB' „ „ ASC
„ „ „ SC' „ „ ASB.

У рогљу $SABC$ телесни угли код SA, SB, SC стоје односно наспрам оштричних углова BSC, ASC, ASB, а у рогљу $SA'B'C'$ стоје телесни угли код SA', SB', SC' односно наспрам оштричних $B'SC'$, $A'SC'$, $A'SB'$.

Ако у једном од два рогља $SABC$, $SA'B'C'$ узмемо један телесни и њему супротни оштрични угао, и потражимо им одговарајуће угле у другом рогљу, видићемо, да ови стоје такође један наспрам другога. Тако на пример.

Телесни угао код SB стоји наспрам оштричног ASC, оштрични угао код $A'SC'$ стоји наспрам телесног код SB'.

Да би сад тврђење у почетку ове №е учињено оправдали, повуцимо кроз тачку R оштрице SB једну раван управно на SB, која ће равни SAB, SBC сећи по правима RM и RN. Пошто последње две праве стоје управно на SB, то је угао MRN једнак телесном углу код SB. Ако у истој кроз R повученој равни повучемо Ra, Rc паралелно са SA', SC', биће угао aRc једнак углу $A'SC'$; даље је $cRM = aRN = 90^\circ$, јер cR стоји управно на SAB и aR на SBC. Пошто је сад

$$aRc + cRM + MRN + NRa = 360^\circ,$$

и

$$cRM + aRN = 180^\circ,$$

то је

$$aRc + MRN = 180^\circ$$

или

$$A'SC' + MRN = 180^\circ,$$

и тиме је горње тврђење доказано.

Два тространа рогља, који стоје у таквој свези као посматрана два, зову се *суплементни* рогљеви.

Ако су дакле a, b, c оштрични, а A, B, C телесни угли једног тространог рогља, то су

$$180^\circ - A,\ 180^\circ - B,\ 180^\circ - C$$

оштрични а

$$180^\circ - a,\ 180^\circ - b,\ 180^\circ - c$$

телесни угли суплементног рогља.

143. *У сваком тространом телесном рогљу збир телесних углова мањи је од 540° а већи од 180°; разлика, која постаје, кад се од збира двају телесних углова одузме трећи, мања је од 180° а већа од — 180°.*

Нека су A, B, C телесни угли рогла; $180^\circ - A$, $180^\circ - B$, $180^\circ - C$ биће оштрични угли суплементног рогља. Пошто је у сваком рогљу збир двају оштричних углова већи од трећег, то је

$$180^\circ - A + 180^\circ - B > 180^\circ - C,$$
$$180^\circ - A + 180^\circ - C > 180^\circ - B,$$
$$180^\circ - B + 180^\circ - C > 180^\circ - A.$$

Сабирањем ових неједнакости добијамо

$$A + B + C < 540^\circ.$$

Пошто је у сваком рогљу (№ 141) збир оштричних углова мањи од 360°, то је

$$180^\circ - A + 180^\circ - B + 180^\circ - C < 360^\circ$$

или

$$A + B + C > 180^\circ.$$

Свођењем првих трију неједначина добијамо

$$A + B - C < 180^\circ,$$
$$A + C - B < 180^\circ,$$
$$B + C - A < 180^\circ.$$

Одузимајући 2 C од леве и десне стране неједнакости

$$A + B + C > 180^\circ$$

добијамо $A + B - C > 180^\circ - 2\,C$;

пошто је сад $2\,C < 360^\circ$, то и онда кад је $2\,C > 180^\circ$ разлика $180^\circ - 2\,C$ неможе пасти испод $- 180^\circ$; дакле разлика $A + B - C$ већа је од $- 180^\circ$. На исти начин доказује се, да су и разлике $A + C - B$, $B + C - A$ веће од $- 180^\circ$.

Ако разлику, која постаје, кад се од збира телесних углова тространог рогља одузме 180°, назовемо *сувишком* или *ексцесом*, лако је доказати, да је сваки телесни угао тространог рогља већи од пола ексцеса. Јер пошто је

$$B + C - A < 180^\circ$$

то додавајући левој и десној страни ове неједнакости $2\,A$ наћићемо

$$A + B + C < 180^\circ + 2\,A$$

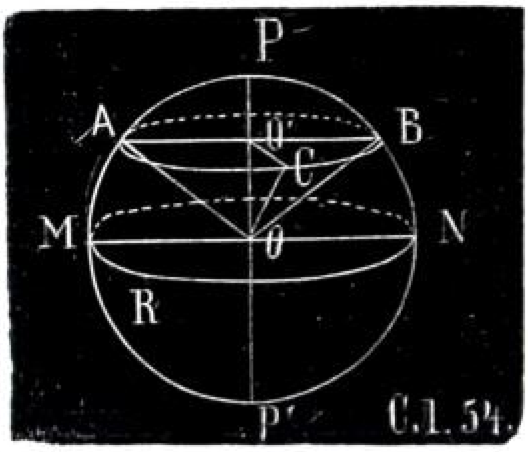
или $A > \frac{1}{2}(A + B + C - 180^\circ)$.

Лопта (сфера).

144. Карактерно својство лопте, из ког се сва остала дају извести, јесте то, да је *свака тачка њеног површја од њеног средишта једнако далеко.*

Пресек лопте са ма каквом равни јесте увек један круг.

Ово је увиђавно, кад секућа раван пролази кроз лоптино средиште, јер све тачке лоптиног површја, које се у секућој равни налазе, једнако су далеко од њеног средишта које је такође у истој равни.



Сл. 54.

Ако (сл. 54) секућа раван непролази кроз средиште лопте, узмимо нека су A, B, C три произвољне тачке пресека лопте са истом равни. Спустимо из средишта лоптиног O управну OO' на секућу раван и вежимо подножје те управне са тачкама A, B, C. Пошто је $AO = BO = CO$, јер су то полупречници лопте, $OO' = OO'$ и угао $AO'O = BO'O = CO'O = 90^{\circ}$, то су троугли $AO'O$, $BO'O$, $CO'O$ подударни и с тога $AO' = BO' = CO'$. Дакле све тачке пресека једнако су далеко од O' и потоме је пресек круг са средиштем O'. Полупречник $O'C$ тога круга мањи је од лоптиног полупречника.

Ако ставимо $OC = R$, $O'C = r$, $OO' = d$, то је

$$r^2 = R^2 - d^2,$$

одакле сљедује, да је $r < R$, докле је год d од нуле различно; r је тим мање, што је год d веће и обратно тим веће, што је год d мање, а то ће рећи: што је год даље од средишта лопте секућа раван, тим је мањи круг, који се добија као пресек, напротив што је год ближе средишту иста раван, тим је већи круг, а највећи кад секућа раван пролази кроз средиште лопте, у ком је случају $d = 0$, дакле полупречник круга, који се тада појављује као пресек, једнак полупречнику лопте. Кад је $d = R$, дакле кад раван пролази кроз крајну тачку P полупречника OP, који на њој управно стоји, круг се своди на тачку P; у том дакле случају раван несече већ дира лопту у тачки P и зове се *додирна раван* лопте

Из реченога сљедује, да полупречник повучен ка додирној тачци мора на додирној равни управно стојати и обратно.

Свака раван, која кроз средиште лопте пролази, сече исту као што мало час видесмо по једном кругу, којег је полупречник једнак полупречнику лопте; такви кругови на лопти зову се *велики кругови* лопте. Равни, које непролазе кроз средиште лопте, секу је по круговима, којих су полупречници мањи од лоптиног полупречника. Такви кругови зову се *мали кругови* лопте.

Кроз две тачке на површју лопте може се увек повући један велики круг. Треба само повући једну раван кроз средиште лопте и две дане тачке. Ако две дане тачке нису на крајевима једног и истог пречника лопте, биће једно разрешење; у противном случају биће их бесконачно много.

Сваки велики круг полови лопту и њено површје.

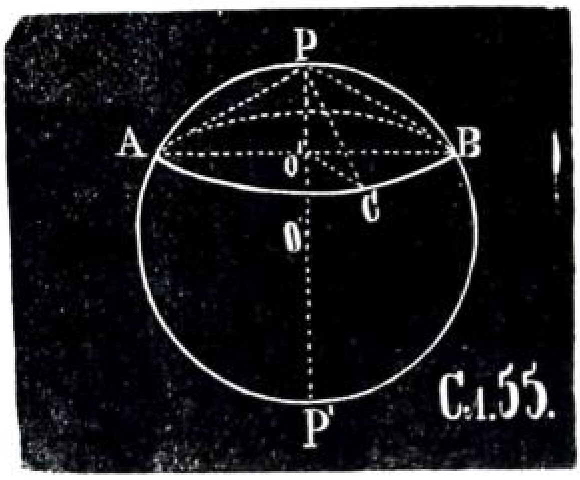
Јер ако је (сл. 54) *MNR* највећи круг и ми доњи комад лопте окренемо и метнемо на горњи, круг *MNR* доњег комада поклопиће круг *MNR* горњег, а поклопиће се и површја тих комада, јер су све тачке тих површја од *O* једнако далеко.

Два велика круга полове се узајамно. Јер равни тих кругова пролазе кроз средиште лопте и секу се по једној правој, која је у исти мах и пречник лопте и пречник тих кругова.

145. Крајне тачке једног лоптиног пречника, који је управно повучен на раван једног њеног круга, зову се *полови* тога круга. Тако су (сл. 55) P и P' полови круга ABC. Два круга, којих су равни паралелне имају исте полове.

Све тачке једног лоптиног круга једнако су далеко од његових полова.

Јер ако је (слика 55.) $A\,B\,C$ један круг на лопти и PP' пречник лопте, који на његовој равни управно стоји, и који због тога кроз његово средиште пролазити мора, биће због $AO' = BO' = CO'$, $PO' = PO'$ и $AO'P = BO'P = CO'P = 90°$ троугли $AO'P$, $BO'P$,



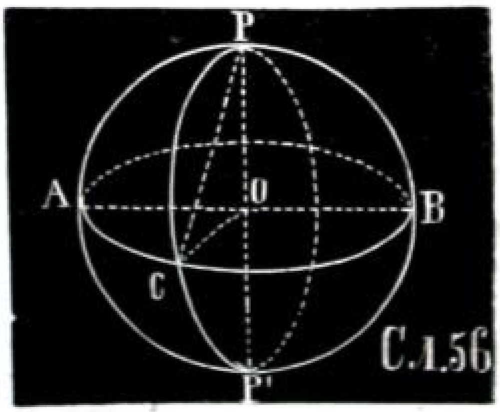
Сл.55.

$CO'P$ подударни и зато $AP = BP = CP$.

Ово својство полова важно је зато, што се на основу истог могу на лопти цртати кругови онако исто као и у каквој равни. На то служи један шестар са савијеним крацима, који се зове *сферни шестар*. При употреби тога шестара даје му се отвор једнак отстојању пола од једне тачке круга, који се жели описати; врх једног шестаровог крака меће се на изабрати пол и други врх онда описује захтевани круг. И доиста ако из једног произвољног положаја крећућег се шестаровог врха повучемо једну раван управно на пречник лопте, који пролази кроз непокретни врх, добићемо један круг, чије ће *полно отстојање* — т. ј. отстојање сваке његове тачке од пола — бити једнако шестаровом отвору; тај ће круг дакле поклопити описану криву.

Полно отстојање једног лоптиног круга јесте, као што мало час рекосмо, отстојање његовог пола од ма које његове тачке. Од два пола једног лоптиног круга узима се у обзир обично само онај, који је ближи његовој равни, који је то јест с њиме на истој лоптиној половини.

Да би на површју лопте могли описивати лукове великих кругова, треба само знати, колико је полно отстојање једног великог круга. Ако је (сл. 56) P пол великом кругу ABC, угао POC биће прав; уосталом раван POC сече лопту по великом кругу PCP', у коме је угао POC средишни угао: лук PC једнак је дакле четврти великог круга PCP'. Потоме *полно отстојање*



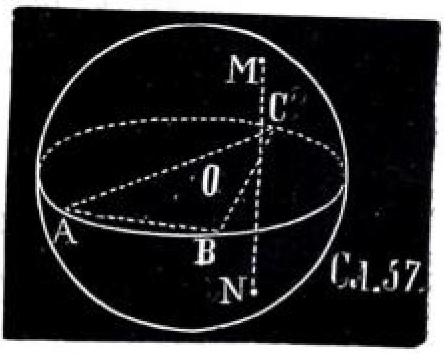
Сл.56

ње једног великог круга једнако је тетиву његове четврти.

Лако је увидити, да *равни двају великих кругова стоје управно једна на другој, кад један од њих пролази кроз пол другога и обратно*, а тако исто да *се два велика круга морају сећи у полу трећег неког круга, кад њихове равни стоје управно на равни тога трећег круга и обратно;* и најзад да је *велики један лук између великог једног круга и његовог пола једнак 90°.*

Да би велике луке могли на лопти цртати, нужно је знати, рекосмо мало час, тетиво четврти великог круга; то ће тетиво бити познато, ако је познат полупречник великога круга то ће рећи лопте. Треба дакле знати наћи полупречник лопте.

146. *Наћи конструкцијом у равни полупречник дане лопте.*



Сл. 57.

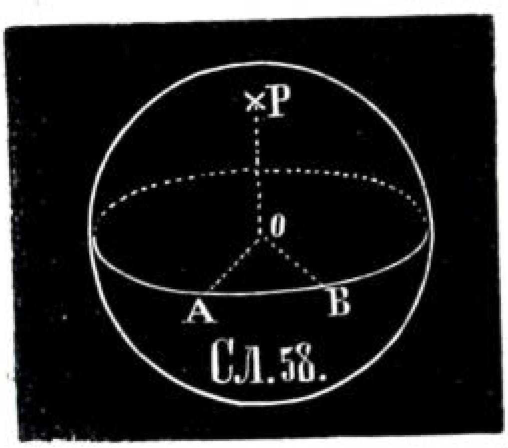
Нека су (сл. 57) M, N две ма које тачке на површју лопте. Из сваке од њих као пола са полним отстојањем, које је веће од половине великог лука, који тачке M и N везује, опишимо два лука; они ће се сећи у једној тачки A, која је од M и N једнако далеко. Нађимо на исти начин још две тачке B и C, које су од M и N једнако далеко. Пошто су тачке A, B, C од тачака M, N једнако удаљене, то раван, која кроз њих пролази, стоји управно на тетиву MN у његовој средини, и јесте геометријско место свију тачака, које су од тачака M, N једнако удаљене, она дакле пролази кроз средиште лопте и сече ју по једном великом кругу у коме се тачке A, B, C морају налазити.

Ако растојања AB, AC, BC измеримо, и у једној равни начинимо троугао, коме су та три отстојања стране, круг око тога троугла описан биће очевидно једнак великом кругу лопте и његов полупречник биће тражени полупречник лопте.

147. Кад је полупречник лопте једном познат, могу се лако решити сљедећи задатци:

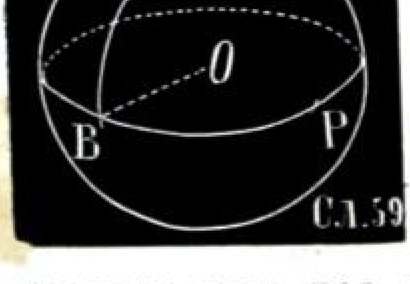
а) Кроз две дане тачке на лопти повући један велики круг.

Зарад тога треба само из даних тачака A, B (сл. 58) као полова описати два велика лука (№ 146); они ће се сећи у тачки P, која је пол траженом великом кругу. Јер пошто су угли POA, POB прави, то права OP повучена из средишта лопте ка тачки P стоји управно на равни AOB. P је дакле пол великом кругу, који постаје из пресецања те равни са лоптом. Ако су тачке A, B на крајевима једног и истог лоптиног пречника, велики луци описани из тих тачака као полова, лежаће у једном и истом великом кругу, и свака тачка овога може се узети као пол траженог круга и потоме ће задатак имати небројено много разрешења.



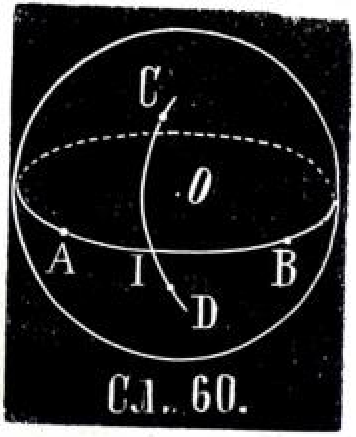
б) Кроз једну тачку на лопти повући један велики круг управно на други дани,

Из дане тачке A (сл. 59) као пола опишимо један велики круг, који дани велики круг сече у тачки P. Из тачке P као пола опишимо један велики лук AB, који ће морати пролазити кроз A и осим тога стојати управно на великом кругу OB, јер два велика круга стоје управно један на другоме (№ 145), кад један од њих пролази кроз пол другога.



в) Преполовити један велики лук.

Нађимо (№ 146) на лопти две тачке C, D (сл. 60) које су од крајева A, B даног великог лука једнако удаљене и повуцимо кроз њих један велики круг. Раван тога круга јесте геометријско место тачака, које су од A и B једнако далеко; тачка I, где он пресеца лук AB, јесте дакле средина тога лука.

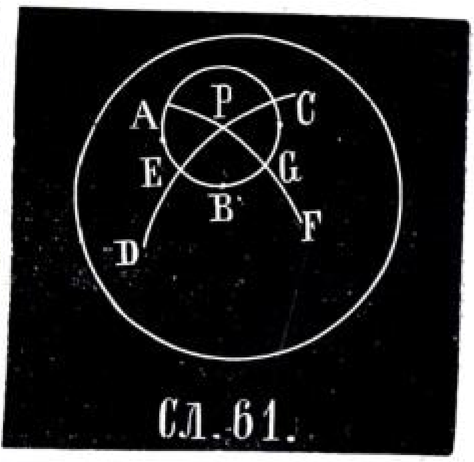


Сл. 60.

Велики круг CD полови и све остале кроз A и B пролазеће луке, јер сви ти луци имају заједничко тетиво AB, на коме раван великог круга управно стоји и осим тога га полови.

г) Кроз три тачке на лопти повући један мали круг.

Нека су (сл. 61) A, B, C три дане тачке; повуцимо велики лук DE управно кроз средину лука AB, и велики лук FG управно кроз средину лука BC. Та два велика лука секу се у тачки P; пошто је ова пресек двају великих кругова, који на тетивима AB, BC па дакле и на равни ABC управно стоје, то је она крај пречника, који на равни ABC управно стоји, дакле пол круга ABC. Да би дакле кроз три дане тачке описали мали један круг, треба само из тачке P као пола и са полним отстојањем PA као полупречником описати један круг.



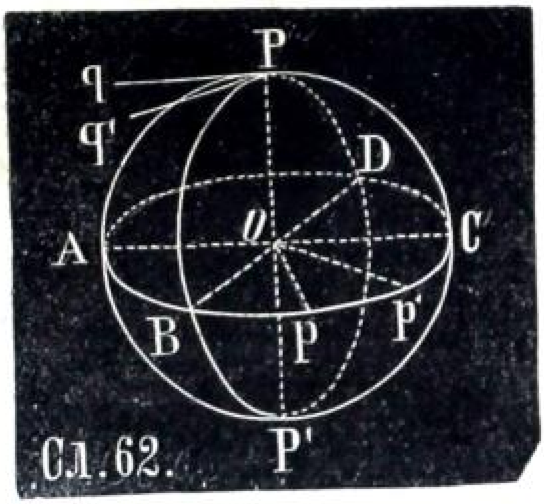
Сл. 61.

Као што се види овај се задатак своди на то, да се нађе пол малом кругу ABC.

148. *Углом двају великих лукова* зове се угао њихових равни; велики луци зову се *краци* угла а њихов пресек *теме*.

Углу двају великих лукова служи као мера велики лук, који је, из његовог темена као пола, описан између његових кракова.

Посматрајмо угао великих лукова PAP', PBP' (сл. 62). Из темена P тога угла као пола опишимо велики лук AB. Пошто је сваки од лукова PA, PB једнак четврти великог круга, то су угли POA, POB прави, дакле је угао AOB угао равни великих лукова PAP', PBP' па дакле и самих тих лукова; али углу AOB служи као мера лук AB.



Сл. 62.

Ако у тачки P и у равнима великих лукова PAP', PBP' повучемо на PP' управне Pq, Pq' које су дирке тих лукова у тачки P, то је угао qPq' такође угао равни поменутих лукова, па дакле и самих тих лукова.

Ако на великом кругу ABC, коме лук AB припада, узмемо $Ap = 90^\circ$ и $Bp' = 90^\circ$, лук pp' биће једнак луку AB. Но p је пол луку PA, p' пол луку PB, и потоме се може такође рећи, да *углу APB служи као мера велики лук, који везује полове његових кракова.*

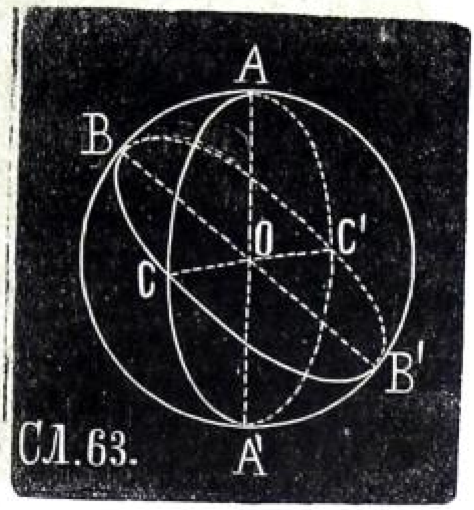
Лако је увидити, да су упоредни угли ABP и PBC суплементи а унакрстни APB и CPD једнаки.

Сферни троугао.

149. Сферни троугао, рекли смо већ, да се зове троугао, који постаје на лопти пресецањем трију великих кругова; сферни троугао је дакле један део лоптиног површја ограничен трима великим луцима.

Исти луци узети у границама њихових пресека зову се *стране*, њихови пресеци *темена*, а угли, које они праве *угли* сфернога троугла.

Ако (сл. 63) оштрице тространог рогља $OABC$, који даном сферном троуглу ABC одговара, преко његовог темена O продужимо, добићемо нов једанространи рогаљ $OA'B'C'$, који је са рогљем $OABC$ симетричан и коме на лопти одговара сферни троугао $A'B'C'$. Троугли ABC $A'B'C'$ имају све комаде једнаке али на противан начин поређане и зову се *симетрични* сферни троугли. Два симетрична сферна троугла нису подударни, то јест немогу се поклопити, — јер се њима одговарајућиространи рогљи немогу поклопити — осим у случају кад су они равнокраки.



Сл. 63.

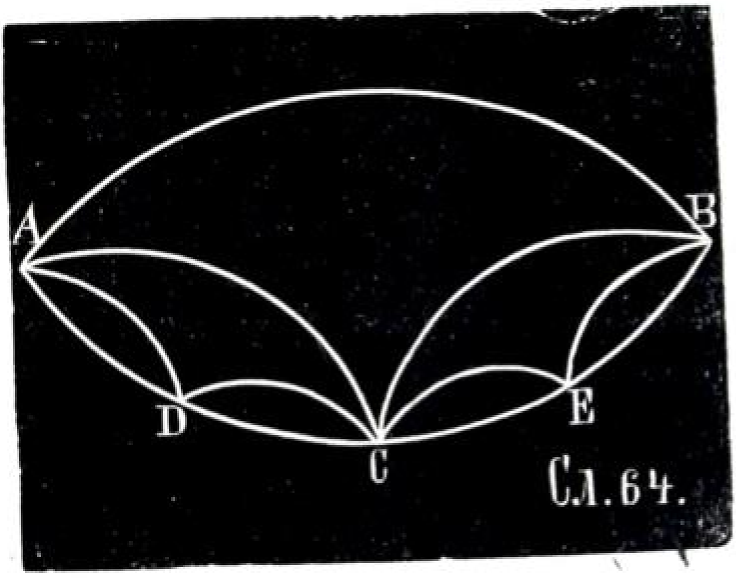
150. *У сваком сферном троуглу једна страна мања је од збира осталих двеју; збир свих трију страна мањи је од* 360° *то јест од једног великог круга.*

Сферном троуглу ABC одговара (сл. 63) тространи телесни рогаљ $OABC$, коме је теме у средишту лопте. Оштрични и телесни угли тога рогља једнаки су односно странама и углима сфернога троугла.

Пошто је оштрични угао AOB мањи од збира оштричних углова BOC, AOC, то је и лук AB мањи од збира лукова BC, AC,. Пошто је даље збир оштричних углова AOB, AOC, BOC мањи од 360°, то је и збир лукова AB, AC, BC мањи од 360° или једног великог круга.

На основу ове теореме може се доказати, *да је велики лук AB* — узимајући да је он мањи од 180° — *који* *две тачке A и B на лопти везује, најкраћи пут од A до B.*

Узмимо (сл. 64) нека је AB велики лук а $ADCEB$ ма каква друга линија. Узмимо тачку C на линији $ADCEB$ и вежимо је средством великих лукова са тачкама A, B.



Сл. 64.

Из троугла ABC сљедује

$$AB < AC + AB.$$

Узмимо опет на линији $ADCEB$ тачку D између A и C и тачку E између B и C, и вежимо тачку D средством великих лукова са тачкама A и C, као и тачку E са тачкама B и C. Из троуглова, које на тај начин добијамо сљедује

$$AC < AD + DC \quad \text{и} \quad BC < CE + EB,$$

одакле сљедује даље

$$AC + BC < AD + DC + CE + EB,$$

дакле тим пре

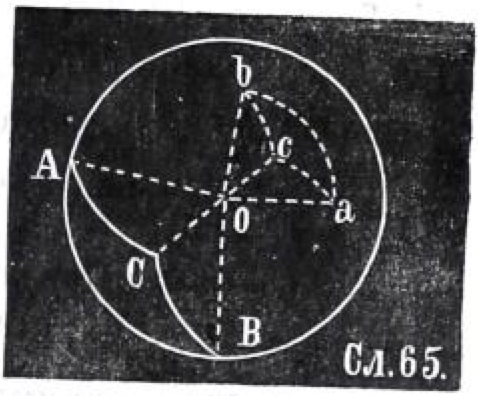
$$AB < AD + DC + CE + EB.$$

Продужавајући овако и даље добијаћемо све дуже и дуже полигоналне линије, којима ће крива линија $ADCEB$ бити граница. Иста крива већа је дакле од великог лука AB.

Ако је лук $AB = 180°$, у ком су случају тачке A, B на супротним крајевима једног и истог пречника, онда има бесконачно много најкраћих путова од A до B; сви ти најкраћи путови јесу половине великих кругова, који се могу провући кроз крајне тачке једног и истог лоптиног пречника.

У № 145 казалисмо, да је полно отстојање великог круга једнако тетиву његове четврти. То стоји, кад се отстојање рачуна по правој линији; ако ли се пак отстојање рачуна на површју лопте, *онда је полно отстојање великог круга једнако његовој четврти.* Уопште полно отстојање свакога круга на лопти, рачунато на површју лопте, јесте велики лук, који везује његов пол са ма којом његовом тачком, и зове се често *сферни полупречник* круга.

151. Нека је (сл. 65) ABC један сферни троугао и $OABC$ њему одговарајући тространи рогаљ. Ако у темену O тога рогља подигнемо праве Oc, Ob, Oa управно на стране AOB, AOC, BOC, добићемо нов један тространи рогаљ $Oabc$, који је дачоме суплементан и коме на лопти одговара троугао abc. Сферни троугли ABC, abc, који одговарају тространим рогљевима $OABC$, $Oabc$, зову се такође *суплементни сферни троугли,* јер пошто су њихове стране једнаке оштричним а њихови угли једнаки телесним углима одговарајућих рогљева, то они имају то својство, да *су стране једнога суплементи углима другога.* Ако су дакле A, B, C угли, а a, b, c стране једног сферног троугла, онда су $180^\circ - A$, $180^\circ - B$, $180^\circ - C$ стране а $180^\circ - a$, $180^\circ - b$, $180^\circ - c$ угли суплементног троугла.



Сл. 65.

Суплементни сферни троугли ABC, abc имају још и то интересно својство, *да су темена једнога полови странама другога.* И доиста, пошто је права Oa управна на равни

BOC, тачка *a* јесте пол луку *BC*. Исто су тако темена *b* и *c* полови луцима *AC* и *AB*. Обратно, пошто је полно отстојање *bA*, ако га рачунамо на површју лопте, једнако четврти великога круга, зато што је тачка *b* пол луку *AC* и пошто је полно отстојање *cA* једнако пређашњем *bA*, зато што је *c* пол луку *AB*, тачка *A* јесте пол луку *bc*. Исто су тако темена *B* и *C* полови луцима *ac* и *ab*. На основу овог својства може се један од два суплементна троугла помоћу другог описати; зарад тога треба само из темена једнога троугла као полова описати три велика лука. Због тог њиховог својства зову се суплементни троугли и *полни* троугли.

152. Пошто су стране сферног троугла једнаке оштричним а његови угли једнаки телесним углима одговарајућег тространог рогља, то можемо сљедећа својства сферних троуглова просто наговестити упућујући само на слична својства тространих рогљева:

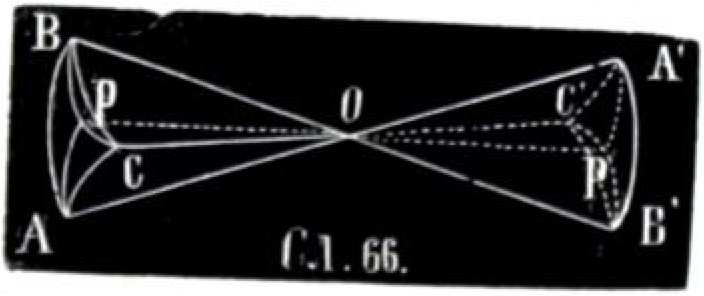
У сваком сферном троуглу збир углова мањи је од 540° *а већи од* 180°; *разлика, која постаје, кад се од збира двеју страна одузме трећа, лежи између* + 180° и — 180°; *сваки угао сфернога троугла већи је од* $\frac{1}{2}$ ε, где ε значи оно, за колико је збир углова сфернога троугла већи од 180°.

У сваком равнокраком сферном троуглу насирам једнаких страна леже једнаки угли, и обратно насирам једнаких углова једнаке стране. Одатле сљедује да, кад је троугао *равностран*, то јест кад су му све три стране једнаке, и његови угли морају бити једнаки и обратно.

Велики лук, који полови угао насирам основице једног равнокраког троугла, полови и основицу и стоји на њој управно; и обратно велики лук, који је кроз *средину основице равнокраког троугла управно на њу повучен, пролази кроз теме супротнога угла и полови исти.*

Кад је један угао сфернога троугла $= 90^{\circ}$ он се зове *правоугао*; страна наспрам правог угла зове се *ипотенуза* а остале две *катете*. Угли наспрам катета, оштри или тупи зову се *коси* угли. *Ако су два угла сфернога троугла* $= 90^{\circ}$, *то је исто случај и са супротним странама; ако су сва три угла* $= 90^{\circ}$, *то је исто случај и са трима странама, и сферни троугао јесте тада осми део лоптине површине.*

153. *Два симетрична сферна троугла јесу једнаки и ако се немогу поклопити.*

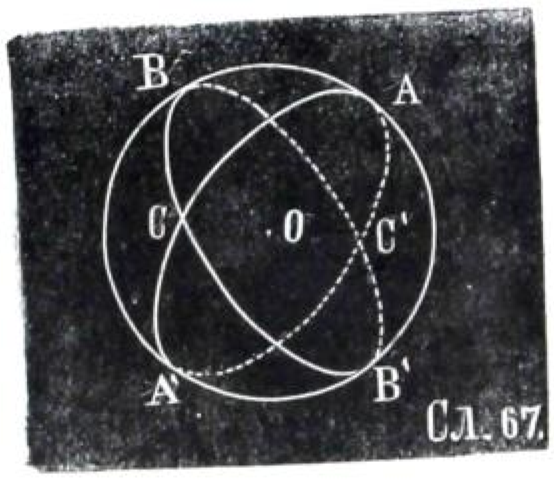


Сл. 66.

Нека су (сл. 66) ABC, $A'B'C'$ два симетрична сферна троугла и P пол око троугла ABC описаног круга. Продужимо PO преко O до лоптиног површја и нека је P' други крај добивеног пречника PP'. Вежимо срèдством великих лукова тачку P са теменима троугла ABC а тако исто и P' са теменима троугла $A'B'C'$. Луци PA, PB, PC једнаки су (№ 145), и потоме тространи рогљеви $OAPB$, $OAPC$, $OBPC$ равнокраки. То ће исто бити случај и са њима симетричним рогљевима $O'A'P'B'$, $OA'P'C'$, $OB'P'C'$, који ће се с тога са првима моћи поклопити и то $OA'P'B'$ са $OAPB$, $OA'P'C'$ са $OAPC$, $OB'P'C'$ са $OBPC$. Одатле сљедује, да су сферни троугли APB и $A'P'B'$, APC и $A'P'C'$ BPC и $B'P'C'$ подударни, због чега троугао ABC, који је једнак збиру троуглова APB, APC, BPC мора бити једнак троуглу $A'B'C'$, који је једнак збиру троуглова $A'P'B'$, $A'P'C'$, $B'P'C'$.

Пошто су троугли $A'P'B'$, $A'P'C'$, $B'P'C'$ такође равнокраки, то је P' пол око троугла $A'B'C'$ описаног малог круга.

Ми смо претпоставили, да се пол P налази у троуглу ABC; ако би се пол P претпоставио ван троугла, начин би доказивања остао исти, само што би у том случају троугао претстављао разлику место збира.



Сл. 67.

154. Нека је (сл. 67) ABC сферни троугао, коме се тражи површина. Ако стране тога троугла продужимо дотле, докле се исте у тачкама A', B', C' још једном непресеку добићемо на лопти осам троуглова, од којих су четири на горњој а четири на доњој половини њеној. Троугли ABC $A'BC$ чине скупа једну кришку ограничену полукрузима ABA', ACA'; угао те кришке јесте угао A данога троугла. На исти начин троугли ABC, $AB'C$ чине скупа једну кришку ограничену полукрузима BAB', BCB'; угао те кришке јесте угао B данога троугла. Пошто је троугао $A'B'C$ једнак троуглу ABC', који му је симетричан, то су троугли ABC, $A'B'C$ скупа узети једнаки кришки ограниченој полукрузима CAC', CBC'; угао те кришке јесте угао C данога троугла. Потоме можемо написати:

$$ABC + A'BC = kp\,.\,A,$$

$$ABC + AB'C = kp\,.\,B,$$

$$ABC + A'B'C = kp\,.\,C.$$

Ако ове једначине саберемо узимајући притом на ум, да је размера једне кришке наспрам површине целе лопте једнака размери кришкиног угла наспрам 360°, и да је даље

$$ABC + A'BC + AB'C + A'B'C = 2r^2\pi$$

добићемо

$$2\,ABC + 2\,r^2\pi = 4\,r^2\pi\left(\frac{A+B+C}{360}\right)$$

или

$$ABC = r^2\pi\left(\frac{A+B+C-180}{180}\right)$$

$$= \frac{r^2\pi}{2}\left(\frac{A+B+C-180}{90}\right),$$

одакле се види, *да је размера површине сфернога троугла наспрам осмог дела лоптине површине једнака размери вишка његових углова преко 180° наспрам једног правог угла.* Тај вишак зове се *сферни сувишак* или *сферни ексцес.* Ако се исти означи са ε, то горњи образац изгледа простије овако:

$$1)\qquad ABC = \frac{r^2\pi\,\varepsilon}{180} = \frac{r^2\pi}{2}\,\frac{\varepsilon}{90}\,.$$

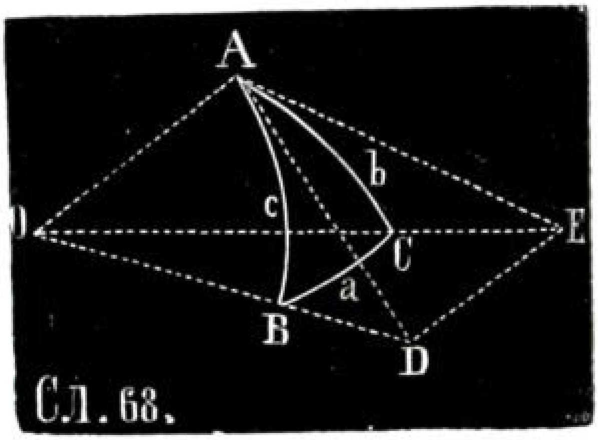
Ако се дакле осмина лоптине површине узме за јединицу површина а прав угао за јединицу углова, површина сферног троугла и сферни сувишак биће изражени једним и истим бројем, или као што се каже *сферни сувишак биће тада мера сферноме троуглу.*

Ако се полупречник лопте узме за јединицу, то је

$$2)\qquad ABC = \frac{\pi\,\varepsilon}{180}\,;$$

но $\frac{\pi\,\varepsilon}{180}$ јесте сферни сувишак изражен у деловима полупречника, и потоме се може такође казати, *да, кад је полупречник лопте узет за јединицу, површина сфернога* *троугла јесте једнака сферном сувишку.* Ако је полупречник лопте $= r$, то треба, као што се из обрасца 1) види, помножити сферни сувишак још са r^2.

Односи између страна и углова сфернога троугла.



Сл. 68.

155. *Односи између три стране и једног угла.* — Нека је ABC (сл. 68) један сферни троугао и O средиште лопте, на којој се он налази; ми ћемо претпоставити, да су стране b, c посебице мање од 90°. Вежимо темена троугла ABC са средиштем O и повуцимо на стране AB, AC угла A дирке AD, AE, које ће сећи продужене полупречнике OB, OC у тачкама D, E. Узимајући полупречник за јединицу имаћемо

$$AD = tg\, c,\ AE = tg\, b,\ OD = \frac{1}{\cos c},\ OE = \frac{1}{\cos b}.$$

Осим тога угао DAE једнак је углу A сфернога троугла, а страна a мера је углу DOE.

Из троуглова DAE, DOE добијамо

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2\, AD.\, AE \cos DAE,$$

$$\overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2\, OD.\, OE \cos DOE.$$

Из ових једначина следује

$$2\, OD.\, OE \cos DOE = (\overline{OD}^2 - \overline{AD}^2) + (\overline{OE}^2 - \overline{AE}^2) + 2\, AD.\, AE.\, \cos DAE,$$

или $$\frac{\cos a}{\cos b \cos c} = 1 + tg\, b\, tg\, c \cos A,$$

или најзад множећи ову једначину са $\cos b \cos c$

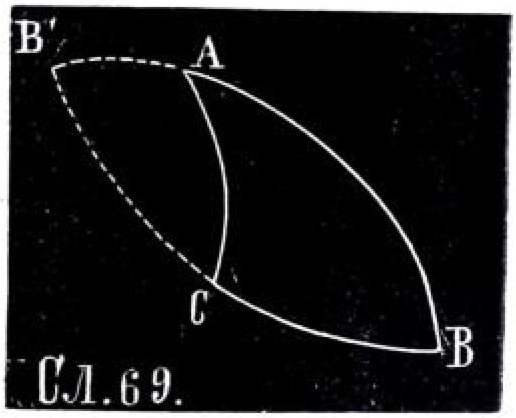
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

То је тражени однос између угла A и три стране.

156. При извођењу последњег обрасца ми смо претпоставили, да су стране b, c мање од 90°, но лако је доказати, да исти образац вреди уопште.

Претпоставимо (сл. 69) најпре $c > 90^\circ$ и $b < 90^\circ$. Ако стране a, c продужимо, докле се исте у тачки B' још једанпут непресеку и ставимо $AB' = c'$, $CB' = a'$, троугао $AB'C$ даће нам

$$\cos a' = \cos b \cos c' + \sin b \sin c' \cos B'AC$$



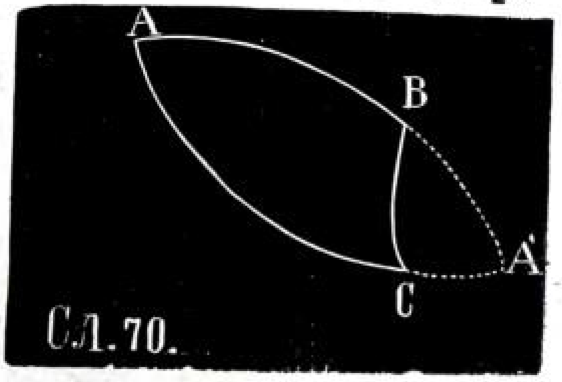
Сл. 69.

јер су стране b, c' мање од 90°. Замењујући у овој једначини a', c', $B'AC$ њиховим вредностима $180^\circ - a$, $180^\circ - c$, $180^\circ - A$ и множећи је са -1 добијамо

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

а то је образац нађен У № 155.

Претпоставимо сад (сл. 70) $c > 90^\circ$ и $b > 90^\circ$ и продужимо стране b, c дотле, докле се оне у тачки A' још једанпут непресеку; ако ставимо $A'C = b'$, $A'B = c'$, из троугла $A'BC$ добићемо



Сл. 70.

$$\cos a = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A',$$

јер су стране b', c' мање од 90°. Замењујући сад b', c', A' њиховим вредностима $180^\circ - b$, $180^\circ - c$, A добијамо опет горњи образац

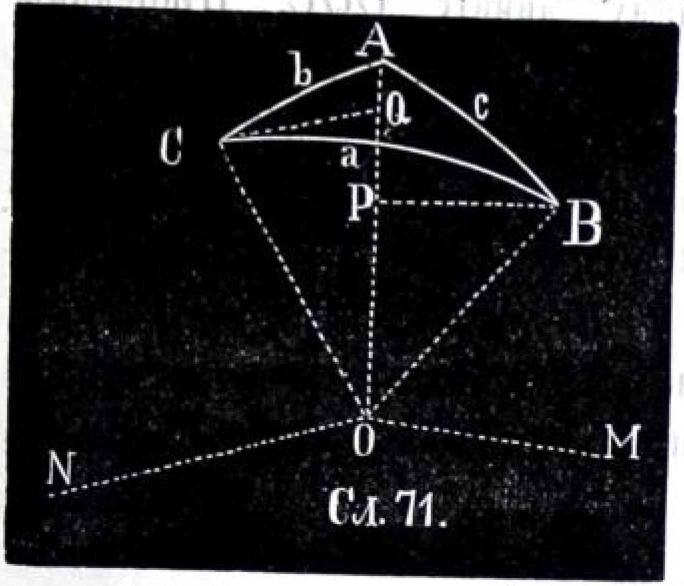
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Најзад пошто овај образац вреди, па ма колико мали били комплементи лукова b, c, то одатле закључујемо, да он вреди и онда, кад је једна од страна b, c или и кад су обадве $= 90^\circ$.

Из нађеног обрасца добијају се још друга два слична простом изменом слова; и тако имамо слеђеће једначине

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{aligned} \right.$$

Ови обрасци јесу основни обрасци сферне тригонометрије, одакле се сви остали дају извести; јер лако је увидити да између страна и углова сфернога троугла неможе бити никаквог другог односа, који би од горњих био независан, који дакле из њих неби на ма какав начин слеђовао. И доиста кад би између шест комада сфернога троугла било каквог односа, који би од горњих био независан, ми би избацивши из истог помоћу једначина 1) угле A, B, C добили једну неидентичну једначину између три стране сферного троугла, што би значило, да се један сферни троугао може разрешити и онда, кад су од његових шест комада само два позната, а то очевидно нестоји. Али из образаца 1) може се извести цео један низ нових образаца, што ћемо ми у идућим №-ма и учинити; но пре но што на тај посао пређемо, показаћемо, како се обрасци 1) изводе помоћу теорије пројекција.



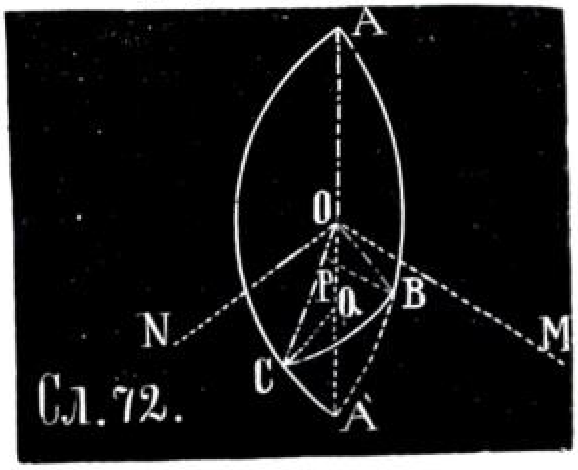
Сл. 71.

157. Нека је (сл. 71) ABC један сферни троугао и $OABC$ одговарајући тространи рогаљ. Повуцимо у равни AOB и са стране оштрице OB праву OM управно на OA; повуцимо такође у равни AOC и са стране оштрице OC праву ON управно на OA. Раван MON стоји управно на оштрици OA, јер ова стоји управно на двема правима, које се у истој равни налазе; осим тога угао MON једнак је углу равни AOB, AOC, дакле углу A сфернога троугла ABC. Са тачке B спустимо BP управно на OA; синус лука $AB = c$ јесте дужина BP узета са знаком $+$, јер је лук $c < 180^\circ$, а косинус дужина OP узета са знаком $+$ или $-$, како је кад иста на правој OA или њеном продужењу. Спустимо такође са тачке C праву CQ управно на OA, па ћемо имати $\sin b = CQ$, $\cos b = \pm OQ$. Пројекција праве OB у правој OC једнака је збиру пројекција — у правој OC — двеју страна испреламане линије OPB. Пројекција праве OB јесте $\cos a$. Права OA нагнута је према OC под углом b; ако је тачка P у OA, онда пројекција праве OP у правој OC јесте $OP. \cos b$ или $\cos c \cos b$, јер тада је $\cos c = + OP$. Ако ли је тачка P у продужењу OA' праве OA (сл. 72 види страну 282) пројекција праве OP јесте $OP \cos A'OC$ или $-OP \cos b$, јер је угао $A'OC$ суплеменат углу b; но тада је $\cos c = - OP$, дакле пројекција праве OP јесте $\cos c \cos b$ као и у

првом случају. Пошто је права PB паралелна са OM, њена је пројекција $PB \cos COM$ или $\sin c \cos COM$, дакле је

$$\cos a = \cos c \cos b + \sin c \cos COM.$$

Пројецирајмо сад на праву OM праву OC и испреламану линију OQC. Пројекција праве OC јесте $\cos COM$; пројекција праве OQ јесте нула, јер је њен угао са OM једнак 90°. Пошто је права QC паралелна са ON, која је према OM нагнута под углом A, то је њена пројекција $QC \cos A$ или $\sin b \cos A$ дакле је



Сл. 72.

$$\cos COM = \sin b \cos A.$$

Замењујући $\cos COM$ овом вредности у предњој једначини добијамо

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

а одатле изменом слова и остала два обрасца под 1).

158. *Односи између две стране и супротних углова.*

Прва метода. — Да би нашли један однос између страна a, b и супротних углова A, B, треба нам из једначина под 1) избацити c и C, или, пошто се C у првим двема једначинама неналази, само c из првих двеју једначина. Сабирањем и одузимањем првих двеју једначина под 1) добијамо

$$(\cos a + \cos b)(1 - \cos c) = \sin c (\sin b \cos A + a \cos B),$$

$$(\cos a - \cos b)(1 + \cos c) = \sin c (\sin b \cos A - \sin a \cos B);$$

множењем ових једначина добијамо даље

$$(\cos^2 a - \cos^2 b) \sin^2 c = \sin^2 c (\sin^2 b \cos^2 A - \sin^2 a \cos^2 B),$$

или по скраћају са $\sin^2 c$

$$\cos^2 a - \cos^2 b = \sin^2 b \cos^2 A - \sin^2 a \cos^2 B,$$

одакле

$$\sin^2 a \sin^2 B = \sin^2 b \sin^2 A\, ;$$

пошто су стране и угли троугла мањи од 180°, дакле њихови синуси положни, то изводимо одавде

$$\sin a \sin B = \sin b \sin A\, ,$$

или

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B}\, .$$

На сличан начин добијамо из прве и треће једначине под 1) или и простом изменом слова у последњем обрасцу

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C}\, .$$

По овоме имамо дакле

$$2) \qquad \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}\, ,$$

дакле *у сваком сферном троуглу синуси страна сразмерни су синусима супротних углова.*

Друга метода. — Из прве једначине под 1) сљедује

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\, ,$$

одакле

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

Пошто свршимо овде означене радње и сведемо добијамо

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

одакле

$$\frac{\sin^2 a}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c}$$

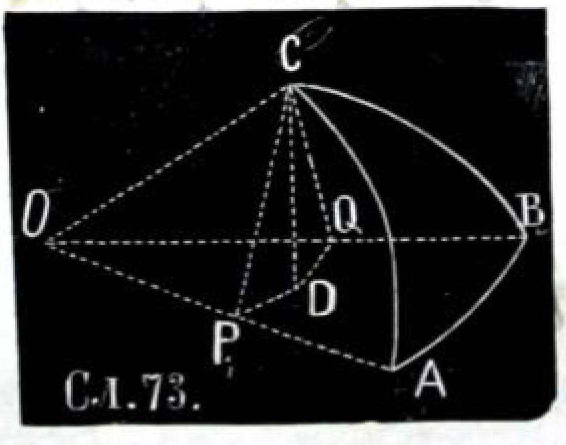
Пошто се десна страна ове једначине немења, кад се a и A измене са b и B и обратно, или са c и C и обратно, то одатле закључујемо

$$\frac{\sin^2 a}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2 b}{\sin^2 B} = \frac{\sin^2 c}{\sin^2 C},$$

или, пошто су стране и угли мањи од 180°, дакле њихови синуси положни,

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Трећа метода. — До нађених односа можемо доћи још и на сљедећи непосредан начин. Спустимо (сл. 73) са тачке C управну CD на раван AOB; од подножја те управне повуцимо у истој равни праве DP и DQ управно на OA и OB и вежимо C са P и Q. Праве CP и CQ на основу једне из стереометрије познате теореме такође су управ-



Сл. 73.

не на OA и OB, и потоме су угли APD и AQD једнаки углима A и B сфернога троугла. Но из правоуглих равних троуглова CDP, CDQ сљедује

$$CD = CP \sin A = CQ \sin B ,$$

или $$CD = \sin b \sin A = \sin a \sin B ,$$

одакле $$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} .$$

159. *Односи између пет комада сфернога троугла.*— Тражени односи између пет комада налазе се, кад се из једне ма које од једначина под 1) узме вредност косинуса, по коме је она разрешена и замени у остале две. Тако на пример ако се вредност за $\cos c$ из треће једначине замени у прву, изаћиће

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A,$$

или, ако се пренесу лево прва два члана десне стране, потом $1 - \cos^2 b$ замени са $\sin^2 b$ и скрати са $\sin b$,

$$\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C = \sin c \cos A ;$$

још пет сличних образаца могу се добити из овог и простом изменом слова; на тај начин имамо сљедећи низ образаца

$$3) \left\{ \begin{aligned} &\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C = \sin c \cos A , \\ &\cos b \sin a - \sin b \cos a \cos C = \sin c \cos B , \\ &\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A = \sin a \cos B , \\ &\cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A = \sin a \cos C , \\ &\cos c \sin a - \sin c \cos a \cos B = \sin b \cos C , \\ &\cos a \sin c - \sin a \cos c \cos B = \sin b \cos A . \end{aligned} \right.$$

Ако ставимо

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = m.$$

то је

$$\sin a = m \sin A, \quad \sin b = m \sin B, \quad \sin c = m \sin C;$$

замењујући сад $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ овим вредностима у једначинама под 3) наћићемо шест слеђећих нових образаца:

$$4) \left\{ \begin{aligned} &\cos a \sin B - \cos b \cos C \sin A = \cos A \sin C, \\ &\cos b \sin A - \cos a \cos C \sin B = \cos B \sin C, \\ &\cos b \sin C - \cos c \cos A \sin B = \cos B \sin A, \\ &\cos c \sin B - \cos b \cos A \sin C = \cos C \sin A, \\ &\cos c \sin A - \cos a \cos B \sin C = \cos C \sin B, \\ &\cos a \sin C - \cos c \cos B \sin A = \cos A \sin B, \end{aligned} \right.$$

160°. *Односи између две стране, захваћеног угла и угла насирам једне од њих.* — Један од тражених односа наћићемо, ако узмемо ма које две од једначина под 1), па из њих избацимо страну лежећу наспрам једног од оних углова, који стоје у тим једначинама. Но како се у тим двема једначинама налазе и косинус и синус речене стране, то ће се она најпростије избацити, ако се најпре избаци њен косинус, па онда помоћу образаца под 2) и њен синус.

Први део тога посла, то јест избацај косинуса стране свршен је у № 159, и зато да би нашли тражене односе, неостаје нам ништа више већ да помоћу образаца под 2) избацимо још синус, који је на десној страни свакога обрасца под 3). Тако на пример ако из прве једначине под 3) избацимо $\sin c$ заменивши га његовом вредности

$$\frac{\sin a \sin C}{\sin A},$$

која из образаца под 2) сљедује, добићемо

$$\cos a \sin b - \sin a \cos b \cos C = \frac{\sin a \sin C \cos A}{\sin A},$$

или

$$\operatorname{cotg} a \sin b - \cos b \cos C = \operatorname{cotg} A \sin C;$$

ово је један од тражених образаца, пет осталих могу се из њега добити и простом изменом слова. И тако имамо сљедећи низ образаца

$$5) \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{cotg} a \sin b - \operatorname{cotg} A \sin C = \cos b \cos C, \\ \operatorname{cotg} b \sin a - \operatorname{cotg} B \sin C = \cos a \cos C, \\ \operatorname{cotg} b \sin c - \operatorname{cotg} B \sin A = \cos c \cos A, \\ \operatorname{cotg} c \sin b - \operatorname{cotg} C \sin A = \cos b \cos A, \\ \operatorname{cotg} c \sin a - \operatorname{cotg} C \sin B = \cos a \cos B, \\ \operatorname{cotg} a \sin c - \operatorname{cotg} A \sin B = \cos c \cos B. \end{array} \right.$$

161. *Односи између једне стране и три угла.* — Тражене односе наћићемо, ако из образаца под 1) избацимо узастопце по две и две стране, јер ће по сваком таком избацају изаћи једна једначина између једне стране и три угла. Но много лакше долази се до тражених односа помоћу

образаца под 4). Тако на пример избацујући $\cos b$ из прве две једначине под 4) добијамо

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a;$$

на сличан начин или и простом изменом слова у овом обрасцу добијамо још два слична обрасца. На тај начин имамо дакле сљедећа три обрасца

$$6) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B &= -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c, \end{aligned} \right.$$

162. Три лука a, b, c описана са истим полупречником, и три телесна угла A, B, C, који су луци и угли појединце мањи од 180°, јесу комади једног сферног троугла, кад између њих постоје односи

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{aligned}$$

Ови односи могу се и овако претставити

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos (b + c) + \sin b \sin c\, (1 + \cos A), \\ \cos b &= \cos (a + c) + \sin a \sin c\, (1 + \cos B), \\ \cos c &= \cos (a + b) + \sin a \sin b\, (1 + \cos C); \end{aligned}$$

одавде сљедује

$$\cos a > \cos (b+c), \ \cos b > \cos (a+c), \ \cos c > \cos (a+b),$$

дакле

$$a < b + c, b < a + c, c < a + b, a + b + c < 360^\circ.$$

Као што се види на лопти, чији је полупречник једнак полупречнику лукова a, b, c, може се начинити сферни троугао, коме су ти луци стране.

Ако угле тога троугла означимо са A_1, B_1, C_1, имаћемо

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A_1,$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B_1,$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C_1.$$

Поређењем ових једначина са првим трима, које вреде на основу претпоставке, налазимо

$$\cos A_1 = \cos A, \cos B_1 = \cos B, \cos C_1 = \cos C,$$

или
$$A_1 = A, \quad B_1 = B, \quad C_1 = C$$

и тиме је тврђење у почетку №° оправдано.

Суплементни или полни троугли.

163. Из № 151 познато је да сваком сферном троуглу одговара други један троугао, који са првим стоји у таквом односу, да су стране једнога суплементи углима другога и темена једнога полови странама другога. Таква два троугла казали смо да се зову *суплементни* или *полни* троугли.

Најпре поменуто својство суплементних троуглова од велике је вредности како по извођење тако и по памћење образаца сферне тригонометрије. Тако на пример ако обрасце под 1) у № 156 применимо на суплементни троугао, добићемо непосредно обрасце 6) у № 161. Исто тако примењујући обрасце под 3) у № 159 на суплементни троугао добићемо обрасце под 4).

Обрасци за правоугле сферне троугле.

164. Да би добили обрасце за правоугле сферне троугле, треба претпоставити $A = 90^\circ$ у оним од досада нађених образаца, где се A налази. На тај начин добиһемо:

$$1) \qquad \cos a = \cos b \cos c;$$

$$2) \qquad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}, \qquad \sin C = \frac{\sin c}{\sin a};$$

$$3) \qquad \cos B = \frac{tg\, c}{tg\, a}, \qquad \cos C = \frac{tg\, b}{tg\, a};$$

$$4) \qquad tg\, B = \frac{tg\, b}{\sin c}, \qquad tg\, C = \frac{tg\, c}{\sin b};$$

$$5) \qquad \cos a = \cot g\, B \cot g\, C;$$

$$6) \qquad \sin B = \frac{\cos C}{\cos c}, \qquad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

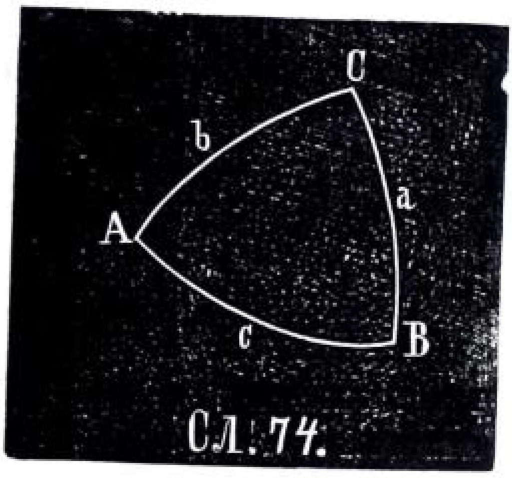
За разрешавање правоуглих сферних троуглова има, као што се види, свега шест различних образаца, који су сви удесни за логаритамски рачун.

У првом обрасцу исказан је однос између ипотенузе и катета; у другом између ипотенузе, катете и супротног угла; у трећем између ипотенузе, катете и налеглог угла; у четвртом између катета и угла наспрам једне од њих: у петом између ипотенузе и налеглих углова, и најзад у шестом између катета и супротних им углова. На тај начин ако су од пет комада a, b, c, B, C правоуглог сферног троугла ма која два позната, имамо обрасце за израчунавање осталих непознатих комада.

Да би олакшали памһење горњих образаца, приметиһемо, да се у обрасцима 2), 3), 4) појављују исте комбинације углова и страна као и у одговарајућим обрасцима равне тригонометрије; треба само још запамтити, да је синус једног угла изражен двама синусима, косинус двема тангентама а тангента једном тангентом и једним синусом.

Али има једно Непером постављено врло просто правило, помоћу којега се сваки од горњих образаца може, кад је потребан, одмах написати.

Ако прав угао нерачунамо — тако као да га и нема — онда су (сл. 74) осталих пет комада поређани тако, да се сваки од њих појављује као средњи; од остала пак четири комада два су на средњи налегла, а два су од средњег налеглим комадима одвојени. Имајући ово на уму као још и то, да се катете имају увек заменити њиним комплементима, можемо изрећи поменуто неперово правило. Оно гласи:



Сл. 74.

Косинус ма ког од пет комада правоуглог сферног троугла једнак је производу котангената налеглих, или производу синуса одвојених комада.

На пример ако се захтева један однос између катете b и углова B, C, имаћемо, пошто је B средњи комад а b, C одвојени

$$\cos B = \sin (90^\circ - b) \sin C = \cos b \sin C,$$

које је други образац под 6).

Ако се тражи однос између ипотенузе a и углова B, C, имаћемо, пошто је сад ипотенуза a средњи комад, а угли B, C налегли комади

$$\cos a = \cot g B \cot g C,$$

а то је образац под 5).

Најзад ако се тражи однос између ипотенузе и катета, имаћемо, пошто је ипотенуза средњи комад а катете одвојени комади

$$\cos a = \sin (90^\circ - b) \sin (90^\circ - c) = \cos b \cos c,$$

а то је образац под 1).

165. Обрасци нађени у № 164 дају нам повода учинити две примедбе, које су по разрешавање правоуглих сферних троуглова од велике важности.

1° Пошто су стране сферногa троугла појединце мање од 180°, дакле њини синуси положни, то из образаца под 4) у № 164 сљедује, да тангента катете и тангента супротног угла морају бити истога знака, што доказује, *да су катете и супротни им угли у исто доба мањи или већи од 90°*.

2° Из обрасца 1) видимо опет, да је $\cos a$ положан или одречан, како су кад $\cos b$ и $\cos c$ истог или противног знака, то ће рећи, *да је ипотенуза мања или већа од 90°, како су кад катете истога рода или не,* или друкчије *у сваком правоуглом сферном троуглу ипотенуза је мања од 90°, ако су обе катете мање или обе веће од 90°, а већа од 90°, ако је једна катета мања а друга већа од 90°.*

Дакле *у правоуглом сферном троуглу или су све три стране мање од 90°, или је само једна мања, а остале су две веће.*

Образац 5) даје повода сличним примедбама односно ипотенузе и косих углова, што се у осталом слаже са првом примедбом.

166. Из образаца № 164 могу се извести нови обрасци, које је често згодније употребити, и помоћу којих се непознати комади троугла налазе из њихових тангената. Из обрасца под 1) сљедује

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b};$$

замењујући ту вредност у обрасцу

$$tg \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{1 - \cos c}{1 + \cos c}}$$

добијамо

$$tg \frac{1}{2} c = \sqrt{\frac{\cos b - \cos a}{\cos b + \cos a}} = \sqrt{tg \frac{1}{2}(a+b)\, tg \frac{1}{2}(a-b)}$$

дакле образац 1) може се заменити једним од следећих

$$7) \left\{ \begin{aligned} tg \frac{1}{2} c &= \sqrt{tg \frac{1}{2}(a+b)\, tg \frac{1}{2}(a-b)}, \\ tg \frac{1}{2} b &= \sqrt{tg \frac{1}{2}(a+c)\, tg \frac{1}{2}(a-c)}. \end{aligned} \right.$$

Из првог обрасца под 2) следује

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B};$$

замењујући ово у обрасцу

$$tg\,(45^\circ + \frac{1}{2} a) = \pm \sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}}$$

добијамо

$$tg\,(45^\circ + \frac{1}{2} a) = \pm \sqrt{\frac{\sin B + \sin b}{\sin B - \sin b}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{tg\,\frac{1}{2}\,(B + b)}{tg\,\frac{1}{2}\,(B - b)}};$$

дакле се обрасци под 2) могу заменити сљедећим

$$8)\quad tg\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,a) = \pm \sqrt{\frac{tg\,\frac{1}{2}\,(B + b)}{tg\,\frac{1}{2}\,(B - b)}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{tg\,\frac{1}{2}\,(C + c)}{tg\,\frac{1}{2}\,(C - c)}}.$$

Стављајући у обрасцу

$$tg\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,B) = \pm \sqrt{\frac{1 + sin\,B}{1 - sin\,B}}$$

место $sin\,B$ његову вредност $\frac{sin\,b}{sin\,a}$ из првог обрасца под 2) налазимо

$$tg\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,B) = \pm \sqrt{\frac{sin\,a + sin\,b}{sin\,a - sin\,b}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{tg\,\frac{1}{2}\,(a+b)}{tg\,\frac{1}{2}\,(a-b)}};$$

Дакле обрасци под 2) могу се заменити сљедећим

$$9)\quad \left\{ \begin{aligned} tg\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,B) &= \pm \sqrt{\frac{tg\,\frac{1}{2}\,(a+b)}{tg\,\frac{1}{2}\,(a-b)}} \\ tg\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,C) &= \pm \sqrt{\frac{tg\,\frac{1}{2}\,(a+c)}{tg\,\frac{1}{2}\,(a-c)}}. \end{aligned} \right.$$

Стављајући у обрасцу

$$tg\,\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{1-\cos C}{1+\cos C}}$$

место $\cos C$ његову вредност $\dfrac{tg\,b}{tg\,a}$ из 3) налазимо

$$tg\,\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{tg\,a-tg\,b}{tg\,a+tg\,b}}=\sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}\,;$$

дакле се место образаца под 3) могу употребити обрасци

$$10)\quad\left\{\begin{aligned}tg\,\frac{1}{2}C&=\sqrt{\frac{\sin(a-b)}{\sin(a+b)}}\,,\\ tg\,\frac{1}{2}B&=\sqrt{\frac{\sin(a-c)}{\sin(a-c)}}\,.\end{aligned}\right.$$

Из првог обрасца под 4) сљедује

$$\sin c=\frac{tg\,b}{tg\,B}\,;$$

у осталом је $tg\,(45^\circ+\frac{1}{2}c)=\pm\sqrt{\dfrac{1+\sin c}{1-\sin c}}$;

дакле је

$$tg\,(45^\circ+\frac{1}{2}c)=\pm\sqrt{\frac{tg\,B+tg\,b}{tg\,B-tg\,b}}$$

$$=\pm\sqrt{\frac{\sin(B+b)}{\sin(B-b)}}\,;$$

место обрасца под 4) могу се дакле употребити обрасци

$$11)\quad \left\{ \begin{aligned} tg\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,c) &= \pm \sqrt{\frac{sin\,(B+b)}{sin\,(B-b)}}, \\ tg\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,b) &= \pm \sqrt{\frac{sin\,(C+c)}{sin\,(C-c)}}. \end{aligned} \right.$$

Стављајући у обрасцу

$$tg\,\frac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{1 - cos\,a}{1 + cos\,a}}$$

место *cos a* његову вредност *cotg B cotg C* из 5) налазимо

$$tg\,\frac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{sin\,B\,sin\,C - cos\,B\,cos\,C}{sin\,B\,sin\,C + cos\,B\,cos\,C}}$$

или

$$tg\,\frac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{cos\,(180^\circ - B - C)}{cos\,(B - C)}}.$$

Из обрасца под 6) слeдује

$$cos\,b = \frac{cos\,B}{sin\,C}, \qquad cos\,c = \frac{cos\,C}{sin\,B},$$

или

$$cos\,b = \frac{cos\,B}{cos\,(90^\circ - C)}, \qquad cos\,c = \frac{cos\,C}{cos\,(90^\circ - B)};$$

по замени ових вредности у обрасцима

$$tg\,\frac{1}{2}\,b = \sqrt{\frac{1 - cos\,b}{1 + cos\,b}}, \quad tg\,\frac{1}{2}\,c = \sqrt{\frac{1 - cos\,c}{1 + cos\,c}}$$

слeдује

$$13)\begin{cases} tg\,\frac{1}{2}\,b = \sqrt{tg\left(45^\circ + \frac{B-C}{2}\right)tg\left(-45^\circ + \frac{B+C}{2}\right)} \\ tg\,\frac{1}{2}\,c = \sqrt{tg\left(45^\circ - \frac{B-C}{2}\right)tg\left(-45^\circ + \frac{B+C}{2}\right)} \end{cases}$$

Мењући најзад у обрасцима

$$tg\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,C) = \sqrt{\frac{1+sin\,C}{1-sin\,C}},$$

$$tg\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,B) = \sqrt{\frac{1+sin\,B}{1-sin\,B}}$$

место $sin\,C$, $sin\,B$ њихове вредности $\frac{cos\,B}{cos\,b}$, $\frac{cos\,C}{cos\,c}$ из другог обрасца под 6) добијамо

$$14)\begin{cases} tg\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,C) = \pm\sqrt{cotg\,\frac{1}{2}\,(B+b)\,cotg\,\frac{1}{2}\,(B-b)}, \\ tg\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,B) = \pm\sqrt{cotg\,\frac{1}{2}\,(C+c)\,cotg\,\frac{1}{2}\,(C-c)}. \end{cases}$$

Обрасци за троугле, у којих је једна страна = 90°.

167. Обрасци за овакве троугле могли би се лако извести из оних за правоугле троугле, јер суплементни троугао правоуглом троуглу јесте очевидно троугао, у кога је једна страна = 90°. Но могу се исти обрасци извести исто тако лако и из општих образаца, ако у њима ставимо $a = 90^\circ$. Радећи на један или други начин добијамо десет сљедећих образаца

1) $$\cos A = -\cos B \cos C;$$

2) $$\sin b = \frac{\sin B}{\sin A}, \qquad \sin c = \frac{\sin C}{\sin A};$$

3) $$\cos b = -\frac{tg\, C}{tg\, A}, \qquad \cos c = -\frac{tg\, B}{tg\, A};$$

4) $$tg\, b = \frac{tg\, B}{\sin C}, \qquad tg\, c = \frac{tg\, C}{\sin B};$$

5) $$\cos A = -\cot g\, b \cot g\, c;$$

6) $$\sin b = \frac{\cos c}{\cos C}, \qquad \sin c = \frac{\cos b}{\cos B}.$$

Из образаца под 6) сљедује, да кад је $b \lesseqgtr 90^\circ$, тада и $B \lesseqgtr 90^\circ$, кад је $c \lesseqgtr 90^\circ$ тада и $C \lesseqgtr 90^\circ$ бити мора.

Обрасци удешени за логаритамски рачун.

168 Обрасци у №$^{\text{ма}}$ 156, 159, 160 и 161 нису удесни за логаритамски рачун; али се из њих могу извести нови обрасци, који немају те мане.

Први од образаца под 1) у № 156 даје

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c};$$

ако овом вредности заменимо $\cos A$ у обрасцима

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}, \quad \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}},$$

добићемо

$$sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{cos\,b\;cos\,c+sin\,b\;sin\,c-cos\,a}{2\,sin\,b\;sin\,c}}$$

$$=\sqrt{\frac{cos\,(b-c)-cos\,a}{2\,sin\,b\;\;sin\,c}}$$

$$=\sqrt{\frac{sin\,\frac{a-b+c}{2}\;sin\,\frac{a+b-c}{2}}{sin\,b\;\;sin\,c}};$$

$$cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{cos\,a-cos\,b\;cos\,c+sin\,b\;sin\,c}{2\,sin\,b\;\;sin\,c}}$$

$$=\sqrt{\frac{cos\,a-cos\,(b+c)}{2\,sin\,b\;sin\,c}}$$

$$=\sqrt{\frac{sin\,\frac{a+b+c}{2}\;sin\,\frac{b+c-a}{2}}{sin\,b\;sin\,c}}.$$

На сличан начин или и простом изменом слова у двама нађеним обрасцима наћиђемо сличне изразе за синусе и косинусе углова $\frac{1}{2}B$ и $\frac{1}{2}C$. Стављајући ради краткоће

$$a+b+c=2\,s,$$

дакле

$$b+c-a=2\,(s-a),\quad a-b+c=2\,(s-b),$$

$$a+b-c=2\,(s-c),$$

добијамо сљедеће две гомиле образаца

$$1)\quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}, \\ \sin\frac{1}{2}B=\sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}, \\ \sin\frac{1}{2}C=\sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}; \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} \cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\dfrac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}, \\ \cos\frac{1}{2}B=\sqrt{\dfrac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}, \\ \cos\frac{1}{2}C=\sqrt{\dfrac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}; \end{cases}$$

Из образаца 1) и 2) изводимо деобом још и сљедеће обрасце

$$3)\quad \begin{cases} tg\frac{1}{2}A=\sqrt{\dfrac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}, \\ tg\frac{1}{2}B=\sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-b)}}, \\ tg\frac{1}{2}C=\sqrt{\dfrac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\sin(s-c)}}. \end{cases}$$

Ови обрасци под 1), 2), 3) слични су онима под 3), 4), 5) у № 73 равне тригонометрије. Пошто су угли *A*, *B*, *C* мањи од 180°, дакле $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ појединце мањи од 90° то се у нађеним обрасцима корени знаци имају узети само са знаком $+$. Пошто су даље на основу №° 150 разлике

$s - a, s - b, s - c$ увек положне и осим тога појединце као и s мање од 180°, то су количине под кореним знацима све положне.

Ако у обрасцима

$$sin\,A = 2\,sin\,\frac{1}{2}\,A\,cos\,\frac{1}{2}\,A, \quad sin\,B = 2\,sin\,\frac{1}{2}\,B\,cos\,\frac{1}{2}\,B,$$

$$sin\,C = 2\,sin\,\frac{1}{2}\,C\,cos\,\frac{1}{2}\,C$$

заменимо $sin\,\frac{1}{2}\,A,\ cos\,\frac{1}{2}\,A,\ sin\,\frac{1}{2}\,B,\ cos\,\frac{1}{2}\,B,\ sin\,\frac{1}{2}\,C$ $cos\,\frac{1}{2}\,C$ њиховим вредностима под 1) и 2) у № 168, наћиемо сљедећа три обрасца

$$4)\ \begin{cases} sin\,A = \dfrac{2}{sin\,b\,sin\,c}\sqrt{sin\,s\ sin\,(s\text{-}a)\,sin\,(s\text{-}b)\,sin\,(s\text{-}c)}\,, \\ sin\,B = \dfrac{2}{sin\,a\,sin\,c}\sqrt{sin\,s\ sin\,(s\text{-}a)\,sin\,(s\text{-}b)\,sin\,(s\text{-}c)}\,, \\ sin\,C = \dfrac{2}{sin\,a\,sin\,b}\sqrt{sin\,s\ sin\,(s\text{-}a)\,sin\,(s\text{-}b)\,sin\,(s\text{-}c)}. \end{cases}$$

Деобом ових једначина добијају се обрасци под 2) у № 158.

169. Обрасци №е 168 вреде за сваки сферни троугао па дакле и за онај, који је даноме суплементан. Угли тога суплементнога троугла јесу $180^\circ - a$, $180^\circ - b$, $180^\circ - c$, а стране $180^\circ - A$, $180^\circ - B$, $180^\circ - C$; половина збира његових страна једнака је дакле

$180^\circ - \frac{1}{2}(A + B + C - 180^\circ)$ или $180^\circ - \frac{1}{2}\,\varepsilon$, јер из-

$$1)\quad\left\{\begin{aligned} \sin\frac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}\,, \\ \sin\frac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a\sin c}}\,, \\ \sin\frac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}\,; \end{aligned}\right.$$

$$2)\quad\left\{\begin{aligned} \cos\frac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}\,, \\ \cos\frac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin a\sin c}}\,, \\ \cos\frac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}\,; \end{aligned}\right.$$

Из образаца 1) и 2) изводимо деобом још и сљедеће обрасце

$$3)\quad\left\{\begin{aligned} tg\frac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}\,, \\ tg\frac{1}{2}B &= \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-b)}}\,, \\ tg\frac{1}{2}C &= \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin s\sin(s-c)}}\,. \end{aligned}\right.$$

Ови обрасци под 1), 2), 3) слични су онима под 3), 4), 5) у № 73 равне тригонометрије. Пошто су угли A, B, C мањи од 180°, дакле $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, $\frac{1}{2}C$ појединце мањи од 90° то се у нађеним обрасцима корени знаци имају узети само са знаком $+$. Пошто су даље на основу №• 150 разлике

$s - a$, $s - b$, $s - c$ увек положне и осим тога појединце као и s мање од 180°, то су количине под кореним знацима све положне.

Ако у обрасцима

$$\sin A = 2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A, \quad \sin B = 2 \sin \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} B,$$

$$\sin C = 2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C$$

заменимо $\sin \frac{1}{2} A$, $\cos \frac{1}{2} A$, $\sin \frac{1}{2} B$, $\cos \frac{1}{2} B$, $\sin \frac{1}{2} C$ $\cos \frac{1}{2} C$ њиховим вредностима под 1) и 2) у № 168, наћићемо сљедећа три обрасца

$$4) \quad \begin{cases} \sin A = \dfrac{2}{\sin b \sin c} \sqrt{\sin s \sin (s\text{-}a) \sin (s\text{-}b) \sin (s\text{-}c)}, \\ \sin B = \dfrac{2}{\sin a \sin c} \sqrt{\sin s \sin (s\text{-}a) \sin (s\text{-}b) \sin (s\text{-}c)}, \\ \sin C = \dfrac{2}{\sin a \sin b} \sqrt{\sin s \sin (s\text{-}a) \sin (s\text{-}b) \sin (s\text{-}c)}. \end{cases}$$

Деобом ових једначина добијају се обрасци под 2) у № 158.

169. Обрасци №е 168 вреде за сваки сферни троугао па дакле и за онај, који је даноме суплементан. Угли тога суплементнога троугла јесу $180^\circ - a$, $180^\circ - b$, $180^\circ - c$, а стране $180^\circ - A$, $180^\circ - B$, $180^\circ - C$; половина збира његових страна једнака је дакле

$180^\circ - \frac{1}{2}(A + B + C - 180^\circ)$ или $180^\circ - \frac{1}{2} \varepsilon$, јер израз у загради јесте сферни сувишак троугла ABC. По овоме да би обрасце под 1), 2), 3) и 4) применили на суплементни сферни троугао, треба ће само да у њима место A, B, C, a, b, c и s метнемо суплементе од a, b, c, A, B, C и $\frac{1}{2}\,\varepsilon$.

На тај начин добићемо сљедеће четири гомиле нових образаца.

$$5)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\frac{1}{2}\,a &= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon\,\sin\left(A-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)}{\sin B\,\sin C}}\,, \\ \sin\frac{1}{2}\,b &= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon\,\sin\left(B-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)}{\sin A\,\sin C}}\,, \\ \sin\frac{1}{2}\,c &= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon\,\sin\left(C-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)}{\sin A\,\sin B}}\,; \end{aligned}\right.$$

$$6)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\frac{1}{2}\,a &= \sqrt{\frac{\sin\left(B-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)\sin\left(C-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)}{\sin B\,\sin C}}\,, \\ \cos\frac{1}{2}\,b &= \sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)\sin\left(C-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)}{\sin A\,\sin C}}\,, \\ \cos\frac{1}{2}\,c &= \sqrt{\frac{\sin\left(A-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)\sin\left(B-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)}{\sin A\,\sin B}}\,; \end{aligned}\right.$$

$$7)\quad \left\{\begin{aligned} tg\,\frac{1}{2}\,a &= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon\,\sin\left(A-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)}{\sin\left(B-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)\sin\left(C-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)}}\,, \\ tg\,\frac{1}{2}\,b &= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon\,\sin\left(B-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)}{\sin\left(A-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)\sin\left(C-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)}}\,, \\ tg\,\frac{1}{2}\,c &= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\,\varepsilon\,\sin\left(C-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)}{\sin\left(A-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)\sin\left(B-\frac{1}{2}\,\varepsilon\right)}}\,; \end{aligned}\right.$$

$$8)\qquad \begin{cases} \sin a = \dfrac{2}{\sin B \sin C}\; M \\[2ex] \sin b = \dfrac{2}{\sin A \sin C}\; M \\[2ex] \sin c = \dfrac{2}{\sin A \sin B}\; M \end{cases}$$

У последњим обрасцима под 8) је:

$$M = \sqrt{\sin\frac{1}{2}\varepsilon \sin(A - \frac{1}{2}\varepsilon) \sin(B - \frac{1}{2}\varepsilon) \sin(C - \frac{1}{2}\varepsilon)}$$

У свима овим обрасцима имају се корене количине узети са знаком $+$, јер су a, b, c посебице мањи од 180° а њихове половине мање од 90°. Пошто су даље на основу №^{e} 152 разлике $A - \frac{1}{2}\varepsilon$, $B - \frac{1}{2}\varepsilon$, $C - \frac{1}{2}\varepsilon$ положне и исте као и $\frac{1}{2}\varepsilon$ посебице мање од 180°, то су количине под кореним знацима у нађеним обрасцима све положне.

170. *Деламброви обрасци.* — Из образаца 1) и 2) №^{e} 168 добијамо

$$\sin\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B = \frac{\sin(s-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}$$

$$= \frac{\sin(s-b)}{\sin c}\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}A \sin\frac{1}{2}B = \frac{\sin(s-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin s \sin(s-c)}{\sin a \sin b}}$$

$$= \frac{\sin(s-a)}{\sin c}\cos\frac{1}{2}C,$$

$$cos \frac{1}{2} A \; cos \frac{1}{2} B = \frac{sin \; s}{sin \; c} \sqrt{\frac{sin\,(s-a) \; sin\,(s-b)}{sin \; a \; sin \; b}}$$

$$= \frac{sin \; s}{sin \; c} \; sin \frac{1}{2} C,$$

$$sin \frac{1}{2} A \; sin \frac{1}{2} B = \frac{sin\,(s-c)}{sin \; c} \sqrt{\frac{sin\,(s-a) \; sin\,(s-b)}{sin \; a \; sin \; b}}$$

$$= \frac{sin\,(s-c)}{sin \; c} \; sin \frac{1}{2} C,$$

Сабирањем и одузимањем најпре првих а затим последњих двеју једначина добијамо

$$sin \frac{1}{2} A \; cos \frac{1}{2} B \pm cos \frac{1}{2} A \; sin \frac{1}{2} B$$

$$= \frac{sin\,(s-b) \pm sin\,(s-c)}{sin \; c} \; cos \frac{1}{2} C,$$

$$cos \frac{1}{2} A \; cos \frac{1}{2} B \mp sin \frac{1}{2} A \; sin \frac{1}{2} B$$

$$= \frac{sin \; c \mp sin\,(s-c)}{sin \; c} \; sin \frac{1}{2} C,$$

или кад прву са $cos \frac{1}{2} C$ а другу са $sin \frac{1}{2} C$ поделимо

$$\frac{sin \frac{1}{2} A \; cos \frac{1}{2} B \pm cos \frac{1}{2} A \; sin \frac{1}{2} B}{cos \frac{1}{2} C}$$

$$= \frac{\sin\ (s-b) \pm \sin (s-c)}{\sin c},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \mp \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} C}$$

$$= \frac{\sin s \mp \sin (s-c)}{\sin c}$$

одавде, ако узмемо на ум да је

$$2\, s = a + b + c, \quad \sin c = 2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c,$$

$$\sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \pm \cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B = \sin \frac{1}{2} (A \pm B)$$

$$\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \mp \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B = \cos \frac{1}{2} (A \pm B)$$

$$\sin (s-b) + \sin (s-a) = 2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} (a-b),$$

$$\sin (s-b) - \sin (s-a) = 2 \cos \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} (a-b),$$

$$\sin s + \sin (s-c) = 2 \cos \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} (a+b),$$

$$\sin s - \sin (s-c) = 2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} (a+b),$$

добијамо напослетку

$$\cos\frac{1}{2}A\,\cos\frac{1}{2}B = \frac{\sin s}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\,\sin(s-b)}{\sin a\,\sin b}}$$

$$= \frac{\sin s}{\sin c}\,\sin\frac{1}{2}C,$$

$$\sin\frac{1}{2}A\,\sin\frac{1}{2}B = \frac{\sin(s-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(s-a)\,\sin(s-b)}{\sin a\,\sin b}}$$

$$= \frac{\sin(s-c)}{\sin c}\,\sin\frac{1}{2}C,$$

Сабирањем и одузимањем најпре првих а затим последњих двеју једначина добијамо

$$\sin\frac{1}{2}A\,\cos\frac{1}{2}B \pm \cos\frac{1}{2}A\,\sin\frac{1}{2}B$$

$$= \frac{\sin(s-b) \pm \sin(s-c)}{\sin c}\,\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}A\,\cos\frac{1}{2}B \mp \sin\frac{1}{2}A\,\sin\frac{1}{2}B$$

$$= \frac{\sin c \mp \sin(s-c)}{\sin c}\,\sin\frac{1}{2}C,$$

или кад прву са $\cos\frac{1}{2}C$ а другу са $\sin\frac{1}{2}C$ поделимо

$$\frac{\sin\frac{1}{2}A\,\cos\frac{1}{2}B \pm \cos\frac{1}{2}A\,\sin\frac{1}{2}B}{\cos\frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{\sin (s - b) \pm \sin (s - c)}{\sin c},$$

$$\frac{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \mp \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B}{\sin \frac{1}{2} C}$$

$$= \frac{\sin s \mp \sin (s - c)}{\sin c}$$

одавде, ако узмемо на ум да је

$$2\, s = a + b + c, \quad \sin c = 2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} c,$$

$$\sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \pm \cos \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B = \sin \frac{1}{2} (A \pm B)$$

$$\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \mp \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B = \cos \frac{1}{2} (A \pm B)$$

$$\sin (s - b) + \sin (s - a) = 2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} (a - b),$$

$$\sin (s - b) - \sin (s - a) = 2 \cos \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} (a - b),$$

$$\sin s + \sin (s - c) = 2 \cos \frac{1}{2} c \sin \frac{1}{2} (a + b),$$

$$\sin s - \sin (s - c) = 2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2} (a + b),$$

добијамо напослетку

$$
9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}, \\[2ex]
\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c}, \\[2ex]
\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}, \\[2ex]
\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ово су деламброви обрасци, који их је први изнашао и године 1807 обзнанио; неки их приписују Гаусу, али овај их је тек на две године доцније у свом делу: motus corporum coelestium изнео.

Да би памћење деламбрових образаца олакшали, приметићемо ово: кад се у тим обрасцима угли метну лево а стране десно, као што смо ми то и учинили, онда 1° на левој страни стоје различне тригонометријске функције а на десној исте; 2° синусу у бројиоцу ма које стране одговара знак — у бројиоцу друге, а косинусу знак +.

171. Из другог и трећег деламбровог обрасца дају се извести две по разрешавање сферних троуглова важне истине.

Пошто су количине $\cos\frac{1}{2}C$ и $\sin\frac{1}{2}c$ положне, то из другог деламбровог обрасца сљедује, да $\sin\frac{1}{2}(A-B)$ и $\sin\frac{1}{2}(a-b)$ морају бити истог знака, одакле опет сљедује да кад је $A \lesseqgtr B$ онда је и $a \lesseqgtr b$, то ће рећи *насирам веће стране лежи и већи угао, насирам мање стране мањи угао;* одавде само по себи сљедује, *да сирам једнаких страна морају бити и једнаки угли.*

Пошто су $\sin\frac{1}{2}C$ и $\cos\frac{1}{2}c$ такође положне количине, то из трећег деламбровог обрасца видимо да количина $\cos\frac{1}{2}(A+B), \cos\frac{1}{2}(a+b)$ морају бити истог знака, одакле изводимо, да кад је $A+B \lesseqgtr 180^{\circ}$ и $a+b \underset{<}{\leq} 180^{\circ}$ бити мора, што ће рећи: *збир двају углова и збир супротних им страна истог су рода*, то јест *у исти мах су већи или мањи или једнаки 180°.*

172. *Неиерови обрасци.* — Ако други деламбров образац поделимо са четвртим, први са трећим, а затим други са првим и четврти са трећим добићемо сљедећа четири нова обрасца:

$$10)\quad \begin{cases} \dfrac{tg\frac{1}{2}(A-B)}{cotg\frac{1}{2}C} = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}, \\[2ex] \dfrac{tg\frac{1}{2}(A+B)}{cotg\frac{1}{2}C} = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}, \end{cases}$$

$$10)\quad \begin{cases} \dfrac{tg\,\dfrac{1}{2}\,(a-b)}{tg\,\dfrac{1}{2}\,c} = \dfrac{sin\,\dfrac{1}{2}\,(A-B)}{sin\,\dfrac{1}{2}\,(A+B)}, \\[2em] \dfrac{tg\,\dfrac{1}{2}\,(a+b)}{tg\,\dfrac{1}{2}\,C} = \dfrac{cos\,\dfrac{1}{2}\,(A-B)}{cos\,\dfrac{1}{2}\,(A+B)}, \end{cases}$$

Ово су неперови обрасци; они се могу врло лако запамтити, јер у прва два обрасца стоје лево различне тригонометријске функције и то у бројиоцу тангента а у имениоцу котангента, у последња два обрасца стоји лево иста тригонометријска функција то јест тангента како у бројиоцу тако и у имениоцу; међутим десно у сваком од четири обрасца стоје исте тригонометријске функције и то косинуси, кад је у левом бројиоцу знак +, а синуси кад је у левом бројиоцу знак —; најзад у сваком бројиоцу десно стоји —, а у имениоцу знак +.

173. Неперови обрасци могу се и непосредно на сљедећи начин извести.

Множењем једначина

$$tg\,\frac{1}{2}\,(A-B) = \frac{tg\,\dfrac{1}{2}\,A - tg\,\dfrac{1}{2}\,B}{1 + tg\,\dfrac{1}{2}\,A\,tg\,\dfrac{1}{2}\,B},$$

$$\frac{1}{cotg\,\dfrac{1}{2}\,C} = tg\,\frac{1}{2}\,C$$

добијамо

$$\frac{tg\frac{1}{2}(A-B)}{cotg\frac{1}{2}C} = \frac{tg\frac{1}{2}A\,tg\frac{1}{2}C - tg\frac{1}{2}B\,tg\frac{1}{2}C}{1+tg\frac{1}{2}A\,tg\frac{1}{2}B},$$

Замењујући овде $tg\frac{1}{2}A$, $tg\frac{1}{2}B$, $tg\frac{1}{2}C$ њиним вредностима, које стоје под 3) у № 168, добијамо даље

$$\frac{tg\frac{1}{2}(A-B)}{cotg\frac{1}{2}C} = \frac{sin\,(s-b) - sin\,(s-a)}{sin\,s + sin\,(s-c)}$$

$$= \frac{2\,sin\frac{1}{2}(a-b)\,cos\frac{1}{2}c}{2\,sin\frac{1}{2}(a+b)\,cos\frac{1}{2}c},$$

или

$$\frac{tg\frac{1}{2}(A-B)}{cotg\frac{1}{2}C} = \frac{sin\frac{1}{2}(a-b)}{sin\frac{1}{2}(a+b)},$$

а то је први неперов образац.

Други неперов образац добија се на сасвим сличан начин. Јер најпре је

$$\frac{tg\frac{1}{2}(A+B)}{cotg\frac{1}{2}C} = \frac{tg\frac{1}{2}A\,tg\frac{1}{2}C + tg\frac{1}{2}B\,tg\frac{1}{2}C}{1-tg\frac{1}{2}A\,tg\frac{1}{2}B};$$

одавде по замени количина $tg\,\frac{1}{2}A$, $tg\,\frac{1}{2}B$, $tg\,\frac{1}{2}C$ њиним вредностима, које су под 3) у № 168, добијамо

$$\frac{tg\,\frac{1}{2}(A+B)}{cotg\,\frac{1}{2}C} = \frac{sin\,(s-b) + sin\,(s-c)}{sin\,s - sin\,(s-c)}$$

$$= \frac{2\,sin\,\frac{1}{2}c\,cos\,\frac{1}{2}(a-b)}{2\,sin\,\frac{1}{2}c\,cos\,\frac{1}{2}(a+b)},$$

или

$$\frac{tg\,\frac{1}{2}(A+B)}{cotg\,\frac{1}{2}C} = \frac{cos\,\frac{1}{2}(a-b)}{cos\,\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Ово је други неперов образац и може се из првог извести овако:

Из обрасца

$$\frac{sin\,a}{sin\,A} = \frac{sin\,b}{sin\,B}$$

сљедује

$$\frac{sin\,a - sin\,b}{sin\,a + sin\,b} = \frac{sin\,A - sin\,B}{sin\,A + sin\,B} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(A-B)}{tg\,\frac{1}{2}(A+B)};$$

замењујући овде $tg\,\frac{1}{2}(A-B)$ вредношћу, коју даје први неперов образац, добијамо

$$\frac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b} = \frac{\cot g \frac{1}{2} C}{tg \frac{1}{2}(A+B)} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)};$$

но како је

$$\frac{\sin a - \sin b}{\sin a + \sin b} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(a-b) \cos \frac{1}{2}(a+b)}{2 \sin \frac{1}{2}(a+b) \cos \frac{1}{2}(a-b)}$$

$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}(a-b)}{\sin \frac{1}{2}(a+b)},$$

то по замени добијамо даље

$$\frac{\cos \frac{1}{2}(a+b)}{\cos \frac{1}{2}(a-b)} = \frac{\cot g \frac{1}{2} C}{tg \frac{1}{2}(A+B)},$$

а то је очевидно други неперов образац.

Последња два неперова обрасца налазе се примењујући прва два на суплементни троугао. Јер ако су A', B', C' угли а a', b', c' стране суплементног троугла, то је

$$a' = 180^\circ - A, \quad b' = 180^\circ - B, \quad c' = 180^\circ - C,$$
$$A' = 180^\circ - a, \quad B' = 180^\circ - b, \quad C' = 180^\circ - c,$$

дакле

$$\frac{1}{2}(a' + b') = 180^\circ - \frac{1}{2}(A+B), \text{ и}$$

$$\sin \frac{1}{2}(a' + b') = \sin \frac{1}{2}(A+B).$$

Исто тако лако налази се и

$$\sin\frac{1}{2}(a'-b') = -\sin\frac{1}{2}(A-B),\ \cot g\frac{1}{2}C' = tg\frac{1}{2}c,$$

$$tg\frac{1}{2}(A'-B') = -tg\frac{1}{2}(a-b).$$

Образац

$$\frac{tg\frac{1}{2}(A'-B')}{\cot g\frac{1}{2}C'} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}$$

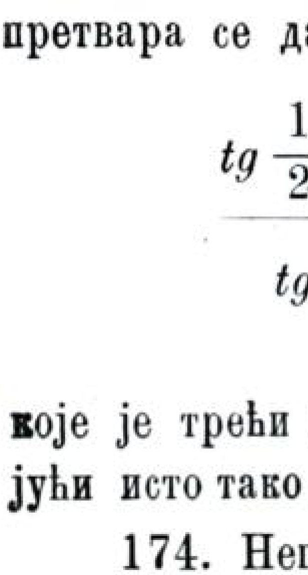
претвара се дакле у сљедећи

$$\frac{tg\frac{1}{2}(a-b)}{tg\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)},$$

које је трећи неперов образац; четврти добија се примењујући исто тако други неперов образац на суплементни троугао.

174. Неперови обрасци могу се и геометријски на сљедећи начин извести.

Нека је (сл. 75) ABC сматрани троугао. Узмимо на страни $CB = a$ лук $CD = CA = b$; затим преполовимо угао C великим луком CP, који у тачки P пресеца лук MP, управно повучен на средину лука DB. Тачка P јесте пол малом кроз тачке A, B, D пролазећем кругу, јер троугли ACP, DCP јесу једнаки и по томе $PA = PD$, а уосталом је већ $PD = PB$. Осим тога је угао $PBC = 90° - \frac{1}{2}(A - B)$,



Сл. 75.

јер пошто су угли PAB, PBA једнаки то је

$$PAC - PBC = A - B,$$

и пошто су такође угли PAC, PDC као и угли PBC, PDB једнаки, то је даље

$$PAC + PBC = 180^{\circ},$$

дакле

$$PBC = 90^{\circ} - \frac{1}{2}(A - B).$$

Пошто је најзад M средина луку DB, то је

$$CM = \frac{1}{2}(a + b), \qquad BM = \frac{1}{2}(a - b).$$

Прелазећи сад на троугле PMC, PMB, који су код M правоугли добијамо из истих на основу образаца № 164, нађених за правоугле троугле

$$tg\, PCM = \frac{tg\, PM}{sin\, CM},\; tg\, PBM = \frac{tg\, PM}{sin\, BM};$$

деобом ових једначина добијамо даље

$$\frac{tg\, PCM}{tg\, PBM} = \frac{cotg\, PBM}{cotg\, PCM} = \frac{sin\, BM}{sin\, CM},$$

или због

$$cotg\, PBM = cotg\left[90^{\circ} - \frac{1}{2}(A - B)\right] = tg\,\frac{1}{2}(A - B);$$

$$cotg\, PCM = cotg\,\frac{1}{2}\,C,\; sin\, BM = sin\,\frac{1}{2}(a - b) \quad \text{и}$$

Исто тако лако налази се и

$$\sin\frac{1}{2}(a'-b') = -\sin\frac{1}{2}(A-B),\ \operatorname{cotg}\frac{1}{2}C' = \operatorname{tg}\frac{1}{2}c,$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A'-B') = -\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b).$$

Образац

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A'-B')}{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C'} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a'-b')}{\sin\frac{1}{2}(a'+b')}$$

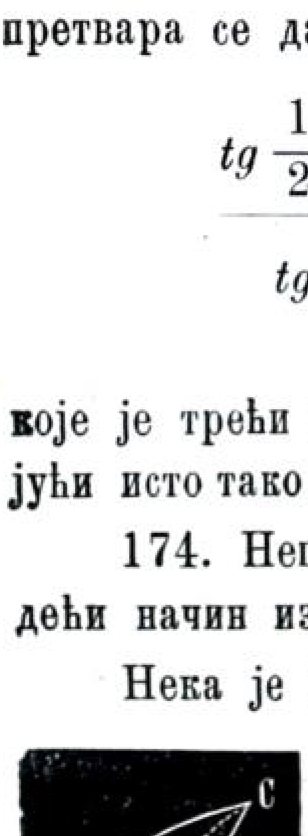
претвара се дакле у сљедећи

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)},$$

које је трећи неперов образац; четврти добија се примењујући исто тако други неперов образац на суплементни троугао.

174. Неперови обрасци могу се и геометријски на сљедећи начин извести.

Нека је (сл. 75) ABC сматрани троугао. Узмимо на страни $CB = a$ лук $CD = CA = b$; затим преполовимо угао C великим луком CP, који у тачки P пресеца лук MP, управно повучен на средину лука DB. Тачка P јесте пол малом кроз тачке A, B, D пролазећем кругу, јер троугли ACP, DCP јесу једнаки и по томе $PA = PD$, а уосталом је већ $PD = PB$. Осим тога је угао $PBC = 90° - \frac{1}{2}(A - B)$,



Сл. 75.

јер пошто су угли PAB, PBA једнаки то је

$$PAC - PBC = A - B,$$

и пошто су такође угли PAC, PDC као и угли PBC, PDB једнаки, то је даље

$$PAC + PBC = 180^\circ.$$

дакле

$$PBC = 90^\circ - \frac{1}{2}(A - B).$$

Пошто је најзад M средина луку DB, то је

$$CM = \frac{1}{2}(a + b), \qquad BM = \frac{1}{2}(a - b).$$

Прелазећи сад на троугле PMC, PMB, који су код M правоугли добијамо из истих на основу образаца № 164, нађених за правоугле троугле

$$tg\, PCM = \frac{tg\, PM}{sin\, CM},\ tg\, PBM = \frac{tg\, PM}{sin\, BM};$$

деобом ових једначина добијамо даље

$$\frac{tg\, PCM}{tg\, PBM} = \frac{cotg\, PBM}{cotg\, PCM} = \frac{sin\, BM}{sin\, CM},$$

или због

$$cotg\, PBM = cotg \left[90^\circ - \frac{1}{2}(A - B) \right] = tg \frac{1}{2}(A - B);$$

$$cotg\, PCM = cotg \frac{1}{2} C,\ sin\, BM = sin \frac{1}{2}(a - b) \quad \text{и}$$

$$sin\, CM = sin\,\frac{1}{2}\,(a + b)$$

напослетку

$$\frac{tg\,\frac{1}{2}\,(A - B)}{cotg\,\frac{1}{2}\,C} = \frac{sin\,\frac{1}{2}\,(a - b)}{sin\,\frac{1}{2}\,(a + b)}.$$

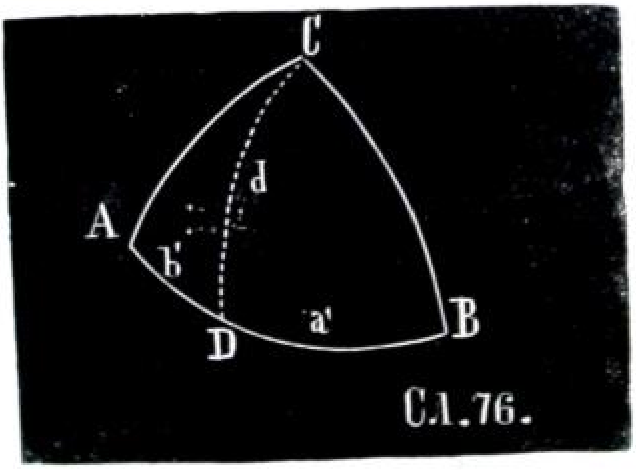
175. Деобом прва два или последња два неперова обрасца добија се образац

11) $$\frac{tg\,\frac{1}{2}\,(a + b)}{tg\,\frac{1}{2}\,(a - b)} = \frac{tg\,\frac{1}{2}\,(A + B)}{tg\,\frac{1}{2}\,(A - B)},$$

познат под именом *сразмере четирију тангената.*

Још ћемо да изведемо образац познат под именом *сразмере четирију косинуса.*

Са темена C (сл. 76) троугла ABC спустимо велики лук CD управно на страну AB означимо исти лук са d, а са a', b' сегменте оближње странама a, b. Из правоуглих троуглова BCD, ACD, у којима су a и b ипотенузе, добијамо



Сл. 76.

$$cos\, a = cos\, d\, cos\, a',$$

$$cos\, b = cos\, d\, cos\, b',$$

одакле поделом тражени образац

12) $$\frac{cos\, a}{cos\, b} = \frac{cos\, a'}{cos\, b'}.$$

176. Из деламбрових образаца изводимо

$$\frac{\cos\frac{1}{2}c-\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c+\cos\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)-\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)+\sin\frac{1}{2}(A+B)}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}C-\sin\frac{1}{2}c}{\sin\frac{1}{2}C+\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)-\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)+\sin\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}C-\sin\frac{1}{2}c}{\cos\frac{1}{2}C+\sin\frac{1}{2}c}=\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)-\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)+\sin\frac{1}{2}(a-b)}$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}c-\sin\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c+\sin\frac{1}{2}C}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)-\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)+\cos\frac{1}{2}(A+B)}$$

Ако ставимо краткоће ради

$$A+B=U+180^\circ,\quad A-B=V,$$

$$a+b=u+180^\circ,\quad a-b=v.$$

и у исти мах применимо на горње једначине обрасце № 39, добићемо

$$13)\begin{cases} tg\frac{1}{4}(C-c)\,tg\frac{1}{4}(C+c)=tg\frac{1}{4}(U+v)tg\frac{1}{4}(U-v), \\ tg\frac{1}{4}(C-c)\,cotg\frac{1}{4}(C+c)=tg\frac{1}{4}(u+V)tg\frac{1}{4}(u-V); \end{cases}$$

$$14)\left\{\begin{aligned}
&tg\left[45^\circ+\frac{1}{4}(C-c)\right]cotg\left[45^\circ+\frac{1}{4}(C+c)\right]\\
&\qquad=tg\frac{1}{4}(V-v)\,cotg\frac{1}{4}(V+v);\\
&tg\left[45^\circ+\frac{1}{4}(C-c)\right]tg\left[45^\circ+\frac{1}{4}(C+c)\right]\\
&\qquad=-cotg\frac{1}{4}(U-u)\,tg\frac{1}{4}(U+u);
\end{aligned}\right.$$

из ових једначина 13) и 14) добијамо даље

$$15)\left\{\begin{aligned}
&tg\frac{1}{4}(C-c)\\
&=\pm\sqrt{tg\frac{1}{4}(U+v)\,tg\frac{1}{4}(U-v)\,tg\frac{1}{4}(u+V)\,tg\frac{1}{4}(u-V)}\\
&tg\frac{1}{4}(C+c)\\
&=+\sqrt{tg\frac{1}{4}(U+v)\,tg\frac{1}{4}(U-v)\,cotg\frac{1}{4}(u+V)\,cotg\frac{1}{4}(u-V)}
\end{aligned}\right.$$

и

$$16)\left\{\begin{aligned}
&tg\left[45^\circ+\frac{1}{4}(C-c)\right]\\
&=+\sqrt{-tg\frac{1}{4}(V-v)\,cotg\frac{1}{4}(V+v)\,cotg\frac{1}{4}(U-u)\,tg\frac{1}{4}(U+u)}\\
&tg\left[45^\circ+\frac{1}{4}(C+c)\right]\\
&=\pm\sqrt{-cotg\frac{1}{4}(V-v)\,tg\frac{1}{4}(V+v)\,cotg\frac{1}{4}(U-u)\,tg\frac{1}{4}(U+u)}
\end{aligned}\right.$$

Пошто се $\frac{1}{4}(C+c)$ и $45^\circ + \frac{1}{4}(C-c)$ налазе између 0 и 90", због чега су њихове тангенте положне, то се у другом обрасцу под 15) и првом под 16) корени морају узети са знаком $+$. У осталим двама обрасцима лако је одредити знак, који пред корене треба метнути; $tg\,\frac{1}{4}(C-c)$ мора очевидно бити истог знака са левим странама образаца под 13); исто тако и $tg\left[45^\circ + \frac{1}{4}(C+c)\right]$ мора бити истог знака са левим странама образаца под 14).

Површина сферног троугла.

177. Површина сферног троугла зависи, као што ми то већ знамо (№ 154) од његовог сферног сувишка (ексцеса); она је једнака самом том сувишку, кад се осмина лоптине површине узме за јединицу површина а прав угао за јединицу углова, или такође кад се полупречник лопте узме за јединицу и сферни сувишак изрази у деловима полупречника. Ми ћемо овде извести неколико образаца, помоћу којих се сферни сувишак у различним приликама може израчунати.

Означавајући сферни сувишак са ε имамо

$$\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$$

одакле

$$\frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \left(\frac{1}{2}C - \varepsilon\right).$$

Замењујући $\frac{1}{2}(A+B)$ овом вредношћу у првом и трећем деламбровом обрасцу добијамо

$$1) \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}(C-\varepsilon)}{\cos\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

и

$$2) \qquad \frac{\sin\frac{1}{2}(C-\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}C} = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

Из ових образаца развијајући $\cos\frac{1}{2}(C-\varepsilon)$, $\sin\frac{1}{2}(C-\varepsilon)$, $\cos\frac{1}{2}(a-b)$ и $\cos\frac{1}{2}(a+b)$ изводимо

$$1') \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}\varepsilon + \sin\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\cos\frac{1}{2}C}$$

$$= \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$2') \qquad \frac{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}\varepsilon - \cos\frac{1}{2}C\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}C}$$

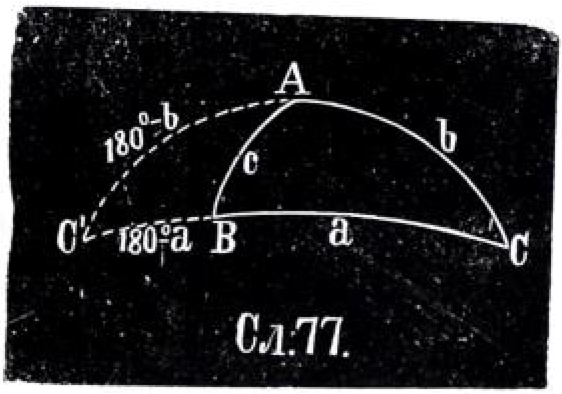
$$= \frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b - \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

Ако другу од ових двеју једначина одузмемо од прве, пошто смо најпре бројиоца и imениоца леве стране у првој једначини помножили са $\sin\frac{1}{2}C$ а у другој са $\cos\frac{1}{2}C$, наћићемо

$$3)\qquad \frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin C}=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

Овај образац добија се такође, кад се прве две једначине под 5) у № 169 помноже и резултат трећом једначином под 6) у истој № раздели.

Ако (сл. 77) стране a, b троугла ABC продужимо дотле, докле се исте још једанпут у тачки C' непресеку, добићемо нов један троугао ABC'. Угао C' тога троугла једнак је углу C данога троугла ABC; остала два његова угла јесу суплементи углова A, B троугла ABC. Страна c заједничка је обојим троуглима; остале две стране троугла ABC' јесу суплементи — допуне до 180°— странама троугла ABC.



Сл:77.

Применимо на троугао ABC' нађени образац 3) дакле ставимо у њему $180^\circ-a$, $180^\circ-b$ место a, b, и $2C-\varepsilon$ место ε, па ћемо добити

$$4)\qquad \frac{\sin\left(C-\frac{1}{2}\varepsilon\right)}{\sin C}=\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

Овај образац добија се такође, ако се прве две једначине под 6) у № 169 помноже и производ трећом једначином раздели.

Сабирајући једначине под 1') и 2'), пошто смо прву са $\cos^2 \frac{1}{2} C$ а другу са $\sin^2 \frac{1}{2} C$ помножили, добијамо

$$5) \qquad \cos \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos C}{\cos \frac{1}{2} c}$$

и примењујући овај образац на троугао ABC'

$$6) \quad \cos\left(C - \frac{1}{2} \varepsilon\right) = \frac{\sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b + \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos C}{\cos \frac{1}{2} c}$$

Обрасце 5) и 6) можемо извести из образаца 3) и 4), ако ове последње саберемо, пошто смо најпре први са $\cos C$ и други са 1, а после први са 1 а други са $\cos C$ помножили.

Делећи једначину 3) са 5) и једначину 4) са 6) добијамо даље

$$7) \quad \begin{aligned} tg \frac{1}{2} \varepsilon &= \frac{tg \frac{1}{2} a \, tg \frac{1}{2} b \sin C}{1 + tg \frac{1}{2} a \, tg \frac{1}{2} b \cos C} \\ tg\left(C - \frac{1}{2} \varepsilon\right) &= \frac{cotg \frac{1}{2} a \, cotg \frac{1}{2} b \sin C}{1 + cotg \frac{1}{2} a \, cotg \frac{1}{2} b \cos C}, \end{aligned}$$

који се последњи образац такође добија, кад се онај пред њим примени на троугао ABC'.

Обрасци под 7) дају сферни сувишак из две стране и захваћеног угла, обрасци под 3) и 4) дају такође сферни сувишак али из три стране и једног угла.

Обрасци под 7) могу се такође добити и из другог неперовог обрасца. Ако у истом заменимо $\frac{1}{2}(A+B)$ вредношћу $90^\circ - \frac{1}{2}(C-\varepsilon)$, изаћиће образац

$$8) \qquad tg\,\frac{1}{2}(C-\varepsilon) = tg\,\frac{1}{2}\,C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)},$$

из којег се обрасци под 7) дају лако извести

Ако из образаца 3) и 4) истиснемо угао C помоћу обрасца

$$\sin C = \frac{2}{\sin a \sin b}\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}$$

и из образаца 5) и 6) помоћу обрасца

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

добићемо

$$9) \quad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}\varepsilon = \dfrac{\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} \\[2ex] \sin\left(C-\frac{1}{2}\varepsilon\right) = \dfrac{\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c} \end{cases}$$

и

$$10)\left\{\begin{aligned}\cos\frac{1}{2}\varepsilon &= \frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\\ &= \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\\ \cos\left(C-\frac{1}{2}\varepsilon\right) &= \frac{\sin^2\frac{1}{2}a+\sin^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\\ &= \frac{1-\cos a-\cos b+\cos c}{4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}\end{aligned}\right.$$

Други обрасци под 9) и 10) добијају се такође ако се први обрасци под 9) и 10) примене на троугао ABC'.

Обрасци под 9) и 10) дају сферни сувишак из три стране сфернога троугла, но могу се добити још и други простији обрасци

Помоћу образаца

$$\sin\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}},\quad \cos\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

и оних под 10) могу се изнаћи синус и косинус углова $\frac{1}{4}\varepsilon$ и $\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon$; тако добијамо за угао $\frac{1}{4}\varepsilon$

$$\sin\frac{1}{4}\varepsilon=\sqrt{\frac{\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b-(\cos\frac{1}{2}c-\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b)^2}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}$$

$$\cos\frac{1}{4}\varepsilon=\sqrt{\frac{(\cos\frac{1}{2}c+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b)^2-\sin^2\frac{1}{2}a\sin^2\frac{1}{2}b}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}$$

или по свођају бројилаца, који су под кореним знацима

$$11)\left\{\begin{aligned}\sin\frac{1}{4}\varepsilon&=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s\text{-}a)\sin\frac{1}{2}(s\text{-}b)\sin\frac{1}{2}(s\text{-}c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}\\ \cos\frac{1}{4}\varepsilon&=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s\text{-}a)\cos\frac{1}{2}(s\text{-}b)\cos\frac{1}{2}(s\text{-}c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}\end{aligned}\right.$$

Множењем ових једначина налази се први образац под 9); деобом пак добија се образац

$$12)\ tg\frac{1}{4}\varepsilon=\sqrt{tg\frac{1}{2}s\,tg\frac{1}{2}(s-a)\,tg\frac{1}{2}(s-b)\,tg\frac{1}{2}(s\text{-}c)}$$

познат под именом L'huilier — овог обрасца.

Као год што се први образац под 9) и онај под 12) изводе из образаца под 11), исто се тако лако могу и ови последњи из оних првих извести.

Јер образац под 9) може се и овако написати:

$$\sin\frac{1}{4}\varepsilon\cos\frac{1}{4}\varepsilon=$$

$$\frac{\sqrt{\left[\sin\frac{s}{2}\sin\frac{s\text{-}a}{2}\sin\frac{s\text{-}b}{2}\sin\frac{s\text{-}c}{2}\right]\left[\cos\frac{s}{2}\cos\frac{s\text{-}a}{2}\cos\frac{s\text{-}b}{2}\cos\frac{s\text{-}c}{2}\right]}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

Множећи најпре а потом делећи ову једначину оном под 12) добијамо једначине

$$\sin^2\frac{1}{4}\varepsilon = \frac{\sin\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$\cos^2\frac{1}{4}\varepsilon = \frac{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

а из истих, пошто извучемо корене квадратне обрасце под 11).

Обрасци за синус, косинус и тангенту угла $\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon$ најлакше се добијају, ако се обрасци под 11) и 12) примене на троугао ABC' (сл. 76). Зарад тога треба само у истима ставити $180^\circ-a$, $180^\circ-b$ место a, b и $180^\circ-A$, $180^\circ-B$ место A, B; усљед тих замена количине $\frac{1}{2}(s-a)$, $\frac{1}{2}(s-b)$ претвориће се једна у другу, а свака од количина $\frac{1}{2}s$, $\frac{1}{2}(s-c)$ претвориће се у комплеменат друге, док се међутим ε претвара у $2C-\varepsilon$, дакле $\frac{1}{4}\varepsilon$ у $\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon$.

Ако затим у обрасцима нађеним за угао $\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon$ изменимо C, c најпре са A, a и обратно, а после са B, b и обратно, наћићемо сличне обрасце и за угле $\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon$,

$\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon$. На тај начин добићемо сљедеће три гомиле образаца:

$$13)\left\{\begin{aligned}
&\sin\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\\
&=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}}\\
&\sin\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\\
&=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}{\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}}\\
&\sin\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\\
&=\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-c)}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}
\end{aligned}\right.$$

$$14)\left\{\begin{aligned}
&\cos\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\\
&=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}s\sin\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-c)}{\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}}\\
&\cos\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\\
&=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)\sin\frac{1}{2}(s-b)\cos\frac{1}{2}(s-c)}{\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c}}
\end{aligned}\right.$$

$$14)\left\{\begin{aligned}&\cos\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon\right)\\&=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}s\cos\frac{1}{2}(s-a)\cos\frac{1}{2}(s-b)\sin\frac{1}{2}(s-c)}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}}\end{aligned}\right.$$

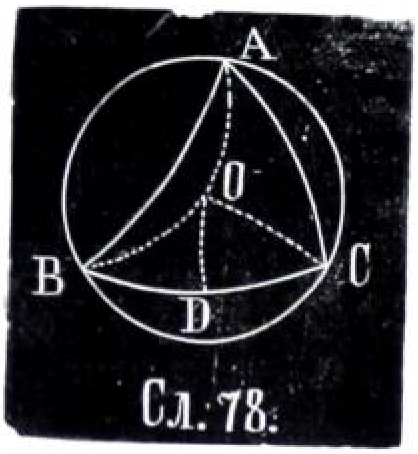
$$15)\left\{\begin{aligned}&tg\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon\right)=\sqrt{\frac{tg\frac{1}{2}(s-b)\,tg\frac{1}{2}(s-c)}{tg\frac{1}{2}s\,tg\frac{1}{2}(s-a)}}\\&tg\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon\right)=\sqrt{\frac{tg\frac{1}{2}(s-a)\,tg\frac{1}{2}(s-c)}{tg\frac{1}{2}s.\,tg\frac{1}{2}(s-b)}}\\&tg\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon\right)=\sqrt{\frac{tg\frac{1}{2}(s-a)\,tg\frac{1}{2}(s-c)}{tg\frac{1}{2}s\,tg\frac{1}{2}(s-c)}}\end{aligned}\right.$$

Ако из четири једначине: оне под 12), и ове последње три под 15) израчунамо $tg\frac{1}{2}s$, $tg\frac{1}{2}(s-a)$, $tg\frac{1}{2}(s-b)$ $tg\frac{1}{2}(s-c)$, добиһемо још сљедеһа четири обрасца

$$16)\left\{\begin{aligned}&tg\frac{1}{2}s=\sqrt{\frac{tg\frac{1}{4}\varepsilon}{tg(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon)tg(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon)tg(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon)}}\\&tg\frac{1}{2}(s-a)=\sqrt{\frac{tg\frac{1}{4}\varepsilon\,tg(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon)\,tg(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon)}{tg(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon)}}\\&tg\frac{1}{2}(s-b)=\sqrt{\frac{tg\frac{1}{4}\varepsilon\,tg(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon)\,tg(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon)}{tg(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon)}}\\&tg\frac{1}{2}(s-c)=\sqrt{\frac{tg\frac{1}{4}\varepsilon\,tg(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon)\,tg(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon)}{tg(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon)}}\end{aligned}\right.$$

Сферни полупречник описаног круга.

178. Нека је (сл. 78) O пол кругу, који је описан око троугла ABC; вежимо O са теменима троугла, па ћемо добити три равнокрака троугла AOB, BOC, COA. Означимо са α сваки од два једнака угла у троуглу OBC, а са β и γ сваки од два једнака угла у троуглу AOC и AOB; ако је пол у троуглу, онда је



Сл. 78.

$$\beta + \gamma = A, \quad \alpha + \gamma = B, \quad \alpha + \beta = C,$$

одакле

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}(A + B + C) = 90^\circ + \frac{1}{2}\varepsilon;$$

одузимајући од ове једначине сваку од три претходеће добијамо

$$\alpha = 90^\circ - (A - \frac{1}{2}\varepsilon),$$

$$\beta = 90^\circ - (B - \frac{1}{2}\varepsilon),$$

$$\gamma = 90^\circ - (C - \frac{1}{2}\varepsilon.)$$

Ови обрасци вреде и онда, кад је пол ван троугла, ако се само сматра као одречан онај од углова α, β, γ, који припада равнокраком троуглу лежећем ван троугла ABC.

Означимо сад са R сферни полупречник круга, који је описан око троугла ABC, и повуцимо са пола O велики лук OD управно на страну a, па ћемо на тај начин добити правоугли сферни троугао OBD, из којег налазимо

$$\cos \alpha = \frac{tg \frac{1}{2} a}{tg\ R} \quad \text{или} \quad tg\ R = \frac{tg \frac{1}{2} a}{\cos \alpha}$$

одакле стављајући место α његову вредност $90^\circ - (A - \frac{1}{2} \varepsilon)$

$$1) \qquad tg\, R = \frac{tg \frac{1}{2} a}{\sin (A - \frac{1}{2} \varepsilon)}$$

који образац даје сферни полупречник описаног круга из једне стране, супротног угла и сферног сувишка.

Ако у 1) заменимо $\sin (A - \frac{1}{2} \varepsilon)$ његовом вредношћу, која се добија, кад се у другом обрасцу под 9) № 177 C и c измене са A и a и обратно, наћићемо

$$2) \qquad tg\ R = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} c}{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}$$

образац, који даје полупречник описаног круга из три стране сферногa троугла.

Примењујући образац 2) на сваки од она три троугла, који постају кад се две и две стране троугла ABC продуже дотле, док се исте у тачкама A', B', C' још једанпут непресеку, добијамо још ова три обрасца.

$$3) \qquad tg\ R_a = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} c}{\sqrt{\sin s . \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}$$

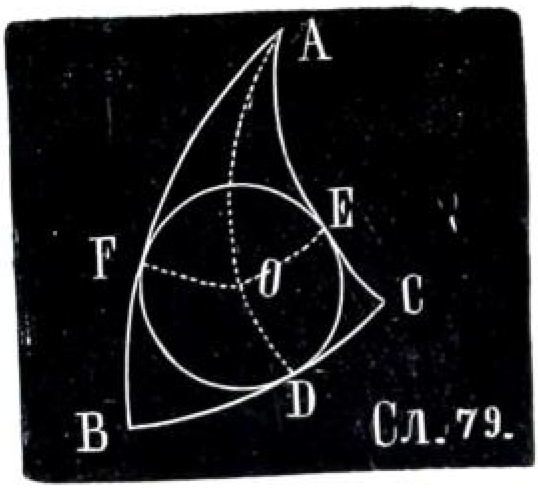
$$3)\begin{cases} tg\, R_b = \dfrac{2\cos\frac{1}{2}a\,\sin\frac{1}{2}b\,\cos\frac{1}{2}\,c}{\sqrt{\sin s.\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}} \\[2ex] tg\, R_c = \dfrac{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}\,c}{\sqrt{\sin s.\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}} \end{cases}$$

Напослетку замењујући у обрасцу 1) $tg\,\frac{1}{2}a$ њеном вредношћу из прве једначине под 7) у № 169, и примењујући потом нађени образац на троугле $A'BC$, $AB'C$, ABC', које мало више поменусмо, добијамо сљедећи низ образаца

$$4)\begin{cases} tg\, R = \sqrt{\dfrac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}} \\[2ex] tg\, R_a = \sqrt{\dfrac{\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\,\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}} \\[2ex] tg\, R_b = \sqrt{\dfrac{\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\,\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\sin C-\frac{1}{2}\varepsilon)}} \\[2ex] tg\, R_c = \sqrt{\dfrac{\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\,\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}} \end{cases}$$

Сферни полупречник уписаног круга.

179. Узмимо (сл. 79 види страну 330), нека је O пол кругу, који је уписан у сферни троугао ABC, а D, E, F додирне тачке. Означимо са r велики лук, који везује пол



Сл. 79.

са једном од додирних тачака, дакле сферни полупречник уписаног круга. Пошто су отстојања сваког трougловог темена од обличњих додирних тачака једнака, то је збир лукова AE, BD, DC једнак половини троугловог обима, дакле је

$$AE = AF = s - a,\ BD = BF = s - b,\ CE = CD = s - c.$$

Из правоуглог троугла AOE добијамо сад

$$tg\,\frac{1}{2}A = \frac{tg\,r}{sin\,(s-a)},$$

одакле

$$1) \qquad tg\,r = tg\,\frac{1}{2}A\,sin\,(s-a);$$

замењујући овде $tg\,\frac{1}{2}A$ вредношћу из № 168 3) добијамо образац

$$2) \qquad tg\,r = \sqrt{\frac{sin\,(s-a)\,sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)}{sin\,s}}$$

Ако две и две стране троугла ABC продужимо дотле, докле се исте у тачкама A', B', C' још једанпут непресеку, придобићемо три нова сферна троугла $A'BC$, $AB'C$, ABC'; примењујући на сваки од тих троуглова образац 2) добићемо обрасце за полупречнике кругова, који по једну страну троугла ABC споља а остале две у њином продужењу дирају. Ево тих образаца:

$$3)\quad \left\{ \begin{aligned} tg\, r_a &= \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-b) \sin (s-c)}{\sin (s-a)}} \\ tg\, r_b &= \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a) \sin (s-c)}{\sin (s-b)}} \\ tg\, r_c &= \sqrt{\frac{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b)}{\sin (s-c)}} \end{aligned} \right.$$

Задатци.

1° Ако је R сферни полупречник круга, који је око троугла ABC описан, r сферни полупречник круга, који је у исти троугао уписан, а r_a сферни полупречник круга, који страну a троугла ABC споља, а остале две b и c у њином продужењу дира, то је:

$$cotg\, R = 2 \cos \frac{1}{2}\, a \cos \frac{1}{2}\, b \cos \frac{1}{2}\, c \frac{\sin A}{\sin a},$$

$$tg\, r = \frac{\sin b \sin c \sin A}{2 \sin s}$$

$$tg\, r_a = \frac{\sin b \sin c \sin A}{2 \sin (s-a)}$$

2° Ако је ε површина троугла ABC, ε', ε'', ε''' површине троуглова, који постају, кад се две и две стране троугла ABC продуже дотле, докле се исте у тачкама A', B', C' још једанпут непресеку и e површина суплементног или полног троугла, то је

$$tg\frac{1}{4}e=\sqrt{\frac{tg\frac{1}{4}\varepsilon'\,tg\frac{1}{4}\varepsilon''\,tg\frac{1}{4}\varepsilon'''}{tg\frac{1}{4}\varepsilon}}$$

3° Кад је у једном сферном троуглу

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}=1,$$

онда су две стране једнаке својим супротним углима, а трећа је суплеменат супротном јој углу; осим тога тригонометријска тангента једног од лукова $45^\circ+\frac{1}{2}a$, $45^\circ+\frac{1}{2}b$, $45^\circ+\frac{1}{2}c$ једнака је производу тангената осталих двају.

4° Ако је ε сферни сувишак троуглу ABC, то је:

$$tg\frac{1}{2}\varepsilon=\frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{1+\cos a+\cos b+\cos c}$$

$$tg\frac{1}{4}\varepsilon=\frac{1-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}$$

5° Ако је троугао ABC правоугао, онда је

$$tg\frac{1}{2}\varepsilon=tg\frac{1}{2}b\,tg\frac{1}{2}c.$$

6° У равностраном сферном троуглу је

$$\cos A=\frac{tg\frac{1}{2}a}{tg\,a}.$$

7° У равнокраком сферном троуглу је

$$sin \frac{1}{2} a = sin\, b\, sin \frac{1}{2} A\,,$$

$$cos\, b = cotg\, B\, cotg \frac{1}{2} A\,,$$

$$tg \frac{1}{2} a = tg\, b\, cos\, B\,,$$

$$cos \frac{1}{2} A = cos \frac{1}{2} a\, sin\, B.$$

8°. Ако су темена A, B, C од средине D стране BC једнако далеко, онда је

$$sin^2 \frac{1}{2} a = sin^2 \frac{1}{2} b + sin^2 \frac{1}{2} c \text{ или } 1 + cos\, a = cos\, b + cos\, c$$

9°. Ако су D, E, F средине страна c, b, a и α, β, γ велики луци, који везују E и F, D и F, D и E, то је

$$cos \frac{1}{2} \varepsilon = \frac{cos\, \alpha}{cos \frac{1}{2} a} = \frac{cos\, \beta}{cos \frac{1}{2} b} = \frac{cos\, \gamma}{cos \frac{1}{2} c}\,.$$

10°. У сферном троуглу синуси висина изврнуто су сразмерни синусима страна, на које су те висине спуштене.

11°. Два сферна троугла налазећа се на истој лопти имају једнаке површине, кад имају један једнак угао између страна, које су такве, да је производ котангената њиних половина у једном троуглу једнак производу котангената њиних половина у другом.

12°. Ако је α велики лук, који везује теме A са средином супротне стране a, то је

$$\cos \alpha = \frac{\cos b + \cos c}{2\cos \frac{1}{2} a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(b+c) \cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2} a}$$

13° Велики лук, који полови један угао сфернога троугла, дели супротну страну на два комада, којих су синуси сразмерни синусима налеглих страна.

14° Ако су a, b, c, d стране, а e, f дијагонале сферног четвороугла, око које га се може круг описати, то је

$$\sin \frac{1}{2} e \sin \frac{1}{2} f = \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} c + \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} d.$$

15°. Ако је α велики лук, који полови угао A сферпога троугла ABC, то је

$$tg\, \alpha = \frac{2 \sin b \sin c \cos \frac{1}{2} A}{\sin (b+c)}.$$

Разрешавање правоуглих сферних троуглова.

180. Може бити сферних троуглова са једним, два и три права угла. У последњем случају све су три стране четврти великих кругова, јер је свако теме пол супротној страни. У другом случају стране наспрам правих углова такође су једнаке једној четврти, а трећа је једнака супротном јој углу, јер је теме тога угла пол трећој страни. У оба та случаја неможе бити никаква задатка.

Остаје нам дакле да посматрамо правоугле троугле са једним само правим углом. При разрешавању таквих троуглова може бити свега шест различних случајева; али пре но што пређемо на посматрање појединих случајева, напоменућемо још једанпут, да се свака страна и сваки угао сферног троугла налазе између 0° и 180°. Одатле сљедује, да је један угао савршено одређен а тако исто и једна страна кад је дат њихов косинус или тангента или котангента; напротив кад им је дат синус, они нису потпуно одређени, јер датом синусу одговарају два суплементна угла или лука.

Напослетку напоменућемо још и ово: кад је вредност косинуса, тангенте или котангенте траженог угла или лука одречна, онда треба тражити суплеменат угла или лука, који суплеменат има исти косинус, тангенту и котангенту као и тражени лук али само са противним знаком.

181. *Први случај. — Дата је ипотенуза a и једна катета b, а траже се угли B, C и катета c.*

Обрасци помоћу којих се непознати комади могу израчунати јесу они у № 164.

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \quad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}, \quad \cos C = \frac{tg\, b}{tg\, a},$$

али је згодније употребити обрасце № 166.

$$tg\,\frac{1}{2}\,c = +\sqrt{tg\,\frac{1}{2}\,(a-b)\;tg\,\frac{1}{2}\,(a+b)}$$

$$tg\,(45^\circ + \frac{1}{2}\,B) = \pm\sqrt{\frac{tg\,\frac{1}{2}\,(a+b)}{tg\,\frac{1}{2}\,(a-b)}}$$

$$tg\,\frac{1}{2}\,C = +\sqrt{\frac{\sin\,(a-b)}{\sin\,(a+b)}}\,.$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos b + \cos c}{2\cos \frac{1}{2} a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(b+c) \cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2} a}$$

13° Велики лук, који полови један угао сфернога троугла, дели супротну страну на два комада, којих су синуси сразмерни синусима налеглих страна.

14° Ако су a, b, c, d стране, а e, f дијагонале сферног четвороугла, око које га се може круг описати, то је

$$\sin \frac{1}{2} e \sin \frac{1}{2} f = \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} c + \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} d.$$

15°. Ако је α велики лук, који полови угао A сфернога троугла ABC, то је

$$tg\, \alpha = \frac{2 \sin b \sin c \cos \frac{1}{2} A}{\sin (b+c)}.$$

Разрешавање правоуглих сферних троуглова.

180. Може бити сферних троуглова са једним, два и три права угла. У последњем случају све су три стране четврти великих кругова, јер је свако теме пол супротној страни. У другом случају стране наспрам правих углова такође су једнаке једној четврти, а трећа је једнака супротном јој углу, јер је теме тога угла пол трећој страни. У оба та случаја неможе бити никаква задатка.

Остаје нам дакле да посматрамо правоугле троугле са једним само правим углом. При разрешавању таквих троуглова може бити свега шест различних случајева; али пре но што пређемо на посматрање појединих случајева, напоменућемо још једанпут, да се свака страна и сваки угао сферснога троугла налазе између 0° и 180°. Одатле сљедује, да је један угао савршено одређен а тако исто и једна страна кад је дат њихов косинус или тангента или котангента; напротив кад им је дат синус, они нису потпуно одређени, јер датом синусу одговарају два суплементна угла или лука.

Напослетку напоменућемо још и ово: кад је вредност косинуса, тангенте или котангенте траженог угла или лука одречна, онда треба тражити суплеменат угла или лука, који суплеменат има исти косинус, тангенту и котангенту као и тражени лук али само са противним знаком.

181. *Први случај. — Дата је ипотенуза a и једна катета b, а траже се угли B, C и катета c.*

Обрасци помоћу којих се непознати комади могу израчунати јесу они у № 164.

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b}, \quad \sin B = \frac{\sin b}{\sin a}, \quad \cos C = \frac{tg\, b}{tg\, a},$$

али је згодније употребити обрасце № 166.

$$tg \frac{1}{2} c = + \sqrt{tg \frac{1}{2} (a - b)\; tg \frac{1}{2} (a + b)}$$

$$tg\,(45^\circ + \frac{1}{2} B) = \pm \sqrt{\frac{tg \frac{1}{2} (a + b)}{tg \frac{1}{2} (a - b)}}$$

$$tg \frac{1}{2} C = + \sqrt{\frac{\sin (a - b)}{\sin (a + b)}}.$$

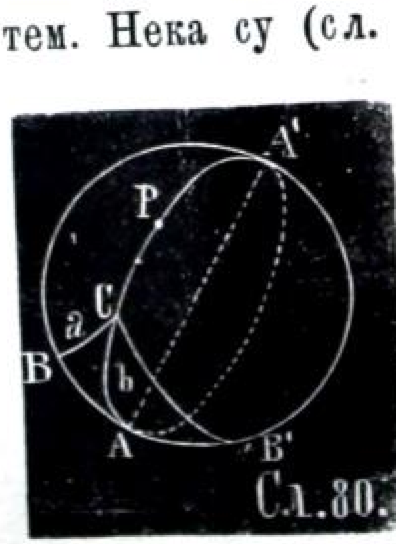
Код ових последњих образаца морају се као и код горњих само четири логаритма тражити, али су они од горњих удеснији, зато што дају непознате из њиних тангената.

Да би задатак био можан, треба, а и довољно је, да је $sin\,a > sin\,b$; јер кад је тај захтев испуњен вредност за $sin\,B$ мања је од јединице а вредности за $cos\,c$ и $cos\,C$ налазе се између -1 и $+1$. Поменути захтев биће испуњен у случају кад је $b < 90°$, ако је $a > b$ или $a < 180° - b$; а у случају, кад је $b > 90°$, ако је $a < b$ или $a > 180° - b$. Као што се дакле види, услов можности задатка састоји се у томе, да се ипотенуза налази између дате стране и њеног суплемента.

Кад је услов можности задатка испуњен, задатак ће имати само једно разрешење и ако се угао B тражи из свог синуса; јер познато је, да катета и супротни јој угао морају бити истога рода.

Такође је лако дознати, са којим се знаком има узети вредност за $tg\,(45° + \frac{1}{2}B)$, кад се место првих служимо другим обрасцима. И заиста пошто су B и b истога рода, у напред се може знати, да ли је угао $45° + \frac{1}{2}B$ већи или мањи од $90°$.

До истих закључака може се доћи и геометријским путем. Нека су (сл. 80) ABA', APA' два велика круга, који један на другом управно стоје и којима је пречник AA' пресек. Пренесимо на великом кругу APA' $AC = b$. Сви луци повучени са тачке C ка различним тачкама круга ABA' налазе се (№ 206) између $b = AC$ и $180° - b = A'C$, и потоме троугао из комада a и b биће само тако можан, ако се a налази из-



Сл. 80.

међу b и $180^\circ - b$. Кад је тај услов испуњен, добићемо тражени троугао, ако из тачке C као пола и са тетивом лука a као полупречником опишемо један круг, који ће у тачки B пресећи круг ABA', па затим тачку B вежемо са тачком C посредством једног великог лука. Круг, који је из C као пола описан, сећиће круг ABA' осим тачке B још у једној тачки B'; ако ову последњу вежемо са тачком C, добићемо још један троугао, који је са пређашњим симетричан; али у сферној тригонометрији два симетрична троугла рачунају се увек као једно разрешење, јер су комади у оба таква троугла исти, и добивају се истим рачуном.

182. Други случај — *Дата је ипотенуза a, и коси угао B, траже се катете b, c и коси угао C.*

Обрасци, помоћу којих се непознати комади израчунавају, јесу

$$\sin b = \sin a \sin B, \quad \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cos B, \quad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{cotg} B}{\cos a}.$$

Ако се катета b неможе довољно тачно из свог синуса израчунати, онда треба најпре израчунати C или c, а затим b помоћу једног од сљедећих образаца

$$\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B, \quad \operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C.$$

Задатак је у овом случају увек можан и има само једно разрешење, јер катета b мора бити истог рода са супротним јој углом B.

183. Трећи случај. — *Дате су обе катете b, c, тражe се ипотенуза a и коси угли B, C.*

Обрасци за израчунавање непознатих комада јесу

$$\cos a = \cos b \cos c, \quad \operatorname{tg} B = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b}.$$

Ако се ипотенуза a неможе довољно тачно из свог косинуса израчунати, онда треба најпре израчунати B или C а затим a помоћу једног од образаца

$$tg\, a = \frac{tg\, c}{cos\, B}, \quad tg\, a = \frac{tg\, b}{cos\, C}.$$

Задатак је у овом случају такође увек можан и има само једно разрешење.

184. Четврти случај. — *Дата је страна b и налегли угао C, траже се угао B, ипотенуза a и катета c.*

Непознати комади налазе се помоћу образаца

$$cos\, B = cos\, b\, sin\, C, \quad tg\, a = \frac{tg\, b}{cos\, C}, \quad tg\, c = sin\, b\, tg\, C.$$

Ако се угао B неможе из свог косинуса довољно тачно израчунати, онда треба најпре изнаћи a или c, па се онда B може добити помоћу једног од образаца

$$cotg\, B = cos\, a\, tg\, C, \quad cotg\, B = sin\, c\, cotg\, b.$$

И овај је задатак увек можан и има само једно разрешење.

185. Пети случај. — *Дата је једна катета b и супротни угао B, тражe се ипотенуза a, катета c и угао C.*

Непознати комади могу се израчунати помоћу следећих образаца

$$sin\, a = \frac{sin\, b}{sin\, B}, \quad sin\, c = \frac{tg\, b}{tg\, A}, \quad sin\, C = \frac{cos\, B}{cos\, b},$$

но боље је употребити обрасце № 166

$$tg\,(45^{\circ}+\frac{1}{2}\,a) = \pm\sqrt{\frac{tg\,\frac{1}{2}\,(B+b)}{tg\,\frac{1}{2}\,(B-b)}},$$

$$tg\,(45^{\circ}+\frac{1}{2}\,b) = \pm\sqrt{\frac{sin\,(B+b)}{sin\,(B-b)}},$$

$$tg\,(45^{\circ}+\frac{1}{2}\,c) = \pm\sqrt{cotg\,\frac{1}{2}\,(B+b)\,cotg\,\frac{1}{2}\,(B-b)},$$

јер прво исти дају непознате комаде из њихових тангената, а друго само се четири логаритма имају тражити, док међутим код првих шест.

Но употребили се први или други обрасци, у оба случаја добиће се за сваку непознату по две суплементне вредности; треба дакле знати, које од тих вредности иду заједно.

Ако је најпре $B = b$ онда је

$$sin\,a = sin\,c = sin\,C = 1\,, \quad \text{и} \quad a = c = C = 90^{\circ},$$

троугао дакле има два права угла.

Претпоставимо сад да је B различно од b.

1° Ако је $B < 90^{\circ}$, можност задатка захтева, да је и $b < 90^{\circ}$, а осим тога да је $B > b$. Узмимо нека је тај захтев испуњен; пошто је $cos\,b$ положан, то на основу обрасца $cos\,a = cos\,b\,cos\,c$, a и c морају бити у исти мах мањи или већи од 90°; то исто вреди за c и C. Ако су дакле a', c', C' вредности мање од 90°, које таблице дају за a c, C, имаћемо сљедећа два разрешења;

$$a = a', \quad c = c', \quad C = C';$$

$$a = 180^{\circ} - a', \quad c = 180^{\circ} - c', \quad C = 180^{\circ} - C'.$$

2° Ако је $B > 90^{\circ}$ можност задатка захтева, да је и $b > 90^{\circ}$, а осим тога да је $B < b$. Узмимо нека је тај захтев испуњен; пошто је $\cos b$ одречан, то на основу обрасца $\cos a = \cos b \cos c$ a и c морају бити различног рода, то ће рећи један већи а други мањи од 90°; међутим c и C морају бити истог рода. Ако су дакле a', c', C' вредности, које таблице дају за a, c, C, имаћемо сљедећа два разрешења.

$$a = a', \quad c = 180^\circ - c', \quad C = 180^\circ - C';$$

$$a = 180^\circ - a', \quad c = c', \quad C = C'.$$

У осталом може се и геометријски доказати, да, кад је задатак можан, он мора имати два разрешења, осим у случају кад тражени троугао има два права угла.

Узмимо најпре нека је дани угао $B < 90^\circ$. Да би добили тражени троугао, треба нам најпре описати (сл. 81) два велика круга BDB', BEB' нагнута један према другом под углом B, а затим један велики круг управно на круг BDB' тако, да лук AC тога круга налазећи се у кришки $BDB'E$ буде $= b$. Већ је познато, да сви кругови, који стоје управно на великом кругу BDB' морају пролазити кроз његов пол P; нека је круг DPD' онај, који стоји управно и на BDB' и на BEB'; пол је томе кругу у B, а лук DE тога круга налазећи се у кришки $BDB'E$ једнак је углу B; лук PE мањи је од PC (№ 206), дакле $ED > CA$ или $B > CA$. Услов можности задатка јесте дакле $B > b$. Ако је он испуњен, описаћемо из пола P са тетивом лука $90^\circ - b$ као полупречником, или што је свеједно са сферним полупречником $90^\circ - b$ један круг, који ће сећи лук BEB' у двема тачкама; велики круг повучен кроз пол P и једну од тих тачака разделиће кришку $BDB'E$ на два троугла ABC, $AB'C$, који оба задатку одговарају.

Сл. 81

Нека је сад дани угао $B > 90^\circ$. Опишимо два велика круга $BD'B'$, BEB' (сл. 81) нагнута један према другом под углом B. Од свију лукова, који су у кришки $BD'B'E$ а стоје управно на $BD'B'$, најмањи је лук $D'E$, који је једнак углу B; да би задатак био можан, треба дакле да је $B < b$. Ако је тај захтев испуњен, описаћемо из пола P са тетивом лука $b - 90^\circ$ као полупречником или што је свеједно са сферним полупречником $b - 90^\circ$ један круг, који ће сећи круг BEB' у двема тачкама; велики круг повучен кроз P и једну од тих тачака разделиће кришку $BD'B'E$ на два троугла, који оба задатку одговарају.

186. **Шести случај.** — *Дата су два коса угла B, C, траже се ипотенуза a и катете b, c.*

Непознати комади могу се наћи помоћу образаца

$$\cos a = \cotg B \cotg C, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}, \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B},$$

али је боље употребити обрасце № 166

$$tg\,\frac{1}{2}\,a = +\sqrt{\frac{\cos\,(180^\circ - B - C)}{\cos\,(B - C)}},$$

$$tg\,\frac{1}{2}\,b = +\sqrt{tg\left[\frac{1}{2}(B+C) - 45^\circ\right] tg\left[\frac{1}{2}(B-C) + 45^\circ\right]},$$

$$tg\,\frac{1}{2}\,c = +\sqrt{tg\left[\frac{1}{2}(B+C) - 45^\circ\right] tg\left[\frac{1}{2}(C-B) + 45^\circ\right]},$$

јер се помоћу њих непознати комади добијају из својих тангената, а после мање се логаритама има тражити но код горњих образаца.

Услови можности задатка јесу: 1° збир $B + C$ мора се налазити између 90° и 270°; 2° разлика $B - C$ мора се налазити између -90° и $+90^\circ$. Ако је задатак можан, он ће имати само једно разрешење.

Разрешавање ма каквих сферних троуглова.

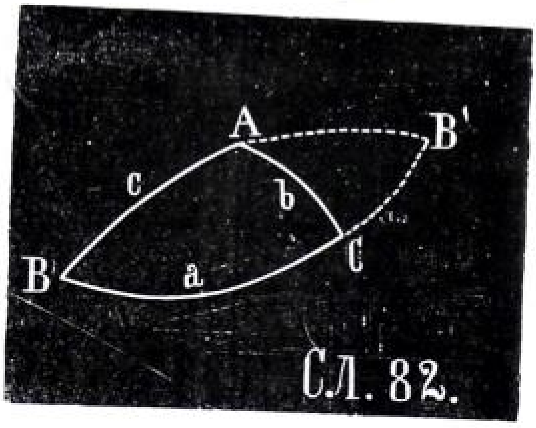
187. Има неколико прилика, у којима се разрешавање косоуглог троугла може свести на разрешавање правоуглог.

1°. Ако су дата три комада сфернога троугла, међу којима се налази једна страна једнака 90°, одговарајући јој угао у суплементном сферном троуглу биће такође $= 90^\circ$, и потоме исти троугао правоугао. Осим тога биће позната још два од осталих пет комада суплементног троугла; он ће се дакле моћи разрешити, и пошто је то учињено, суплементи његових страна и углова биће угли и стране траженога троугла. Но може се троугао, у којег је једна страна $= 90^\circ$, разрешити и помоћу образаца № 167.

2°. Ако се међу датим комадима налазе две једнаке стране a, b, или два једнака угла A, B, у којима је случајевима тражени троугао равнокрак, управна спуштена са темена C на супротну страну AB разделиће троугао на два једнака правоугла троугла. Разрешењем једног од тих троуглова дознаћемо и комаде траженога троугла ABC.

3°. Ако се међу познатим комадима налазе две стране a, b, или два угла A, B, којих је збир $= 180^\circ$, то продужимо (сл. 82) стране a, c дотле, докле се исте у тачки B' још једанпут непресеку. Троугао $AB'C$, који се на тај начин добија, имаће две једнаке стране b и CB' због $CB' = 180^\circ - a$, или пак два једнака угла B' и CAB' због $B' = B = 180^\circ - A$ и $CAB' = 180^\circ - A$. Разрешавање троугла $AB'C$ своди се, као што смо видли на разрешавање једног правоуглог троугла; а кад су комади троугла

AB'C познати, онда су познати и комади троугла *ABC*.



Сл. 82.

При разрешавању троуглова уопште може бити свега шест различних случајева. Могу се дати: 1° три стране; 2° три угла; 3° две стране и захваћени угао; 4° једна страна и два налегла угла; 5° две стране и угао наспрам једне од њих, и 6° два угла и страна наспрам једног од њих. Помоћу суплементног троугла могла би се три од ових шест случајева свести на остала три; но ми ћемо при свем том да покажемо, како се у свих тих шест случајева непознати комади троугла непосредно израчунавају.

Први и други случај. Дате су три стране или три угла.

188. *Прва метода.* — Кад су дате три стране, непознати угли могу се наћи помоћу образаца 1), 2) или 3) у № 168; из више пута поменутог узрока најбоље је од тих образаца употребити оне под 3) то јест:

$$tg\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\,\sin(s-c)}{\sin s\,\sin(s-a)}},$$

$$tg\,\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\,\sin(s-c)}{\sin s\,\sin(s-b)}},$$

$$tg\,\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\,\sin(s-b)}{\sin s\,\sin(s-c)}}.$$

Ако су дати угли, непознате стране могу се израчунати помоћу образаца под 5), 6) или 7) у № 169, но најбоље је употребити оне под 7) то јест:

$$tg\,\frac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\,\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}},$$

$$tg\,\frac{1}{2}\,b = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\,\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}},$$

$$tg\,\frac{1}{2}\,c = \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\,\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}}.$$

Да би у првом случају, кад су дате три стране, задатак био можан, треба, као што је из геометрије познато, 1° да је збир трију страна мањи од 360°; 2° да је свака страна мања од збира осталих двеју. Исто тако да би задатак био можан у другом случају, кад су три угла дата, треба 1° да се сферни сувишак (ексцес) налази између 0° и 360°; 2° да је сваки угао већи од половине сферног сувишка. До тих истих услова долази се и претресом горњих образаца.

И доиста, да би у првом случају задатак био можан, треба да су угли A, B, C посебице мањи од 180°. Да би сад $A < 180^\circ$ било или што је свеједно $\frac{1}{2}A < 90^\circ$, треба да је вредност за $tg\,\frac{1}{2}\,A$ коначна и положна количина. Вредност за $tg\,\frac{1}{2}\,A$ биће пак положна и коначна, ако је израз под кореним знаком то јест

$$\frac{\sin(s-b)\,\sin(s-c)}{\sin s\,\sin(s-a)}$$

положан и коначан, а зато се изискује, да су му бројилац и именилац од нуле различни и једнако означени. Ови захтеви биће испуњени, ако су количине s, $s-a$, $s-b$, $s-c$ или све положне, или све одречне, или ако су две ма које положне а остале две одречне. Но последње две претпоставке немогу се допустити, јер кад би на пример узели да је

$$\sin s < 0 \quad \text{и} \quad \sin(s-a) < 0, \quad \text{или} \quad \sin(s-a) < 0 \text{ и}$$
$$\sin(s-b) < 0$$

онда би одатле сљедовало

$$\sin s + \sin(s-a) < 0 \text{ то јест } 2 \sin \frac{1}{2}(b+c) \cos \frac{1}{2} a < 0,$$

или

$$\sin(s-a) + \sin(s-b) < 0 \text{ то јест}$$
$$2 \sin \frac{1}{2} c \cos \frac{1}{2}(a-b) < 0;$$

но ниједно од овога двога неможе бити, јер је $\sin \frac{1}{2}(b+c) > o$ зато што је $\frac{1}{2}(b+c) < 180^\circ$, и јер су и $\cos \frac{1}{2}(a-b)$, $\cos \frac{1}{2} a$, и $\sin \frac{1}{2} c$ посебице $> o$ зато, што су $\frac{1}{2}(a-b)$, $\frac{1}{2} a$, и $\frac{1}{2} c$, посебице $< 90^\circ$. На исти начин доказује се, да и ма које друге две од четири горе поменуте количине немогу бити у исти мах одречне. И тако да би израз

$$\frac{\sin(s-b) \sin(s-c)}{\sin s \sin(s-a)}$$

био коначан и положан, треба да је

$$\sin s > o, \ \sin(s-a) > o, \ \sin(s-b) > o, \ \sin(s-c) > o.$$

Пошто је сад $s < 270^\circ$, то први услов $\sin s > o$ изискује, да је

$$s < 180^\circ \quad \text{или} \quad 2\,s < 360^\circ,$$

то ће рећи збир троуглових страна мора бити мањи од 360° или једног великог круга.

Осим тога луци $s-a$, $s-b$, $s-c$ морају бити положни, јер кад би један од њих, на пример $s-a$, био одречан, онда би сљедовало $a - s > 180^\circ$, јер је $\sin (s-a) > o$, дакле би страна a била већа од 180°, а то неможе бити. Дакле мора бити

$$s - a > o, \quad s - b > o, \quad s - c > o,$$

или

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

По овоме једини услови можности задатка у првом случају јесу они, које смо горе споменули. До тих истих услова долазимо претресом образаца за $tg\,\frac{1}{2}\,B$, $tg\,\frac{1}{2}\,C$, а тако исто и претресом образаца нађених за синусе и косинусе углова $\frac{1}{2}\,A$, $\frac{1}{2}\,B$, $\frac{1}{2}\,C$.

Претресајући на сличан начин горње обрасце за $tg\,\frac{1}{2}\,a$, $tg\,\frac{1}{2}\,b$, $tg\,\frac{1}{2}\,c$ наћићемо да су једини услови можности задатка у другом случају, кад су дата три угла, они горе поменути.

189. *Друга метода*. — Кад се у првом и другом случају траже сва три непозната комада, могу се место горњих образаца употребити они под 12), 15) и 16) у № 177. При употреби тих образаца имају се тражити само четири логаритма, као и при употреби горњих образаца: али су они

згоднији од горњих због тога, што по изналажају количина $A - \frac{1}{2}\varepsilon$, $B - \frac{1}{2}\varepsilon$, $C - \frac{1}{2}\varepsilon$ и $\frac{1}{2}\varepsilon$, или пак количина s, $s - a$, $s - b$, $s - c$, имамо начина контролисати тачност израчунатих количина.

190. Пример. Дате су три стране

$$a = 127^\circ 46' 29{\cdot}69'', \quad b = 84^\circ 58' 31{\cdot}27'', \quad c = 72^\circ 43' 38{\cdot}92'';$$

траже се угли A, B, C.

Први начин.

$s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ $142^\circ 44' 19{\cdot}94''$

$s-a$ . . . . . . $14^\circ 57' 50{\cdot}25''$

$s-b$ . . . . . . $57^\circ 45' 48{\cdot}67''$

$s-c$ . . . . . . $70^\circ\ 0' 41{\cdot}02''$

$lg\ sin\ s$ . . . . $9{\cdot}7820773-10$

$lg\ sin\,(s-a)$. $9{\cdot}4119754-10$

$lg\ sin\,(s-b)$. $9{\cdot}9272952-10$

$lg\ sin\,(s-c)$. $9{\cdot}9730173-10$

Рачунање угла B.

$$tg\,\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{sin\,(s-a)\,sin\,(s-c)}{sin\,s\,sin\,(s-b)}}$$

$lg\ sin\,(s-a)$. . . $9{\cdot}4119754\text{-}10$

$lg\ sin\,(s-c)$. . . $9{\cdot}9730173\text{-}10$

$-lg.sin\,(s-b)$ $0{\cdot}0727048$

Рачунање угла A.

$$tg\,\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{sin\,(s-b)\,sin\,(s-c)}{sin\,s\,sin\,(s-a)}}$$

$lg\ sin\,(s-b)$. . . $9{\cdot}9272952\text{-}10$

$lg\ sin\,(s-c)$. . . $9{\cdot}9730173\text{-}10$

$-log\ sin\ s$. . . . $9{\cdot}2179227\text{-}10$

$-lg\ sin\,(s-a)$. $0{\cdot}5880246\text{-}10$

Збир . . . . . $20{\cdot}7062598\text{-}10$

$lg\ tg\,\frac{1}{2}A$ . . . $0{\cdot}3531299$

$\frac{1}{2}A$ . . . . . . $66^\circ\ 5'\ 1{\cdot}91''$

A . . . . $132^\circ\ 10'\ 3{\cdot}82''$

Рачунање угла C.

$$tg\,\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{sin\,(s-a)\,sin\,(s-b)}{sin\,s\,sin\,(s-c)}}$$

$-\log \sin s$ . . . 0·2179227

Збир . . . . 19·6756202-20

$\lg tg \frac{1}{2} B$ . . . 9·8378101-10

$\frac{1}{2} B$ . . . . 34° 32′ 29·86″

B . . . . 68° 4′ 59·72″

$\lg \sin (s-a)$ . . . 9·4119754-10

$\lg \sin (s-b)$ . . . 9·9272952-10

$-\lg \sin s$ . . . . 0·2179227

$-\lg \sin (s-c)$. 0·0269827

Збир. . . . . 19·5841760-20

$\lg tg \frac{1}{2} C$ . . . 9·7920880-10

$\frac{1}{2} C$ . . . . . . 31° 46′ 51·507″

C . . . . 63° 33′ 43·01″

Други начин.

(По обрасцима 12) и 15) у № 177).

$\frac{1}{2} s$	71° 22′ 9·97″	$\lg tg \frac{1}{2} s$.	0·4722011
$\frac{1}{2} (s-a)$. . . .	7°28′55·125″	$\lg tg \frac{1}{2} (s-a)$.	9·1183723-10
$\frac{1}{2} (s-b)$ . .	28° 52′ 54·335″	$\lg tg \frac{1}{2} (s-b)$.	9·7416356-10
$\frac{1}{2} (s-c)$	35° 0′ 20·51″	$\lg tg \frac{1}{2} (s-c)$.	9·8453187-10

Рачунање сферног сувишка ε.

$\lg tg \frac{1}{2} s$ . . . . 0·4722011

$\lg tg \frac{1}{2} (s-a)$ 9·1183723-10

$\lg tg \frac{1}{2} (s-b)$ 9·7416356-10

Рачунање угла A.

$\lg tg \frac{1}{2} (s-b)$. 9·7416356-10

$\lg tg \frac{1}{2} (s-c)$. 9·8453187-10

$-l.tg \frac{1}{2} (s-a)$. 0·8816277

$lg\,tg\,\frac{1}{2}(s-c)$. 9·8453187-10

Збир . . . . 29·1775277-30

$lg\,tg\,\frac{1}{4}\varepsilon$ . . . 9·5887638-10

$\frac{1}{4}\varepsilon$ . . . . . . $21^\circ\,12'\,11{\cdot}63''$

ε . . . . $84^\circ\,48'\,46{\cdot}52''$

Рачунање угла B.

$lg\,tg\,\frac{1}{2}(s-a)$ 9·1183723-10

$lg\,tg\,\frac{1}{2}(s-c)$ 9·8453187-10

$-l.\,tg\frac{1}{2}(s-b)$ 0·2583644

$-l.\,tg\frac{1}{2}\,s$ . . 9·5277989-10

Збир. . . . 28·7498543-30

$l.tg\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$.9·3749272-10

$\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon$. . $13^\circ\,20'\,18{\cdot}22''$

$\frac{1}{2}B$ . . . . . . $34^\circ\,32'\,29{\cdot}85''$

B . . . . $69^\circ\;\;4'\,59{\cdot}70''$

$-lg\,tg\,\frac{1}{2}\,s$. . . 9·5277989-10

Збир. . . . . 29·9963809-30

$lg\,tg\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$. 9·9981904-10

$\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon$. . . $44^\circ\,52'\,50{\cdot}28''$

$\frac{1}{2}A$. . . . . $66^\circ\;\;5'\;\;1{\cdot}91''$

A . . . . $132^\circ\,10'\,3{\cdot}82''$.

Рачунање угла C.

$lg\,tg\,\frac{1}{2}(s-a)$. 9·1183723-10

$lg\,tg\,\frac{1}{2}(s-b)$. 9·7416356-10

$-lg\,tg\frac{1}{2}(s-c)$. 0·1546813

$-lg\,tg\frac{1}{2}\,s$ . . . 9·5277989-10

Збир. . . . . 28·5424881-30

$lg\,tg\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$9·2712440-10

$\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon$. . . $10^\circ\,34'\,39{\cdot}87''$

$\frac{1}{2}C$. . . . . . . $31^\circ\,46'\,51{\cdot}50''$

C . . . . $63^\circ\,33'\,43{\cdot}02''$.

Контрола радње:

$$\frac{1}{4}\varepsilon+\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon\right)+\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon\right)+\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon\right)=90^{\circ}.$$

191. **Пример.** Дата су три угла:

$A=64^{\circ}48'22{\cdot}49''$, $B=39^{\circ}27'19{\cdot}35''$, $C=128^{\circ}57'46{\cdot}52''$,

траже се стране a, b, c.

Први начин.

$\frac{1}{2}\varepsilon \ldots\ldots\; 26^{\circ}\,36'\,44{\cdot}18''$

$A-\frac{1}{2}\varepsilon \ldots\; 38^{\circ}\,11'\,38{\cdot}31''$

$B-\frac{1}{2}\varepsilon \ldots\; 12^{\circ}\,50'\,35{\cdot}17''$

$C-\frac{1}{2}\varepsilon \ldots\; 102^{\circ}\,21'\,2{\cdot}34''$

$\log\sin\frac{1}{2}\varepsilon \ldots\; 9{\cdot}6512302\text{-}10$

$l.\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\; 9{\cdot}7912174\text{-}10$

$l.\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)\; 9{\cdot}3469043\text{-}10$

$l.\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)\; 9{\cdot}9898309\text{-}10$

Рачунање стране b

$$tg\,\frac{1}{2}b=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\ \sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}}$$

Рачунање стране a.

$$tg\,\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\ \sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}}$$

$\log\sin\frac{1}{2}\varepsilon \ldots\; 9{\cdot}6512302\text{-}10$

$l.\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\,.\; 9{\cdot}7912174\text{-}10$

$-l.\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)\,0{\cdot}6530957$

$-l.\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)\,0{\cdot}0101691$

Збир. . . . . $20{\cdot}1057124\text{-}20$

$lg\,tg\,\frac{1}{2}a \ldots\; 0{\cdot}0528562$

$\frac{1}{2}a \ldots\ldots\; 48^{\circ}\,28'\,40{\cdot}94''$

$a \ldots\ldots\ldots\; 96^{\circ}\,57'\,21{\cdot}88''$

Рачунање стране c.

$$tg\,\frac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\ \sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)}}$$

$\log \sin \frac{1}{2}\varepsilon$	9·6512302-10	$\log \sin \frac{1}{2}\varepsilon$	9·6512302-10
$l. \sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)$	9·3469043-10	$l. \sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)$	9·9898309-10
$-l \sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)$	0·2087826	$-l. \sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)$	0·2087826
$-l \sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)$	0·0101691	$-l. \sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)$	0·6530957
Збир	19·2170862-20	Збир	20·5029394-20
$lg\, tg \frac{1}{2} b$	9·6085431-10	$lg\, tg \frac{1}{2} c$	0·2514697
$\frac{1}{2} b$	22° 5′ 52·56″	$\frac{1}{2} c$	60° 43′ 54·89″
b	44° 11′ 45·13″	c	121° 27′ 49·78″

Други начин.

(По обрасцима 16) у № 177).

$\frac{1}{4}\varepsilon$	13° 18′ 22·09″	$lg\, tg \frac{1}{4}\varepsilon$	9·3738367-10
$\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon$	19° 5′ 49·155″	$lg\, tg \left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$	9·5393549-10
$\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon$	6° 25′ 17·585″	$lg\, tg \left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$	9·0513411-10
$\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon$	51° 10′ 31·17″	$lg\, tg \left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$	0·0943498

Израчунавање од s.		Израчунавање од $s-a$.	
$lg\, tg \frac{1}{4}\varepsilon$	9·3738367-10	$lg\, tg \frac{1}{4}\varepsilon$	9·3738367-10
$-l. tg\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$	0·4606451	$lg\, tg \left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$	9·0513411-10

$-l.tg\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$ 0·9486589	$lg\ tg\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$. . 0·0943498
$-l.tg\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$ 9·9056502-10	$-l.tg\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$. 0·4606451
Збир. . . . 20·6887909-20	Збир. . . . . 18·9801727-20
$lg\ tg\ \frac{1}{2}\ s$ . . . 0·3443955	$lg\ tg\ \frac{1}{2}(s-a)$. . 9·4900864-10
$\frac{1}{2}\ s$. . . . . . 65° 39′ 14·207″	$\frac{1}{2}\ (s-a)$. . . . . 17° 10′ 33·27″
s . . . . 131° 18′ 28·414″	$s-a$ . . . . 34° 21′ 6·54″
Израчунавање од $s-b$.	Израчунавање од $s-c$.
$lg\ tg\ \frac{1}{4}\ \varepsilon$. . . . 9·3738367-10	$lg\ tg\ \frac{1}{4}\ \varepsilon$ . . . . 9·3738367-10
$lg\ tg\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$ 9·5395549-10	$lg\ tg\left(\frac{1}{2}A-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$. . 9·5393549-10
$lg\ tg\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$ 0·0943498	$lg\ tg\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$. . 9·0513411-10
$-l.tg\left(\frac{1}{2}B-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$. 0·9486589	$-l.tg\left(\frac{1}{2}C-\frac{1}{4}\varepsilon\right)$. . 9·9056502-10
Збир. . . . 19·9562003-20	Збир. . . . 37·8701829-40
$lg\ tg\ \frac{1}{2}(s-b)$. 9·9781002-10	$lg\ tg\ \frac{1}{2}(s-c)$. . 8·9350915-10
$\frac{1}{2}\ (s-b)$ . . . 43° 33′ 21·64″	$\frac{1}{2}\ (s-c)$ . . . . 4° 55′ 19·297″
$(s-b)$ . . . . . 87° 6′ 43·28″	$s-c$ . . . . 9° 50′ 38·59″

$a = 96°57'21·87''$, $b = 44°11'45·13''$, $c = 121°27'49·82''$.

Контрола радње:

$$\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}(s-a)+\frac{1}{2}(s-b)+\frac{1}{2}(s-c)=131°18'28·41''.$$

Трећи и четврти случај. Дате су дв ие и захваћени угао, или једна страна и два на угла.

192. *Прва метода.* Нека су дати комад C или A, B, c. Кад се сва три непозната комада т адатак се најзгодније решава помоћу неперових образа

$$1) \qquad tg\frac{1}{2}(A+B) = cotg\,\frac{1}{2}C\frac{\cos\frac{1}{2}b)}{\cos\frac{1}{2})},$$

$$2) \qquad tg\frac{1}{2}(A-B) = cotg\,\frac{1}{2}C\frac{\sin\frac{1}{2}(a}{\sin\frac{1}{2}(a-},$$

$$3) \qquad tg\frac{1}{2}(a+b) = tg\,\frac{1}{2}c\frac{\cos\frac{1}{2}(A-}{\cos\frac{1}{2}(A+B}$$

$$4) \qquad tg\frac{1}{2}(a-b) = tg\frac{1}{2}c\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}.$$

Ако су a, b, C дати комади, онда прва два обрасца дају полузбир и полуразлику углова A и B, одакле се ови после лако находе; кад су угли A, B израчунати, онда се страна c израчунава помоћу једног од последња два обрасца.

Ако ли су пак A, B, c дати комади, онда последња два обрасца дају полузбир и полуразлику непознатих страна a и b, одакле се после исте стране лако добијају; пошто су стране a, рачунате, онда угао C налази се помоћу једног од пр обрасца.

Пошто ти комади налазе између 0° и 180°, то оба ова за имају само једно разрешење, и осим тога увек су мо

Напо приметићемо да се при разрешавању задатка како у т тако и у четвртом случају имају тражити свега се д зличних логаритама, и то пет при израчунавању уг A, B или страна a, b, и после још два при израчуна стране c или угла C.

19 руга метода. — Ако се непознати комади желе непоср и независно један од другог изнаћи онда треба употре обрасце № 156 и следећих.

ко су a, b, C дати комади, онда треба узети обрас

$$)\quad \begin{cases} \cot g\, a \; \sin b - \cot g\, A \; \sin C = \cos b \; \cos C, \\ \cot g\, b \; \sin a - \cot g\, B \; \sin C = \cos a \; \cos C, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{cases}$$

Ови обрасци, као што се види, нису згодни за логариски рачун, али увођењем двају помоћних углова могу се ли за то удесити.

Из прва два обрасца под 1) следује

$$\cot g\, A = \frac{\cot g\, a \;\sin b - \cos b \;\cos C}{\sin C}$$

$$= \frac{\cot g\, a}{\sin C}(\sin b - tg\, a \cos C \cos b),$$

$$cotg\,B = \frac{cotg\,b\ \sin a - \cos a\ \cos C}{\sin C}$$

$$= \frac{cotg\,b}{\sin C}\,(\sin a - tg\,b\ \cos C\ \cos a).$$

Означавајући са φ и ψ два између 0° и 180° лежећа помоћна угла, који су такви да је

$$2)\qquad tg\,\varphi = tg\,a\ \cos C, \qquad tg\,\psi = tg\,b\ \cos C,$$

добијамо даље

$$cotg\,A = \frac{cotg\,a}{\sin C}\,(\sin b - tg\,\varphi\ \cos b) = \frac{cotg\,a\ \sin\,(b-\varphi)}{\sin C\ \cos\varphi}$$

$$cotg\,B = \frac{cotg\,b}{\sin C}\,(\sin a - tg\,\psi\ \cos a) = \frac{cotg\,b\ \sin\,(a-\psi)}{\sin C\ \cos\psi}$$

или што је свеједно

$$tg\,A = \frac{\sin C\ \cos\varphi\ tg\,a}{\sin\,(b-\varphi)}, \qquad tg\,B = \frac{\sin C\ \cos\psi\ tg\,b}{\sin\,(a-\psi)}$$

замењујући у овим једначинама $tg\,a$ и $tg\,b$ њиним вредностима, које стоје у обрасцима под 2) добијамо напослетку

$$3)\qquad tg\,A = \frac{\sin\varphi\ tg\,C}{\sin(b-\varphi)}, \qquad tg\,B = \frac{\sin\psi\ tg\,C}{\sin\,(a-\psi)}.$$

Из трећег обрасца под 1) сљедује

$$\cos c = \cos a\ (\cos b + \sin b\ \ tg\,a\ \cos C),$$

или

$$\cos c = \cos b\ (\cos a + \sin a\ \ tg\,b\ \cos C);$$

замењујући у овим двема једначинама $tg\, a \cos C$ и $tg\, b \cos C$ вредностима, које су у обрасцима под 2), добијамо

$$4)\qquad \cos c = \frac{\cos a \cos(b-\varphi)}{\cos\varphi}, \quad \cos c = \frac{\cos b \cos(a-\psi)}{\cos\psi}.$$

Обрасци под 3) дају угле A и B, а ма који од образаца под 4) страну c, пошто су наравно најпре помоћни угли φ и ψ помоћу образаца под 2) израчунати.

Ако се страна c неможе из свог косинуса довољно тачно да израчуна, онда ће се најпре угли A и B израчунати, а потом моћиће се страна c наћи из своје тангенте помоћу једног од два обрасца, које ћемо сад одмах извести.

Делећи једначине

$$\sin c = \frac{\sin a \ \sin C}{\sin A}, \qquad \sin c = \frac{\sin b \ \sin C}{\sin B},$$

једначинама под 4), и то прву првом а другу другом и узимајући притом у обзир једначине под 2) и 3) добијамо

$$5)\qquad tg\, c = \frac{tg\,(b-\varphi)}{\cos A}, \qquad tg\, c = \frac{tg\,(a-\psi)}{\cos B}$$

2°. Ако су A, B, c дати комади, треба употребити обрасце

$$1')\quad \begin{cases} cotg\, a \sin c - cotg\, A \sin B = \cos c \cos B, \\ cotg\, b \sin c - cotg\, B \sin A = \cos c \cos A, \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c; \end{cases}$$

и ови обрасци нису згодни за логаритамски рачун, али се могу за то удесити.

Из прва два обрасца под 1') сљедује

$$cotg\, a = \frac{cos\, c\, cos\, B + cotg\, A\, sin\, B}{sin\, c}$$

$$= \frac{cos\, c}{sin\, c}\left(cos\, B + \frac{cotg\, A\, sin\, B}{cos\, c}\right),$$

$$cotg\, b = \frac{cos\, c\, cos\, A + cotg\, B\, sin\, A}{sin\, c}$$

$$= \frac{cos\, c}{sin\, c}\left(cos\, A + \frac{cotg\, B\, sin\, A}{cos\, c}\right).$$

Означавајући са φ и ψ два између 0° и 180° налазећа се помоћна угла, који су такви, да је

$$2')\quad tg\, \varphi = \frac{cotg\, A}{cos\, c},\quad tg\, \psi = \frac{cotg\, B}{cos\, c},$$

добијамо даље

$$cotg\, a = cotg\, c\, (cos\, B + tg\, \varphi\, sin\, B) = \frac{cotg\, c\, cos\, (B-\varphi)}{cos\, \varphi},$$

$$cotg\, b = cotg\, c\, (cos\, A + tg\, \psi\, sin\, A) = \frac{cotg\, c\, cos\, (A-\psi)}{cos\, \psi},$$

или најзад

$$3')\quad tg\, a = \frac{cos\, \varphi\; tg\, c}{cos\, (B-\varphi)};\quad tg\, b = \frac{cos\, \psi\; tg\, c}{cos\, (A-\psi)}.$$

Из трећег обрасца под 1') сљедује

$$\cos C = \cos A\,(-\cos B + tg\,A \sin B \cos c),$$

или

$$\cos C = \cos B\,(-\cos A + \sin A\, tg\,B \cos c)\,;$$

замењујући овде $tg\,A \cos c$ и $tg\,B \cos c$ вредностима $cotg\,\varphi$ и $cotg\,\psi$, које се из образаца 2′) лако изводе, добијамо најзад

$$4') \qquad \cos C = \frac{\cos A \sin (B-\varphi)}{\sin \varphi},$$

$$\cos C = \frac{\cos B \sin (A-\psi)}{\sin \psi}.$$

Помоћу образаца под 3′) налазимо стране a, b, а помоћу једног од образаца под 4′) угао C, пошто су најпре помоћни угли φ и ψ помоћу образаца под 2′) израчунати.

Ако се угао C из свог косинуса неможе довољно тачно израчунати, онда треба најпре стране a, b израчунати а затим ће се угао C моћи израчунати помоћу једног од два обрасца, које ћемо сад одмах извести.

Делећи једначине

$$\sin C = \frac{\sin A \sin c}{\sin a},\ \sin C = \frac{\sin B \sin c}{\sin b},$$

једначинама под 4′) и то прву првом а другу другом и узимајући притом у обзир обрасце под 2′) и 3′) добијамо

$$5') \qquad tg\,C = \frac{cotg\,(B-\varphi)}{\cos a},\ tg\,C = \frac{cotg\,(A-\psi)}{\cos b}$$

Кад су a, b, C дати комади, онда при израчунавању углова A, B имају се тражити пет логаритама као и у првој методи, а затим при израчунавању стране c још пет нових, дакле свега десет логаритама. Дакле кад се сви непознати комади троугла траже, прва је метода простија; међутим кад се тражи само страна c, друга је метода простија и с тога је треба првој претпоставити. То исто вреди, кад су A, B, c дати комади: кад се сви непознати комади траже, прва је метода простија, а друга кад се тражи само непознати угао C.

194. *Трећа метода*. По методи, коју ћемо сада да објаснимо, треба увек радити, кад се тражи само c или C. При израчунавању тих количина по другој методи употребљују се обрасци под 4) и 4′), који дају непознате из њиних косинуса. Но може се десити, да се непознати комади немогу довољно тачно из свог косинуса израчунати. Како треба у таквом случају радити, показаћемо у овоме, што долази.

Ако се тражи страна c, онда образац

$$1)\qquad \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

који је даје, може се по замени количине $\cos C$ њеном вредношћу $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} C$ написати овако:

$$\cos c = \cos (a - b) - 2 \sin a \sin b \sin^2 \frac{1}{2} C$$

или по замени количина $\cos c$ и $\cos (a - b)$ њиним вредностима $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} c$, $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} (a - b)$

$$\sin^2 \frac{1}{2} c = \sin^2 \frac{1}{2} (a - b) + \sin a \sin b \sin^2 \frac{1}{2} C.$$

Означавајући сад са θ један помоћни угао, који је такав, да је

$$2) \qquad tg\,\theta = \frac{sin\,\frac{1}{2}\,C\sqrt{sin\,a\,sin\,b}}{sin\,\frac{1}{2}\,(a - b)}$$

добијамо образац

$$3) \qquad sin\,\frac{1}{2}\,c = \frac{sin\,\frac{1}{2}\,(a -- b)}{cos\,\theta}$$

који даје непознату страну c, пошто је најпре угао θ помоћу претходећег обрасца израчунат.

Ако се тражи угао C, онда образац

$$1') \qquad cos\,C = -\,cos\,A\,cos\,B + sin\,A\,sin\,B\,cos\,c,$$

који га даје, може се по замени количине $cos\,c$ њеном вредношћу $1 - 2\,sin^2\frac{1}{2}\,c$ написати овако

$$cos\,C = -\,cos\,(A + B) - 2\,sin\,A\,sin\,B\,sin^2\frac{1}{2}\,c,$$

или по замени количина $cos\,(A + B)$, $cos\,C$ њиним вредностима $1 - 2\,sin^2\frac{1}{2}\,(A + B)$, $1 - 2\,sin^2\frac{1}{2}\,C$,

$$sin^2\frac{1}{2}\,C = cos^2\frac{1}{2}\,(A + B) + sin\,A\,sin\,B\,sin^2\frac{1}{2}\,c.$$

Означавајући са θ један помоћни угао, који је такав, да је

$$2') \qquad tg\,\theta = \frac{sin\,\frac{1}{2}\,c\sqrt{sin\,A\,sin\,B}}{cos\,\frac{1}{2}\,(A + B)}$$

добијамо најзад образац

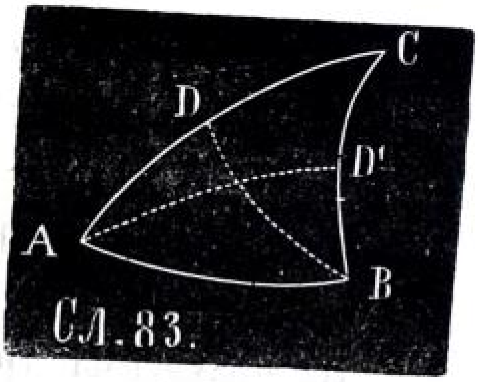
3') $$\sin\frac{1}{2}C = \frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\theta},$$

који даје непознати угао *C*, пошто је најпре угао θ помоћу предходећег обрасца израчунат.

При израчунавању стране *c* или угла *C* по овој методи имају се тражити свега пет логаритама као и у другој методи.

195. Разрешавање троугла у трећем и четвртом случају средством помоћних углова φ и ψ истоветно је са разрешавањем троугла средством његовог разлагања на два правоугла троугла, као што ћемо то сад одмах видити.

1° Узмимо (сл. 83) нека су најпре *a*, *b*, *C* дати комади; са темена *B* спустимо лук *BD* управно на страну *AC*, па ћемо из правоуглог троугла *BCD* на основу образаца № 164 добити



Сл. 83.

$$\cos C = \frac{tg\, CD}{tg\, a}$$

или

$$tg\, CD = tg\, a \cos C,$$

одакле се види, да је помоћни угао φ под 2) у № 193 једнак луку *CD*.

Из правоуглог троугла *ABD* добијамо (№ 164)

$$tg\, A = \frac{tg\, BD}{\sin(b-\varphi)}, \quad \cos c = \cos(b-\varphi)\cos BD,$$

но из правоуглог троугла *BCD* сљедује

$$tg\, C = \frac{tg\, BD}{sin\, \varphi} \quad \text{или} \quad tg\, BD = sin\, \varphi\, tg\, C,$$

и
$$cos\, a = cos\, BD\, cos\, \varphi \quad \text{или} \quad cos\, BD = \frac{cos\, a}{cos\, \varphi}$$

дакле је

$$tg\, A = \frac{sin\, \varphi\, tg\, C}{sin\, (b - \varphi)},\ cos\, c = \frac{cos\, a\, cos\, (b - \varphi)}{cos\, \varphi}.$$

Као што се види вредност нађена за $tg\, A$ иста је са оном под 3) у № 193, а вредност за $cos\, c$ иста је са оном под 4) у № 193.

Ако сад из темена A (сл. 83) спустимо лук AD' управно на страну BC, добићемо опет два правоугла ABD' и $AD'C$. Из правоуглог троугла $AD'C$ сљедује

$$cos\, C = \frac{tg\, CD'}{tg\, b} \quad \text{или} \quad tg\, CD' = tg\, b\, cos\, C,$$

одакле се види, да је помоћни угао ψ под 2) у № 193 једнак луку CD'.

Из правоуглог троугла ABD' сљедује

$$tg\, B = \frac{tg\, AD'}{sin\, (a - \psi)},\ cos\, c = cos\, AD'\, cos\, (a - \psi);$$

али из правоуглог троугла $AD'C$ сљедује

$$tg\, C = \frac{tg\, AD'}{sin\, \psi} \quad \text{или} \quad tg\, AD' = sin\, \psi\, tg\, C$$

и
$$cos\, b = cos\, AD'\, cos\, \psi \quad \text{или} \quad cos\, AD' = \frac{cos\, b}{cos\, \psi},$$

дакле је

$$tg\, B = \frac{\sin \psi \, tg\, C}{\sin (a-\psi)}, \quad \cos c = \frac{\cos b \cos (a-\psi)}{\cos \psi};$$

као што се види вредности за $tg\, B$ и $\cos c$ нађене исте су са онима под 3) и 4) у № 193.

2° Узмимо (сл. 83) нека су A, B, c дати комади; са темена B спустимо лук BD управно на супротну страну AC па ћемо из правоуглог троугла BAD добити

$$\cos c = cotg\, ABD\, cotg\, A \quad \text{или} \quad tg\, ABD = \frac{cotg\, A}{\cos c}$$

одакле сљедује, да је помоћни угао φ под 2′) у № 193 једнак углу ABD.

Из правоуглог троугла BCD добијамо даље

$$\cos (B-\varphi) = \frac{tg\, BD}{tg\, a} \quad \text{или} \quad tg\, a = \frac{tg\, BD}{\cos (B-\varphi)}$$

и

$$\sin (B-\varphi) = \frac{\cos C}{\cos BD} \quad \text{или} \quad \cos C = \cos BD \sin (B-\varphi);$$

али из правоуглог троугла ABD сљедује

$$\cos \varphi = \frac{tg\, BD}{tg\, c} \quad \text{или} \quad tg\, BD = \cos \varphi \, tg\, c,$$

и

$$\sin \varphi = \frac{\cos A}{\cos BD} \quad \text{или} \quad \cos BD = \frac{\cos A}{\sin \varphi},$$

дакле је

$$tg\, a = \frac{\cos \varphi \, tg\, c}{\cos (B-\varphi)}, \quad \cos C = \frac{\cos A \sin (B-\varphi)}{\sin \varphi};$$

као што се види исте вредности са онима под 3′) и 4′) у № 193.

Ако из темена A (сл. 83) спустимо лук AD' управно на страну BC, наћићемо из поставшег правоуглог троугла BAD'

$$\cos c = \cot g\, BAD' \cot g\, B \quad \text{или} \quad tg\, BAD' = \frac{\cot g\, B}{\cos c},$$

одакле сљедује, да је помоћни угао ψ под 2′) у № 193 једнак углу BAD'.

Из правоуглог троугла ACD' налазимо

$$\cos(A-\psi) = \frac{tg\, AD'}{tg\, b} \quad \text{или} \quad tg\, b = \frac{tg\, AD'}{\cos(A-\psi),}$$

и $$\sin(A-\psi) = \frac{\cos C}{\cos AD'} \text{ или } \cos C = \cos AD' \sin(A-\psi);$$

но из правоуглог троугла BAD' сљедује

$$\cos\psi = \frac{tg\, AD'}{tg\, c} \quad \text{или} \quad tg\, AD' = \cos\psi\, tg\, c,$$

и $$\sin\psi = \frac{\cos B}{\cos AD'} \quad \text{или} \quad \cos AD' = \frac{\cos B}{\sin\psi}$$

дакле је

$$tg\, b = \frac{\cos\psi\, tg\, c}{\cos(A-\psi)}, \quad \cos C = \frac{\cos B \sin(A-\psi)}{\sin\psi},$$

као што се види добијамо за $tg\, b$ и $\cos C$ исте вредности као и у № 193 под 3′) и 4′).

196. *Пример*. Дате су две стране и захваћени угао

$a=115^\circ57'34\cdot12''$, $b=131^\circ16'59\cdot38''$, $C=61^\circ28'43\cdot87''$,

траже се угли A, B, и страна c.

$\frac{1}{2}(b+a)\ldots 123^\circ37'16\cdot75''$

$\frac{1}{2}(b-a)\ldots\ldots 7^\circ39'42\cdot63''$

$\frac{1}{2}C\ldots\ldots 30^\circ44'21\cdot935''$

Рачунање угла $\frac{1}{2}(B+A)$

$$tg\,\frac{1}{2}(B+A)$$

$$=cotg\,\frac{1}{2}C\,\frac{cos\,\frac{1}{2}(b-a)}{cos\,\frac{1}{2}(b+a)}$$

$lg\,cotg\,\frac{1}{2}C\ldots 0\cdot2257111$

$lg\,cos\,\frac{1}{2}(b-a)\,.\,9\cdot9961053\text{-}10$

$-lg\text{-}cos\frac{1}{2}(b+a)\;0\cdot2567244$

Збир ...... $10\cdot4785408\text{-}10$

$lg\text{-}tg\frac{1}{2}(B+A)\;0\cdot4785408$

$\frac{1}{2}(B+A)\ldots 108^\circ22'43\cdot82''$

$lg\,sin\frac{1}{2}(b+a)\,.\,9\cdot9204965\text{-}10$

$log\text{-}cos\,\frac{1}{2}(b+a)\;9\cdot7432756\text{-}10$

$lg\,sin\frac{1}{2}(b-a)\,.\,9\cdot1249154\text{-}10$

$lg\,cos\frac{1}{2}(b-a)\,.\,9\cdot9961053\text{-}10$

$log\,cotg\frac{1}{2}C\ldots 0\cdot2257111$

Рачунање угла $\frac{1}{2}(B-A)$

$$tg\,\frac{1}{2}(B-A)$$

$$=cotg\,\frac{1}{2}C\,\frac{sin\,\frac{1}{2}(b-a)}{sin\,\frac{1}{2}(b+a)}$$

$log\,cotg\frac{1}{2}C\ldots 0\cdot2257111$

$lg\,sin\frac{1}{2}(b-a)\,.\,9\cdot1249154\text{-}10$

$-log\,sin\frac{1}{2}(b+a)\;0\cdot0795035$

Збир .... $9\cdot3301300\text{-}10$

$lg\,tg\,\frac{1}{2}(B-A)\;9\cdot3301300\text{-}10$

$\frac{1}{2}(B-A)\ldots\ldots 12^\circ4'17\cdot20''$

као што се види исте вредности са онима под 3′) и 4′) у № 193.

Ако из темена A (сл. 83) спустимо лук AD' управно на страну BC, наћићемо из поставшег правоуглог троугла BAD'

$$\cos c = \cot g\, BAD' \cot g\, B \quad \text{или} \quad tg\, BAD' = \frac{\cot g\, B}{\cos c},$$

одакле сљедује, да је помоћни угао ψ под 2′) у № 193 једнак углу BAD'.

Из правоуглог троугла ACD' налазимо

$$\cos(A-\psi) = \frac{tg\, AD'}{tg\, b} \quad \text{или} \quad tg\, b = \frac{tg\, AD'}{\cos(A-\psi)},$$

$$\text{и} \quad \sin(A-\psi) = \frac{\cos C}{\cos AD'} \quad \text{или} \quad \cos C = \cos AD' \sin(A-\psi);$$

но из правоуглог троугла BAD' сљедује

$$\cos\psi = \frac{tg\, AD'}{tg\, c} \quad \text{или} \quad tg\, AD' = \cos\psi\, tg\, c,$$

$$\text{и} \quad \sin\psi = \frac{\cos B}{\cos AD'} \quad \text{или} \quad \cos AD' = \frac{\cos B}{\sin\psi}$$

дакле је

$$tg\, b = \frac{\cos\psi\, tg\, c}{\cos(A-\psi)}, \quad \cos C = \frac{\cos B \sin(A-\psi)}{\sin\psi},$$

као што се види добијамо за $tg\, b$ и $\cos C$ исте вредности као и у № 193 под 3′) и 4′).

196. *Пример*. Дате су две стране и захваћени угао

$a=115°57'34{\cdot}12''$, $b=131°16'59{\cdot}38''$, $C=61°28'43{\cdot}87''$,

траже се угли A, B, и страна c.

$\frac{1}{2}(b+a)\ldots 123°37'16{\cdot}75''$

$\frac{1}{2}(b-a)\ldots\ 7°39'42{\cdot}63''$

$\frac{1}{2}C\ldots\ 30°44'21{\cdot}935''$

$lg\,sin\frac{1}{2}(b+a)\ .\ 9{\cdot}9204965\text{-}10$

$log\text{-}cos\frac{1}{2}(b+a)\ 9{\cdot}7432756\text{-}10$

$lg\,sin\frac{1}{2}(b-a)\ .\ 9{\cdot}1249154\text{-}10$

$lg\,cos\frac{1}{2}(b-a)\ .\ 9{\cdot}9961053\text{-}10$

$log\,cotg\frac{1}{2}C\ldots 0{\cdot}2257111$

Рачунање угла $\frac{1}{2}(B+A)$

$$tg\frac{1}{2}(B+A)$$

$$=cotg\frac{1}{2}C\frac{cos\frac{1}{2}(b-a)}{cos\frac{1}{2}(b+a)}$$

$lg\,cotg\frac{1}{2}C\ldots 0{\cdot}2257111$

$lg\,cos\frac{1}{2}(b-a)\ .\ 9{\cdot}9961053\text{-}10$

$-lg\text{-}cos\frac{1}{2}(b+a)\ 0{\cdot}2567244$

Збир ...... $10{\cdot}4785408\text{-}10$

$lg\text{-}tg\frac{1}{2}(B+A)\ 0{\cdot}4785408$

$\frac{1}{2}(B+A)\ldots 108°22'43{\cdot}82''$

Рачунање угла $\frac{1}{2}(B-A)$

$$tg\frac{1}{2}(B-A)$$

$$=cotg\frac{1}{2}C\frac{sin\frac{1}{2}(b-a)}{sin\frac{1}{2}(b+a)}$$

$log\,cotg\frac{1}{2}C\ldots 0{\cdot}2257111$

$lg\,sin\frac{1}{2}(b-a)\ .\ 9{\cdot}1249154\text{-}10$

$-log\,sin\frac{1}{2}(b+a)\ 0{\cdot}0795035$

Збир .... $9{\cdot}3301300\text{-}10$

$lg\,tg\frac{1}{2}(B-A)\ 9{\cdot}3301300\text{-}10$

$\frac{1}{2}(B-A)\ldots 12°4'17{\cdot}20''$

Рачунање углова A и B.

$\frac{1}{2}(B+A)\ldots 108^\circ 22' 43{\cdot}82''$

$\frac{1}{2}(B-A)\ldots\ 12^\circ\ 4' 17{\cdot}20''$

$B\ldots\ldots\ldots\ 120^\circ 27' 1{\cdot}02''$

$A\ldots\ldots\ldots\ 96^\circ 18' 26{\cdot}62''$

$lg\text{-}cos\frac{1}{2}(B+A)\, 9{\cdot}4987220\text{-}10$

$lg\ cos\frac{1}{2}(B-A)\ 9{\cdot}9902890\text{-}10$

Рачунање стране c.

$$tg\,\frac{1}{2}\,c$$

$$=tg\,\frac{1}{2}(b+a)\,\frac{cos\,\frac{1}{2}(B+A)}{cos\,\frac{1}{2}(B-A)}$$

$lg\,sin\frac{1}{2}(b+a)\ .\ 9{\cdot}9204965\text{-}10$

$-lg\text{-}cos\frac{1}{2}(b+a)\ 0{\cdot}2567244$

$lg-cos\frac{1}{2}(B+A) 9{\cdot}4987220\text{-}10$

$-\,lg\ cos\frac{1}{2}(B-A)\ 0{\cdot}0097110$

Збир $\ldots\ldots$ $19{\cdot}6856539\text{-}20$

$log\ tg\frac{1}{2}\ c\ldots\ 9{\cdot}6856539\text{-}10$

$\frac{1}{2}\,c\ldots\ldots\ldots\ 25^\circ 52' 7{\cdot}80''$

$c\ldots\ldots\ldots\ 51^\circ 44' 15{\cdot}60''$.

197. *Пример*. Дата су два угла и страна на којој леже

$A=142^\circ 58' 49{\cdot}65''$, $B=126^\circ 8' 17{\cdot}92''$, $c=121^\circ 59' 53{\cdot}82''$,

траже се стране a, b и захваћени угао C.

$\frac{1}{2}(A+B)\ldots 134^\circ 33' 33{\cdot}785''$

$\frac{1}{2}(A-B)\ \ldots\ 8^\circ 25' 15{\cdot}865''$

$\frac{1}{2}\,c\ldots\ldots\ 60^\circ 59' 56{\cdot}91''$

$lg\,sin\frac{1}{2}(A+B)\ 9{\cdot}8527993\text{-}10$

$lg-cos\frac{1}{2}(A+B) 9{\cdot}8461194\text{-}10$

$lg\,sin\frac{1}{2}(A-B)\ 9{\cdot}1656943\text{-}10$

Рачунање од $\frac{1}{2}(a+b)$

$$tg\,\frac{1}{2}(a+b)$$

$$=tg\,\frac{1}{2}\,c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)}$$

$lg\,tg\,\frac{1}{2}\,c$ . . . 0·2562327

$lg\cos\frac{1}{2}(A-B)$ 9·9952923-10

$-lg-\cos\frac{1}{2}(A+B)$ 0·1538806

Збир . . . . . 10·4054056-10

$lg-tg\frac{1}{2}(a+b)$. 0·4054056

$\frac{1}{2}(a+b)$ . . 111°27′50·02″

Рачунање страна a, b

$\frac{1}{2}(a+b)$ . . 111°27′50·02″

$\frac{1}{2}(a-b)$ . . . 20°20′39·35″

a . . . . 131°48′29·37″

b . . . . , 91°7′10·67″

$lg\cos\frac{1}{2}(A-B)$ . . 9·9952923-10

$log\,tg\,\frac{1}{2}\,c$ . . . . 0·2562327

Рачунање од $\frac{1}{2}(a-b)$

$$tg\,\frac{1}{2}(a-b)$$

$$=tg\,\frac{1}{2}\,c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}$$

$lg\,tg\,\frac{1}{2}\,c$ . . . . 0·2562327

$lg\sin\frac{1}{2}(A-B)$ 9·1656943-10

$-lg\sin\frac{1}{2}(A+B)$ 0·1472007

Збир . . . . 9·5691277-10

$lg\,tg\,\frac{1}{2}(a-b)$. 9·5691277-10

$\frac{1}{2}(a-b)$ . . . . . 20°20′39·35″

Рачунање угла C.

$$cotg\,\frac{1}{2}\,C$$

$$=tg\,\frac{1}{2}(A+B)\frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}$$

$\log\text{-}\cos\frac{1}{2}(a+b)$	9·5633800-10	$\lg\sin\frac{1}{2}(A+B)$	9·8527993-10
$\lg\cos\frac{1}{2}(a-b)$.	9·9720271-10	$-\lg\text{-}\cos\frac{1}{2}(A+B)$	0·1538806
		$\lg\text{-}\cos\frac{1}{2}(a+b)$	9·5633800-10
		$-\lg\cos\frac{1}{2}(a-b)$	0·0279729
		Збир	19·5980328-20
		$\lg\ \mathrm{cotg}\ \frac{1}{2}\ C$ . .	9·5980328-10
		$\frac{1}{2}\ C$	68°22′52·28″
		C	136°45′44·56″.

Пети и шести случај. Дате су две стране и угао насирам једне од њих, или два угла и страна насирам једног од њих.

198. *Прва метода.* Нека су дати комади a, b, A, или A, B, a. Непозната B или b израчунава се помоћу обрасца

$$1)\qquad \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin a},$$

а пошто је то учињено, онда се непознате C, c налазе помоћу неперових образаца

$$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\,C = \frac{\mathrm{cotg}\,\frac{1}{2}\,(A-B)\ \sin\frac{1}{2}\,(a-b)}{\sin\frac{1}{2}\,(a+b)}$$

$$tg\frac{1}{2}c = \frac{tg\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}$$

$$tg\frac{1}{2}C = \frac{cotg\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}$$

$$tg\frac{1}{2}c = \frac{tg\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)},$$

Да би задатак био можан изискује се понајпре, да се синус непознатог комада B или b налази између 0 и 1, јер B или b мора бити $< 180°$. Претпоставимо нека је тај услов испуњен; таблице ће дати за B или b две и то суплементне вредности. Да би једна од тих вредности задатку одговарала, треба да су одговарајуће вредности за $tg\frac{1}{2}C$ и $tg\frac{1}{2}c$ положне; зато се изискује да су разлике $A-B$, $a-b$ истог знака. Ако тај захтев није испуњен ниједном од двеју вредности нађених за B или b, онда задатак није можан. Али ако је исти захтев испуњен једном од тих вредности онда тој вредности мора одговарати једно разрешење задатка. Јер кад су разлике $A-B$, $a-b$ истог знака, онда два од горњих неперових образаца дају за C и c вредности, које леже између 0° и 180°, и те вредности истоветне су са онима, које дају друга два неперова обрасца, јер се ови последњи из она прва два помоћу обрасца

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin a} \quad \text{или} \quad \frac{tg\,\frac{1}{2}(A + B)}{tg\,\frac{1}{2}(A - B)} = \frac{tg\,\frac{1}{2}(a + b)}{tg\,\frac{1}{2}(a - b)}$$

изводе. Одатле сљедује, да вредности непознатих комада: B или b, C и c у свези са вредностима датих комада морају задовољити четири неперова обрасца. Ако се дакле од шест количина a, b, c, A, B, C узму a, b, C као познати комади и троугао реши, а тај је задатак као што знамо увек можан, онда ће рачун морати дати за непознате комаде A, B, c њихове већ познате вредности.

Из овог претреса види се, да се одмах, пошто је B или b израчунато, зна, да ли задатак има једно два или пак ниједно разрешење.

Ова два случаја пети и шести познати су под именом *сумњивих случајева*.

199. *Друга метода.* — Метода, коју мало час пређосмо није згодна у оном случају, где се сва три непозната комада траже, јер тада се морају тражити девет различних логаритама. Њу је згодно употребити само онда, кад се осим комада B или b тражи само један од остала два непозната комада C и c, јер се тада само шест различних логаритама имају тражити, и то три при израчунавању комада B или b и три при израчунавању комада C или c.

Кад се сва три непозната комада захтевају, онда је боље радити на сљедећи начин. Најпре ће се израчунати вредности за B или b као и по пређашњој методи то ће рећи помоћу обрасца

$$\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin a};$$

затим ће се испитати да ли обе за непознату B или b нађене вредности задатку одговарају или не, па ће се онда одговарајуће вредности за C и c наћи помоћу образаца 15) и 16) у № 176, код којих се само четири различна логаритма имају тражити.

Стављајући краткоће ради

$$M = tg\,\frac{1}{4}\,(U+v)\,tg\frac{1}{4}\,(U-v),$$

$$N = tg\,\frac{1}{4}\,(u+V)tg\frac{1}{4}\,(u-V)$$

добићемо из образаца 15) у № 176

$$tg\frac{1}{4}(C-c) = \pm\sqrt{MN}, \qquad tg\,\frac{1}{4}\,(C+c) = +\sqrt{\frac{M}{N}}$$

$tg\frac{1}{4}\,(C-c)$ мора (№ 176) бити истог знака са количинама M и N.

Место образаца 15) могу се исто тако добро употребити и обрасци 16) у № 176. Ако задатак има два разрешења, онда, пошто су комади једног троугла помоћу образаца 15) израчунати, могу се комади другог троугла израчунати помоћу образаца 16), при чему се неморају тражити никакви нови логаритми.

Да би ово тврђење оправдали, узмимо нека су C' и c' вредности непознатих C и c за други троугао; у обрасцима 16) № 176 треба заменити B са $180^\circ - B$ или пак b са $180^\circ - b$, — што очевидно излази на то, да се U и V или пак u и v имају изменити — како су кад a, b, A или A, B, a дати комади. Стављајући краткоће ради

$$M' = tg\,\frac{1}{4}\,(u + V)\,cotg\,\frac{1}{4}\,(u - V),$$

$$N' = cotg\,\frac{1}{4}\,(U + v)\,tg\,\frac{1}{4}\,(U - v)$$

имаћемо дакле

$$tg\left[\frac{1}{4}\,(C' - c') \pm 45^0\right] = \pm \sqrt{M'N'},$$

$$tg\left[\frac{1}{4}\,(C' + c') + 45^0\right] = \pm \sqrt{\frac{M'}{N'}}$$

Ако су a, b, A дати комади, треба у првом од ових образаца узети лево и десно горње знаке, а у другом обрасцу треба кореној количини десно од знака једнакости дати знак количина M', N'. Ако ли су пак A, B, a дати комади, треба у првом обрасцу узети лево и десно доње знаке, а у другом треба кореној количини десно дати знак, који је противан знаку количина M', N'.

При разрешавању задатка по овој методи неморају се, као што се види, тражити више од седам логаритама и у самом оном случају, где има два троугла, који задатку одговарају.

200. *Трећа метода.* — **Метода, коју ћемо сада да објаснимо, јесте она, по којој треба скоро увек радити, јер је понајзгоднија.**

Узмимо најпре нека су a, b, A дати комади; обрасци за израчунавање непознатих комада јесу

$$1)\quad \left\{ \begin{aligned} & \sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}, \\ & \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ & \cot g\, a \sin b - \cot g\, A \sin C = \cos b \cos C. \end{aligned} \right.$$

Сваки од ових образаца даје вредност једног непознатог комада а осим тога и начин, да можемо дознати, да ли је задатак можан или не. Јер ако се из првог обрасца под 1) може добити за B таква једна вредност, да су разлике $A - B$, $a - b$ истог знака, онда на основу онога, што је у № 198 казато, тој вредности од B мора одговарати једно разрешење. Исто тако ако се из другог обрасца може добити за c једна вредност између 0° и 180°, онда тој вредности мора одговарати једно разрешење, јер се из две стране b, c и захваћеног угла A може увек начинити један троугао. Најзад ако се из последњег обрасца може добити за C једна вредност између 0° и 180°, онда тој вредности мора такође одговарати једно разрешење, јер се из страна a, b и угла C може начинити један троугао.

Први образац под 1) удесан је за логаритамски рачун, остала пак два нису; но они се могу за то удесити увођењем двају помоћних углова.

Из последња два обрасца под 1) сљедује

$$\cos a = \cos b\, (\cos c + \sin c\, tg\, b \cos A),$$

$$\cot g\, a\, tg\, b = \frac{\cot g\, A \sin C}{\cos b} + \cos C;$$

одавде означавајући са φ и ψ два између 0° и 180° налазећа се помоћна угла, који су такви, да је

2) $$tg\,\varphi = tg\,b\cos A, \quad tg\,\psi = \frac{cotg\,A}{\cos b},$$

добијамо даље

$$\cos a = \cos b\,(\cos c + \sin c\,tg\,\varphi),$$

$$cotg\,a\,tg\,b = tg\,\psi \sin C + \cos C,$$

и најзад одавде

3) $$\cos(c-\varphi) = \frac{\cos a \cos\varphi}{\cos b};$$

$$\cos(C-\psi) = tg\,b\,cotg\,a\cos\psi.$$

Да би задатак био можан, треба да је вредност нађена за $\sin B$ мања од јединице, и да вредности за $\cos(c-\varphi)$ и $\cos(C-\psi)$ леже између -1 и $+1$; но лако је увидити, да ће ова два последња услова бити испуњена, ако је само први испуњен, дакле ако је

$$\frac{\sin b \sin A}{\sin a} < 1.$$

Претпоставимо нека је овај услов испуњен. Први образац под 1) даће за B једну вредност B' налазећу се између 0° и 90°, а обрасци под 3) даће за $c-\varphi$ и $C-\psi$ вредности l и L налазеће се између 0° и 180°. Но горње једначине биће такође задовољене, ако се узме $B=180^\circ-B'$, $c-\varphi=-l$, $C-\psi=-L$; јер синуси двају суплементних углова јесу једнаки и једнако означени, а тако исто и косинуси двају једнаких али противно означених углова.

Треба још показати, које од двогубих за B, C, c нађених вредности треба узети заједно, те да би се добио троугао, који задатку одговара.

Из образаца

$$cotg\, b \sin c - cotg\, B \sin A = \cos c \cos A\,,$$

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b\,,$$

добијамо

$$cotg\, b \sin c = \cos A\, (\cos c + tg\, A\, cotg\, B)\,,$$

$$\cos B = \cos A\, (-\cos C + tg\, A \sin C \cos b),$$

или

$$\frac{\sin c}{tg\, b \cos A} - \cos c = tg\, A\, cotg\, B,$$

$$\cos B = \cos A \left(-\cos C + \frac{\sin C \cos b}{cotg\, A}\right);$$

одавде замењујући $tg\, b \cos A$ са $tg\, \varphi$ и $\frac{cotg\, A}{\cos b}$ са $tg\, \psi$ добијамо даље

$$\frac{\sin c}{tg\, \varphi} - \cos c = tg\, A\, cotg\, B,$$

$$\cos B = \frac{\cos A \sin (C - \psi)}{\sin \psi}\,,$$

и одавде напослетку

4) $\sin (c - \varphi) = \sin \varphi \frac{tg\, A}{tg\, B}\,,\ \sin (C - \psi) = \sin \psi \frac{\cos B}{\cos A}.$

Из ових образаца види се, да су разлике $c - \varphi$, $C - \psi$ истог знака, јер су размере

$$\frac{tg\, A}{tg\, B}\,,\ \frac{\cos B}{\cos A}$$

истог знака с тога, што се A и B налазе између 0° и 180°. Исте су разлике положне, ако су угли A, B оба већи или оба мањи од 90°, а одречне, ако је један од тих углова већи а други мањи од 90°. Према овоме дакле, кад су угли A, B истога рода, то јест оба већи или мањи од 90°, узеће се $+ l$ са $+L$, у противном случају узеће се $- l$ са $-L$. И тако вредности за B, C, c, које се имају заједно узети, јесу

$$\left.\begin{array}{lll} B = B', & c = \varphi + l, & C = \psi + L, \\ B = 180^\circ - B', & c = \varphi - l, & C = \psi - L, \end{array}\right\} \text{Ако је } A < 90^\circ,$$

$$\left.\begin{array}{lll} B = 180^\circ - B', & c = \varphi + l, & C = \psi + L, \\ B = B', & c = \varphi - l, & C = \psi - L, \end{array}\right\} \text{ако је } A > 90^\circ,$$

но ваља приметити, да ће сваки од нађена два спрега вредности како у случају $A < 90^\circ$ тако и у случају $A > 90^\circ$ одговарати задатку само тако, ако се вредност непознате c или C, која том спрегу одговара, налази између 0° и 180°.

Делећи први и други образац под 4) односно са првим и другим под 3) и узимајући притом на ум обрасце под 2) као и први образац под 1) добијамо

$$5) \qquad tg\,(c - \varphi) = tg\,a \cos B, \quad tg\,(C - \psi) = \frac{cotg\,B}{\cos a},$$

и одавде узимајући на ум први образац под 1)

$$6) \qquad tg\,(c - \varphi) = \sin b \sin A\, tg\,(C - \psi).$$

Кад се сви непознати комади троугла ишту, онда, пошто је помоћу првог обрасца под 1) B израчунато, могу се разлике $c - \varphi$, $C - \psi$ израчунати помоћу образаца под 5) и 6) и то лакше и згодније но помоћу образаца под 3), јер се код образаца 5) и 6) прво један логаритам мање има тражити, а друго исти обрасци дају разлике $c-\varphi$, $C-\psi$ из њиних тангената. У рачуну могу се исте разлике сматрати увек као положне, то јест као једнаке $+l$ и $+L$; али тада, ако се за B узме вредност $B'<90^\circ$, треба променути знаке десним странама образаца под 5) кад је угао $A>90^\circ$.

201. Узмимо сад нека су A, B, a дати комади. Обрасци за израчунавање непознатих комада јесу

$$1)\quad \left\{\begin{aligned} & \sin b = \frac{\sin B \sin a}{\sin A} \\ & \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a\,, \\ & \operatorname{cotg} a \sin c - \operatorname{cotg} a \sin B = \cos c \cos B. \end{aligned}\right.$$

Први од ових образаца удесан је за логаритамски рачун, остала пак два нису, али увођењем двају помоћних углова могу се они за то удесити.

Из последња два обрасца под 1) сљедује

$$\cos A = -\cos B(\cos C - \operatorname{tg} B \sin C \cos a),$$

$$\frac{\operatorname{cotg} a \sin c}{\cos B} = \cos c + \operatorname{cotg} A \operatorname{tg} B;$$

из ових једначина, означавајући са ψ и φ два између 0° и 180° налазећа се помоћна угла, који су такви, да је

$$2)\qquad \operatorname{tg}\psi = -\operatorname{tg} B \cos a,\quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{\operatorname{cotg} a}{\cos B}$$

добијамо даље

$$\cos A = -\cos B(\cos C + \operatorname{tg}\psi \sin C)\,,$$

$$-\,tg\,\varphi\,\sin c - \cos c = cotg\,A\;tg\,B\,,$$

и на послетку одавде

$$3)\qquad \cos(C-\psi) = -\frac{\cos A\,\cos\psi}{\cos B}\,,$$

$$\cos(c-\varphi) = -\,cotg\,A\;tg\,B\,\cos\varphi.$$

Да би задатак био можан, треба да је вредност за $\sin b$ мања од јединице, и да се вредности за $\cos(C-\psi)$ и $\cos(c-\varphi)$ налазе између -1 и $+1$; но лако је дознати, да ће последњи услови бити испуњени, ако је само испуњен први, дакле ако је

$$\frac{\sin B\,\sin a}{\sin A} < 1.$$

Претпоставимо да је овај услов испуњен. Први образац под 1) даће за b једну вредност b', која се налази између 0° и 90°, а обрасци под 3) даће за $C-\psi$ и $c-\varphi$ вредности L и l лежеће између 0° и 180°. Но горње једначине под 1) биће такође задовољене ако се узме и $b = 180^\circ - b'$, $C-\psi = -L$, $c-\varphi = -l$.

Треба сад показати, које од двогубих за b, c C нађених вредности треба заједно узети, па да се добије једно разрешење.

Из образаца

$$cotg\,b\,\sin a - cotg\,B\,\sin C = \cos a\,\cos C,$$

$$\cos b = \cos a\,\cos c + \sin a\,\sin c\,\cos B,$$

добијамо

$$cotg\, b\ \ tg\, a = cos\, C + \frac{cotg\, B\ sin\, C}{cos\, a},$$

или

$$cotg\, b\ \ tg\, a = cos\, C + \frac{sin\, C}{tg\, B\ cos\, a}$$

и $$cos\, b = cos\, a\, (cos\, c + tg\, a\ sin\, c\ cos\, B)$$

из ових једначина обзирући се на оне под 2) изводимо даље

$$cotg\, b\ \ tg\, a = cos\, C - sin\, C\ cotg\, \psi,$$

$$cos\, b = cos\, a\ \ (cos\, c - sin\, c\ \ cotg\, \varphi),$$

или

$$cotg\, b\ \ tg\, a = -\frac{sin\, (C - \psi)}{sin\, \psi},$$

$$cos\, b = -\frac{cos\, a\ sin\ (c - \varphi)}{sin\, \varphi},$$

или напослетку

4) $sin\, (C - \psi) = - sin\, \psi\, \frac{tg\, a}{tg\, b}$, $sin\, (c - \varphi) = - sin\, \varphi\, \frac{cos\, b}{cos\, a}$

Из ових образаца слєдује, да су разлике $C - \psi$, $c - \varphi$ истог знака; оне су одречне, ако су стране a и b обе мање или обе веће од 90°; напротив оне су положне, ако је једна од двеју страна a и b положна а друга одречна. Услєд тога, кад су стране a и b једног рода, то јест обе мање или обе веће од 90°, узеће се $- l$ са $- L$, у противном случају то јест кад је једна страна мања а друга већа од 90°, узеће се $+ l$ са $+ L$. Према овоме, што рекосмо, вредности непознатих b, c, C, које треба заједно узети, јесу

$$\left.\begin{array}{lll} b = b' & C = \psi + L, & c = \varphi + l, \\ b = 180^\circ - b', & C = \psi - L, & c = \varphi - l, \end{array}\right\} \text{ако је } a > 90^\circ,$$

$$\left.\begin{array}{lll} b = 180^\circ - b', & C = \psi + L, & c = \varphi + l, \\ b = b' & C = \psi - L, & c = \varphi - l, \end{array}\right\} \text{ако је } a < 90^\circ,$$

но сваки од нађена два спрега вредности, како кад је $a > 90^\circ$ тако и кад је $a < 90^\circ$, одговараће задатку само тако, ако се вредност непознате C или c, која је у њему, налази између 0° и 180°.

Из образаца 3) и 4) добијамо поделом

$$5) \quad tg\,(C - \psi) = -\, tg\, A \cos b, \quad tg\,(c - \varphi) = -\frac{cotg\, b}{\cos A},$$

и одавде са обзиром на први образац под 1)

$$6) \qquad tg\,(C - \psi) = \sin a \sin B \; tg\,(c - \varphi).$$

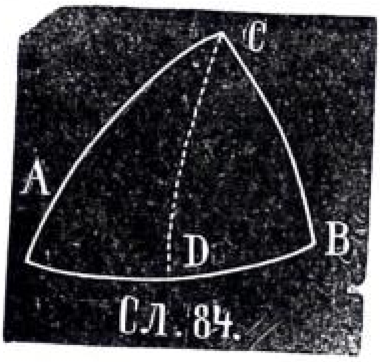
Обрасце 5) и 6) треба онима под 3) претпоставити, јер прво они дају разлике $C - \psi$, $c - \varphi$ из њиних тангената а после код њих се један логаритам мање има тражити. У рачунима могу се разлике $C - \psi$, $c - \varphi$ сматрати увек као положне то јест као једнаке $+ L$ и $+ l$; али тада, ако се за b узме вредност $b' < 90^\circ$ треба променути знаке десним странама образаца под 5), кад је $a < 90^\circ$.

Троугао, који смо у овој №^{и} разрешавали јесте суплеменат троуглу, који смо разрешили у претходећој №^{и}, и дотиста обрасци ове №^{е} постају из оних №^{е} 200, кад се тамо $A, B, C, a, b, c, \varphi, \psi$ замене суплементима од $a, b, c, A, B, C, \psi, \varphi$.

202. Разрешавање троугла у случајевима петом и шестом, које мало час пређосмо, срeством помоћних углова φ

и ψ истоветно је са разрешавањем троугла средством његовог разлагања на два правоугла троугла, или на два троугла, у којих је једна страна $= 90''$.

1°. Узмимо најпре нека су a, b, A дати комади, и са темена C (сл. 84) спустимо лук CD управно на супротну страну AB, па ћемо из правоуглог троугла ACD добити



Сл. 84.

$$\cos A = \frac{tg\, AD}{tg\, b} \text{ или } tg\, AD = tg\, b \cos A,$$

$$\cos b = \cot g\, ACD \cot g\, A$$

или

$$tg\, ACD = \frac{\cot g\, A}{\cos b},$$

одакле сљедује, да је помоћни угао φ под 2) у № 200 једнак луку AD, а помоћни угао ψ у истој №и једнак углу ACD.

Из правоуглог троугла BCD добијамо

$$\cos a = \cos (c - \varphi) \cos CD \quad \text{или} \quad \cos (c - \varphi) = \frac{\cos a}{\cos CD},$$

$$\cos (C - \psi) = \frac{tg\, CD}{tg\, a} \quad \text{или} \quad \cos (C - \psi) = \cot g\, a \; tg\, CD;$$

но из правоуглог троугла ABD налазимо

$$\cos b = \cos CD \cos \varphi \quad \text{или} \quad \cos CD = \frac{\cos b}{\cos \varphi},$$

$$\cos \psi = \frac{tg\, CD}{tg\, b} \quad \text{или} \quad tg\, CD = tg\, b \cos \psi,$$

дакле је

$$\cos(c-\varphi) = \frac{\cos a \cos\varphi}{\cos b},\ \cos(C-\psi) = \operatorname{cotg} a\, \operatorname{tg} b \cos\psi,$$

а то су обрасци под 3) у № 200.

Пошто су $c-\varphi = BD$ и $C-\psi = BCD$ катета и супротни угао у правоуглом троуглу BCD, то исте разлике морају бити увек истог знака, и то положне или одречне, како су кад угли A и B једног рода или не.

2°. Узмимо сад нека су A, B, a (сл. 84) дати комади; са темена C повуцимо до супротне стране AB лук CD тако, да његова дужина буде једнака једној четврти, па ћемо добити два троугла ACD, BCD, у којих је по једна страна $= 90°$.

Из троугла BCD добијамо (№ 167)

$$\cos B = -\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} BD \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} BD = -\frac{\operatorname{cotg} a}{\cos B},$$

$$\cos a = -\frac{\operatorname{tg} BCD}{\operatorname{tg} B} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} BCD = -\operatorname{tg} B \cos a,$$

одакле сљедује, да је помоћни угао φ под 2) у № 201 једнак луку BD, а помоћни угао ψ у истој №^{и} једнак углу BCD.

Из троугла ACD добијамо (№ 167)

$$\cos A = -\cos(C-\psi)\cos ADC \text{ или } \cos(C-\psi) = -\frac{\cos A}{\cos ADC}$$

$$\operatorname{tg} ADC = -\operatorname{tg} A \cos(c-\varphi) \text{ или } \cos(c-\varphi) = -\frac{\operatorname{tg} ADC}{\operatorname{tg} A};$$

но из троугла BDC сљедује:

$$\cos B = -\cos\psi \cos BDC \text{ одакле } cso\, ADC = \frac{\cos B}{\cos\psi}$$

$$\cos\varphi = -\frac{tg\,BDC}{tg\,B} \quad \text{одакле} \quad tg\,ADC = \cos\varphi\ tg\,B;$$

дакле је

$$\cos(C-\psi) = -\frac{\cos A\ \cos\psi}{\cos B},\ \cos(c-\varphi) = -\,cotg A\ tg B \cos\varphi$$

а то су обрасци под 3) у № 201.

На основу образаца №° 167 разлике $c - \varphi = AD$, $C - \psi = ACD$ морају бити истог знака, јер је $c - \varphi$ страна а $C - \psi$ супротни јој угао у троуглу ACD, у којег је једна страна $= 90^\circ$, исте разлике јесу одречне, ако су a и b једног рода, а положне ако су a, b различног рода.

203. Пример. Дате су две стране и угао наспрам једне од њих и то

$$a = 109^\circ 38' 58{\cdot}47'',\ b = 79^\circ 58' 46{\cdot}98'',\ A = 115^\circ 29' 35{\cdot}19'',$$

тражи се страна c и угли A, B.

Рачунање угла B.

$$\sin B = \frac{\sin b\ \sin A}{\sin a}.$$

$log\ sin\ b$	9·9933243—10
$-\ log\ sin\ a$	0·0260566
$log\ sin\ A$	9·9555132—10
Збир	19·9748941—20
$log\ sin\ B$	9·9748941—10
B	$70^\circ\ 42'\ 18{\cdot}51'' = B'$ $109^\circ\ 17'\ 41{\cdot}49'' = 180^\circ - B,$

Рачунање угла C

$$tg\,\psi = \frac{cotg\,A}{cos\,b},$$

$$tg\,L = -\frac{cotg\,B'}{cos\,a}$$

$$C = \psi \pm L.$$

$lg - cotg\,A$ ..	9·6783616-10
$- lg\,cos\,b$ ...	0·7594587
Збир.....	10·4378203-10
$lg - tg\,\psi$....	0·4378203
ψ.......	110° 2′ 50·18″

$lg\,cotg\,B'$	9·5441851-10
$- lg - cos\,a$.	0·4733214
Збир.....	10·0175065-10
$lg\,tg\,L$.....	0·0175065
L.......	46° 9′ 16·14″

$C = \psi \pm L$.. $\begin{cases} 156°12'\ 6{\cdot}32'' \\ 133°53'34{\cdot}04' \end{cases}$

Рачунање стране c.

$$tg\,\varphi = tg\,b\ cos\,A$$
$$= sin\,b\ sin\,A\ tg\,\psi$$
$$tg\,l = sin\,b\ sin\,A\ tg\,L.$$

$$c = \varphi \pm l.$$

$log\ sin\,b$	9·9933243-10
$log\ sin\,A$.....	9·9555132-10
$log - tg\,\psi$....	0·4378203
Збир	20·3866578-20
$log - tg\,\varphi$...	0·3866578
φ.......	112° 19′ 10·18″.

$log\ sin\,b$......	9·9933243-10
$log\ sin\,A$	9·9555132-10
$log\ tg\,L$......	0·0175065
Збир	19·9663440-20
$log\ tg\,l$	9·9663440-10
l	42° 46′ 55·66″

$c = \varphi \pm l$... $\begin{cases} 155°\ 6'\,5{\cdot}84'' \\ 69°32'\,59{\cdot}52'' \end{cases}$

Прво разрешење:

$B = 70°42'18{\cdot}51''$, $C = 133°53'34{\cdot}04''$, $c = 69°32'59{\cdot}52''$.

Друго разрешење:

$B = 109°17'41{\cdot}49''$, $C = 156°12'6{\cdot}32''$, $c = 155°6'5{\cdot}84''$.

204. Пример. Дата су два угла и страна наспрам једног од њих, и то

$$A = 56^\circ 47' 28{\cdot}19'', \quad B = 59^\circ 47' 23{\cdot}38'', \quad a = 61^\circ 21' 18{\cdot}92'';$$

траже се стране a, b и угао C.

Рачунање стране b.

$$\sin b = \frac{\sin B \sin a}{\sin A}.$$

$\log \sin B$	$9{\cdot}9366070-10$
$-\log \sin A$	$0{\cdot}0774407$
$\log \sin a$	$9{\cdot}9433010-10$
Збир	$19{\cdot}9573487-20$
$\log \sin b$	$9{\cdot}9573487-10$

$$b \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \begin{cases} 65^\circ \;\; 1' \, 14{\cdot}39'' \\ 114^\circ \, 58' \, 45{\cdot}21'' \end{cases}$$

Рачунање стране c

$$tg\,\varphi = -\frac{cotg\, a}{\cos B},$$

$$tg\, l = \frac{cotg\, b'}{\cos A}$$

$$c = \varphi \pm l.$$

$lg\, cotg\, a$ . . .	$9{\cdot}7373766-10$
$-lg \cos B$.	$0{\cdot}2982823$
Збир . . .	$10{\cdot}0356589-10$
$lg - tg\,\varphi$.	$0{\cdot}0356589$
φ.	$132^\circ \, 39' \, 1{\cdot}54''$

Рачунање угла C.

$$tg\,\psi = -\, tg\, B \cos a$$

$$= \sin B \sin a \;\, tg\,\varphi,$$

$$tg\, L = \sin a \sin B \; tg\, l.$$

$$C = \psi \pm L.$$

$lg \sin B$. . . .	$9{\cdot}9366070-10$
$lg \sin a$	$9{\cdot}4433010-10$
$lg - tg\,\varphi$ . .	$0{\cdot}0356589$
Збир	$19{\cdot}4155669-20$
$lg - tg\,\psi$ . .	$9{\cdot}4155669-10$
ψ	$165^\circ \, 24' \, 24{\cdot}13''$

$\lg\cos b'$ . . .	9·6682635—10	$\lg\sin a$	9·4433010—10
$-\lg\cos A$.	0·2614634	$\lg\sin B$. . . .	9·9366070—10
Збир. . . .	9·9297269—10	$\lg tg\, l$	9·9297269—10
$\lg tg\, l$	9·9297269—10	Збир	29·3096349—30
l.	40° 23′ 4·52″	$\lg tg\, L$.	9·3096349—10
		L.	11° 31′ 48·91″

Прво разрешење:

$$b = 114°58'45{\cdot}21'', \quad c = 173°2'\,6{\cdot}06'', \quad C = 176°56'13{\cdot}04''$$

Друго разрешење:

$$b = 65°1'\,14{\cdot}39'', \quad c = 92°15'\,57{\cdot}02'', \quad C = 153°52'35{\cdot}22''.$$

Претрес случајева, у којима може бити двојаког разрешења.

205. Пети и шести случај, које најпосле пређосмо, једини су, код којих може бити двојаког разрешења па и то не увек. Обрасци, који се односе на та два случаја, показују у свакој даној прилици, колико има разрешења, и дају увек сигурно и несумњиво непознате комаде свакога разрешења. Али опет зато занимљиво је и корисно у исти мах претрести са сваке стране оба та случаја.

Ми ћемо претрести само пети случај, кад су дате стране a, b и угао A, јер прво претрес шестог случаја сасвим је сличан, а друго разрешавање шестог случаја може се, као што смо већ пре напоменули, свести на разрешавање петога средством суплементног троугла.

Узимајући најпре да је $a = b$, због чега на основу № 171 и $A = B$ бити мора, добићемо из неперових образаца

$$1)\quad cotg\,\frac{1}{2}\,C = tg\,A\,cos\,a,\quad tg\,\frac{1}{2}\,c = tg\,a\,cos\,A.$$

Ако је осим $a = b$ још и $A = 90^{\circ}$, $a = 90^{\circ}$, то ће ови обрасци под 1) дати

$$cotg\,\frac{1}{2}\,C = \frac{0}{0},\quad tg\,\frac{1}{2}\,c = \frac{0}{0},$$

одакле сљедује, да је задатак тада неодређен, што се уосталом и иначе увиђа.

Ако ли је осим $a = b$ још само један од комада A, a једнак 90°, биће на основу образаца под 1)

$$cotg\,\frac{1}{2}\,C = \infty \quad \text{или} \quad tg\,\frac{1}{2}\,c = \infty$$

и потоме

$$C = 0 \quad \text{или} \quad c = 180^{\circ},$$

одакле сљедује, да задатак нема тада никаквог разрешења, што се и геометријски може оправдати.

Остављајући сад на страну последње две претпоставке латимо се општијега случаја, где ни један од комада A, a није једнак 90°. Да би задатак био можан, треба да су $tg\,A$ и $cos\,a$, $cos\,A$ и $tg\,a$ истог знака, то ће рећи да су A и a оба већи или оба мањи од 90°, јер $cotg\,\frac{1}{2}\,C$ мора бити положна количина зато, што $C < 180^{\circ}$ бити мора. Ако је поменути услов испуњен, задатак ће имати једно и то само једно разрешење.

Узмимо сад нека су стране a, b неједнаке. Да би задатак био можан, треба да је

$$\frac{\sin b \ \sin A}{\sin a} < 1;$$

ако је овај услов испуњен, образац

$$3) \qquad \sin B = \frac{\sin A \ \sin b}{\sin a}$$

даће за непознати угао B једну вредност B', која је мања од 90°; али супленанат $180° - B' = B''$ има исти синус као и B', и потоме биће два и то суплементна угла B', и B'', који једначину под 3) задовољавају.

Да би једна од тих вредности угла B задатку одговорила, треба само (№ 198) да су разлике $A - B$, $a - b$ истог знака. Знак разлике $a - b$ познат је, јер су стране a, b дате, и потоме лако је у свакој даној прилици дознати, да ли за B нађене вредности B', B'' задатку одговарају или не. Начин, како у том погледу ваља поступити, неможе бити простији. Треба само од даног угла A одузети сваки од два угла B', B'' нађена помоћу образаца под 3). Ако су разлике $A - B'$, $A - B''$ истог знака са разликом $a - b$, онда ће угли B', B'' одговарати оба задатку, и овај ће имати два разрешења. Ако ли је само једна од разлика $A - B'$, $A - B''$ истог знака са $a - b$, на пример $A - B'$ онда ће само B' задатку одговарати а B'' не, и задатак ће имати само једно разрешење. Најзад ако ниједна од разлика $A - B'$, $A - B''$ није истог знака са разликом $a - b$, онда ни B' ни B'' неодговара задатку и потоме овај нема никаквог разрешења.

Претпоставимо сад нека је $A < 90°$, што се тиче комада b, могу бити ова три случаја

$$b < 90°, \quad b = 90°, \quad b > 90°.$$

1° $A < 90°$ и $b < 90°$.

Ако је $a < b$ образац под 3) даће $B' > A$. Уосталом је већ $B'' > 90^\circ > A$; дакле су разлике $A - B'$, $A - B''$ истог знака са $a - b$, и зато задатак има два разрешења.

Ако је $a > b$, то може бити

$$a + b < 180^\circ, \quad a + b = 180^\circ, \quad a + b > 180^\circ.$$

Нека је $a + b < 180^\circ$; одатле сљедује $b < 180^\circ - a$, $\sin b < \sin a$, дакле на основу обрасца под 2) $B' < A$. Разлика $A - B'$ истог је знака са разликом $a - b$ и с тога вредност B' одговара задатку. Што се тиче угла B'' он се мора одбацити, јер су разлике $A - B''$, $a - b$ противног знака. Задатак има дакле само једно разрешење.

Нека је сад $a + b = 180^\circ$; одатле сљедује $b = 180^\circ - a$, $\sin b = \sin a$, дакле $B' = A$ и $B'' > A$. Разлике $A - B'$, $A - B''$ нису истог знака са $a - b$, дакле задатак нема никаквог разрешења.

Нека је најзад $a + b > 180^\circ$; одатле сљедује $b > 180^\circ - a$, $\sin b > \sin a$, дакле $B' > A$ и тим пре $B'' > A$. Разлике $A - B'$, $A - B''$ противног су знака са $a - b$, и зато задатак нема ниједног разрешења.

2°. $A < 90^\circ$, $b = 90^\circ$.

Образац под 2) даје и сад $B' > A$; угао B'' као туп јесте такође $> A$, осим ако је $a = 90^\circ$ у ком је случају $B' = A$. По овоме ако је $a < b$, задатак ће имати два разрешења, јер су тада разлике $A - B'$, $A - B''$ истог знака са разликом $a - b$; напротив ако је $a = 90^\circ$ или $> 90^\circ$, задатак неће имати ниједно разрешење.

3°. $A < 90^\circ$, $b > 90^\circ$.

Ако је $a < b$, то може бити

$$a + b < 180^\circ, \quad a + b = 180^\circ, \quad a + b > 180^\circ.$$

Нека је $a + b < 180^\circ$; одатле сљедује $b < 180^\circ - a$, $\sin b > \sin a$, и на основу обрасца под 2) $B' > A$, дакле тим пре $B'' > A$. Разлике $A - B'$, $A - B''$ истог су знака са $a - b$, задатак има дакле два разрешења.

Нека је сад $a + b = 180^\circ$; одатле сљедује $b = 180^\circ - a$, $\sin b = \sin a$, дакле $B' = A$ и $B'' > A$. Разлика $A - B''$ истог је знака са $a - b$, дакле B'' одговара задатку. Угао B' мора се одбацити, јер је $A - B' = o$, док је међутим $a - b < o$. Задатак има дакле само једно разрешење.

Нека је најзад $a + b > 180^\circ$; одатле сљедује $b > 180^\circ - a$, $\sin b < \sin a$, дакле $B' < A$; уосталом је $B'' > A$. Пошто је разлика $A - B''$ истог знака са $a - b$, а разлика $A - B$ противног, то само B'' одговара задатку и потоме овај има само једно разрешење.

Ако је $a > b$, онда је $\sin a < \sin b$ — јер су a и b већи од 90° —, и с тога $B' > A$, дакле тим пре $B'' > A$. Пошто су разлике $A - B'$, $A - B''$ противног знака са $a - b$, то задатак нема ниједног разрешења.

Ако на исти начин претресемо претпоставке $A = 90^\circ$, $A > 90^\circ$, моћићемо склопити сљедећу таблицу.

$A < 90^\circ$	$b < 90^\circ$	$a < b$	два разрешења
		$a = b$	једно разрешење,
		$a > b$ и $a + b < 180^\circ$	једно разрешење,
		$a > b$ и $a + b \geqq 180^\circ$	ниједно разрешење.
	$b = 90^\circ$	$a < b$	два разрешења,
		$a \geqq b$	ниједно разрешење.
	$b > 90^\circ$	$a < b$ и $a + b < 180^\circ$	два разрешења,
		$a < b$ и $a + b \geqq 180^\circ$	једно разрешење,
		$a \geqq b$	ниједно разрешење.

$$A=90^{\circ}\begin{cases} b<90^{\circ}\begin{cases} a \leqq b \ldots\ldots\ldots \text{ ниједно разрешење,} \\ a>b \text{ и } a+b<180^{\circ} \text{ једно разрешење,} \\ a>b \text{ и } a+b \geqq 180^{\circ} \text{ ниједно разрешење.} \end{cases} \\ b=90^{\circ}\begin{cases} a \lessgtr b \ldots\ldots\ldots \text{ ниједно разрешење,} \\ a=b \ldots \text{бесконачно много разрешења.} \end{cases} \\ b>90^{\circ}\begin{cases} a<b \text{ и } a+b>180^{\circ} \text{ једно разрешење,} \\ a<b \text{ и } a+b \leqq 180^{\circ} \text{ ниједно разрешење,} \\ a \geqq b \ldots\ldots\ldots \text{ ниједно разрешење.} \end{cases} \end{cases}$$

$$A>90^{\circ}\begin{cases} b<90^{\circ}\begin{cases} a \leqq b \ldots\ldots\ldots \text{ ниједно разрешење,} \\ a>b \text{ и } a+b>180^{\circ} \text{ два разрешења,} \\ a>b \text{ и } a+b \leqq 180^{\circ} \text{ једно разрешење.} \end{cases} \\ b=90^{\circ}\begin{cases} a \leqq b \ldots\ldots\ldots \text{ ниједно разрешење,} \\ a>b \ldots\ldots\ldots \text{ два разрешења.} \end{cases} \\ b>90^{\circ}\begin{cases} a<b \text{ и } a+b>180^{\circ} \text{ једно разрешење,} \\ a<b \text{ и } a+b \leqq 180^{\circ} \text{ ниједно разрешење,} \\ a=b \ldots\ldots\ldots \text{ једно разрешење,} \\ a>b \ldots\ldots\ldots \text{ два разрешења.} \end{cases} \end{cases}$$

Из ове таблице види се, да задатак има два разрешења само онда, кад је

$$A < 90^\circ, \quad a < b, \quad a + b < 180^\circ.$$

или

$$A > 90^\circ, \quad a > b, \quad a + b > 180^\circ,$$

Сличним претресом шестога случаја, где су дати комади A, B, a, нашли би горњој сасвим сличну таблицу, из које би дознали, да задатак у шестом случају има два разрешења само онда, кад је

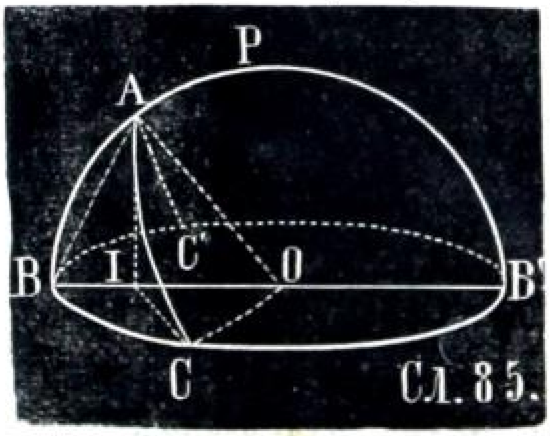
$$a < 90^\circ, \quad A < B, \quad A + B < 180^\circ,$$

или

$$a > 90^\circ, \quad A > B, \quad A + B > 180^\circ.$$

206. Резултати у горњој таблици могу се и геометријски оправдати помоћу неколико геометријских истина, које ћемо најпре да докажемо.

1°. Нека је (сл. 85) лук $AB < 90^\circ$ и управан на кругу BCB'. *Исти лук AB најмањи је од свију других лукова, који су од тачке A па до круга BCB' повучени, и потоме је лук APB, суплеменат лука AB, највећи.*



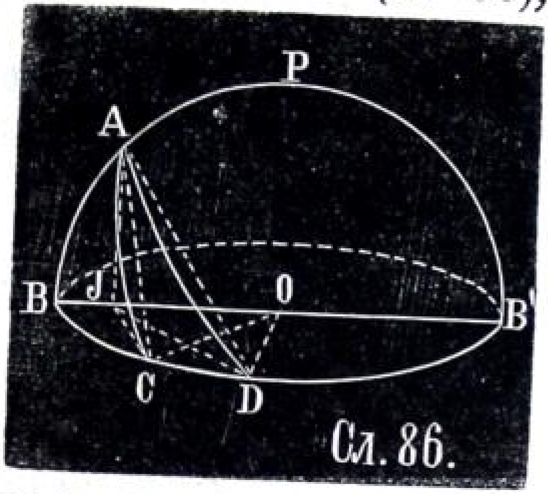
Сл. 85.

Да би ово доказали, спустимо са тачке A управну AJ на раван круга BCB'. Тачка J пашће у полупречник OB између тачака O и B, јер је угао AOB на основу претпоставке оштар. Повуцимо још кроз тачку A лук AC ка ма којој тачки круга BCB'. Из равног троугла OCJ добићемо $OC < OJ + JC$, одакле $BJ < CJ$. Одатле сљедује, да је тетиво AB мање од тетива AC; дакле је лук AB мањи од лука AC.

2°. *Косо повучени луци AC, AC', који су од управног лука AB или AB' једнако удаљени, јесу једнаки.*

Јер правоугли сферни троугли BAC, BAC' имају један угао једнак између двеју једнаких страна.

3°. *Од два косо повучена лука* AC, AD (сл. 86), *који су од мањег управног лука* AB *неједнако удаљени, онај је већи, који је од лука* AB *даљи.*



Сл. 86.

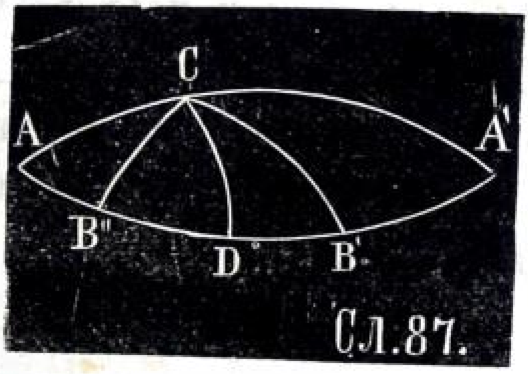
Јер троугли OJC, OJD имају страну JO заједнички, а осим тога је $OC = OD$ и угао $JOD > JOC$; дакле је на основу једне познате геометријске теореме $JD > JC$. Одатле сљедује да је тетиво AD веће од тетива AC, и потоме је лук AD већи од лука AC.

Из овога што је доказано сљедује само по себи, да је од два лука AC, AD, који су од већег управног лука AB' неједнако удаљени, онај мањи, који је од њега даљи.

207. Претпоставимо сада да се тражи један сферни троугао из две стране a, b и угла A.

Нека је $A < 90°$ и $b < 90°$.

Отсецимо на једном краку угла $CAD = A$ (сл. 87) $AC = b < 90°$ и са тачке C спустимо лук CD управно на други крак угла. Лук CD биће мањи од $90°$, јер он мора бити истог рода са супротним углом A. У овом случају лук CD јесте најмањи од свију лукова, који су од тачке C до ма које тачке круга ADA' повучени, и потоме да би задатак био можан, треба да је страна a већа или барем једнака луку CD. Но из правоуглог троугла CAD сљедује $\sin CD = \sin b \sin A$, дакле треба да је



Сл. 87.

$$sin\,a \geqq sin\,b\ sin\,A \quad \text{или} \quad \frac{sin\,b\ sin\,A}{sin\,a} \leqq 1.$$

Претпоставимо нека је

$$\frac{sin\,b\ sin\,A}{sin\,a} < 1\,;$$

одатле сљедује $a > CD$; ако је још $a < b = CA$, то ће се између лукова CD, CA моћи повући један лук $CB'' = a$ и троугао ACB'' одговараће задатку.

Ако узмемо $DB' = DB''$, то је лук $CB' = CB'' = a$ и троугао ACB' одговара такође задатку, овај дакле има два разрешења.

Али ако је $a = CA = b$, онда тачка B'' пада у A, троугао ACB'' тада ишчезава и задатак има само једно разрешење то јест троугао ACB'.

Ако је $a > b = AC$ и $a + b < 180^\circ$, тачка B'' пада у продужење лука DA лево од тачке A, док међутим тачка B' остаје на полукругу ADA' и то између тачака D и A'; задатак има дакле једно разрешење ACB'.

Напослетку ако је $a + b \overline{\overline{>}}\, 180^\circ$, тачка B'' пада и у једном и у другом случају у продужење лука DA и то лево од A, док међутим тачка B' пада у првом случају у A' а у другом десно од A'; задатак нема дакле у оба та случаја ниједног разрешења.

Све остале претпоставке претресају се геометријски на исти начин.

Изражај страна сферног троугла у метрима и његове површине у квадратним метрима.

208. У свима досадањим обрасцима претпостављалисмо, да су стране a, b, c биле дате у степенима, минутама и

секундама. Ако се желе имати њине вредности у метрима, треба се послужити познатим обрасцем

$$l = \frac{\pi r n}{180.60.60},$$

где место r треба метнути полупречник лопте, на којој је сферни троугао, изражен у метрима, а место n страну сфернога троугла изражену у секундама само. Тако на пример ако је a'' број секунада стране a и r полупречник дотичне лопте изражен у метрима, биће дужина исте стране у метрима

$$a = \frac{\pi r a''}{180.60.60}.$$

Број $\frac{\pi}{180.60.60}$ у овом обрасцу јесте дужина лука од једне секунде у кругу, којег је полупречник једнак јединици; исти број може се заменити са $\sin 1''$, који се од њега разликује у мање од четири јединице седамнајестог десетног места. После те замене изгледаће последњи образац овако

$$1) \qquad a = a'' r \sin 1'',$$

где $r \sin 1''$ значи дужину лука од једне секунде у кругу, којег је полупречник $= r$. Из обрасца 1) сљедује образац

$$a'' = \frac{a}{r \sin 1''},$$

који даје број секунада стране, која је изражена у метрима.

Означавајући са p површину сфернога троугла изражену у квадратним метрима, са ε његов сферни сувишак, а са r полупречник дотичне лопте изражен у метрима имамо (№ 154):

$$p = \frac{\pi r^2}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{90^0} \quad \text{или} \quad p = r^2 \varepsilon \frac{\pi}{2^{\text{пр}}},$$

где $2^{\text{пр}}$ значи два права угла. Ако ε и $2^{\text{пр}}$ изразимо у секундама, број $\frac{\pi}{2^{\text{пр}}}$ биће дужина лука од 1" у кругу, којег је полупречник једнак јединици. Тај број моћићемо заменути дакле са $sin\ 1''$, па ћемо тада имати

$$2) \qquad p = r^2 \varepsilon\ sin\ 1''.$$

Ако сматрамо земљу као лопту, на којој један велики круг износи 40000000 метара, то ће лук од 1" таквог једног круга бити једнак $\frac{20000000^{\text{м}}}{180.60.60}$ то ће рећи $\frac{10000^{\text{м}}}{324}$ У геодетским применама замениће се дакле $r\ sin\ 1''$ размером $\frac{10000}{324}$ и тада ће обрасци под 1) и 2) изгледати овако

$$1') \qquad a = a'' \frac{10000}{324}$$

$$p = r\varepsilon \frac{10000}{324}.$$

Ако се десна страна последњег обрасца помножи и раздели са $sin\ 1''$, исти образац претвориће се у сљедећи

$$2') \qquad p = \frac{\varepsilon}{sin\ 1''} \left(\frac{10000}{324}\right)^2.$$

Још ћемо приметити да је

$$log\ sin\ 1'' = 4{\cdot}6855748668 \text{ и } log \frac{1}{sin\ 1''} = 5{\cdot}3144251332.$$

Задатци.

1° Разрешити правоугли сферни троугао, кад су познати комади

α) $a = 70^\circ 37' 53\cdot 68''$, $c = 47^\circ 58' 17\cdot 96''$,

β) $a = 91^\circ 34' 25\cdot 62''$, $B = 49^\circ 51' 38\cdot 77''$,

γ) $b = 130^\circ 11' 5\cdot 21''$, $c = 91^\circ 44' 55\cdot 08''$,

δ) $c = 50^\circ, 18' 29\cdot 07''$, $B = 93^\circ 12' 17\cdot 06''$,

ε) $C = 92^\circ 59' 57\cdot 96''$, $c = 117^\circ 8' 23\cdot 19''$,

ς) $B = 129^\circ 33' 53\cdot 26''$, $C = 88^\circ 3' 56\cdot 42''$.

2°) Разрешити један сферни троугао, кад су познати комади

α) $a = 26^\circ 32' 41\cdot 59''$, $b = 85^\circ 21' 18\cdot 62''$, $c = 69^\circ 13' 22\cdot 33''$,

β) $A = 122^\circ 49' 15\cdot 93''$, $B = 41^\circ 3' 36\cdot 12''$, $C = 52^\circ 18' 23\cdot 52''$,

γ) $b = 109^\circ 36' 18\cdot 08''$, $c = 68^\circ 59' 57\cdot 89''$, $A = 35^\circ 11' 12\cdot 33''$,

δ) $A = 108^\circ 5' 27\cdot 31''$, $C = 51^\circ 56' 47\cdot 12''$, $b = 38^\circ 34' 43\cdot 91''$,

ε) $B = 35^\circ 44' 23\cdot 65''$, $b = 50^\circ 6' 37\cdot 07''$, $c = 83^\circ 47' 34\cdot 24''$,

ς) $a = 158^\circ 9' 37\cdot 16''$, $A = 157^\circ 26' 56\cdot 74''$, $B = 98^\circ 16' 31\cdot 75''$.

3°. Разрешити сферни троугао, кад се да

α) Основица, висина, и збир или разлика осталих двеју страна.

β) Основица, супротни угао и висина.

γ) Основица, супротни угао и збир или разлика осталих двеју страна.

δ) Збир из свакога угла и супротне му стране.

4°. Наћи растојања троуглових темена од пôла уписаног круга а тако исто и растојања пôла описаног круга од троуглових страна.

5°. Разрешити правоугли сферни троугао, кад је позната ипотенуза и сферни полупречник уписаног круга.

Разрешавање сферних троуглова, у којих су стране врло мале.

209. Помоћу једне Legendre-ом 1787 год. пронађене теореме, и која се по њему зове Лежандрова, може се разрешавање сферних троуглова, којих су стране наспрам полупречника дотичне лопте врло мале, свести на разрешавање равних троуглова. Та теорема, која је особито за геодезију важна, гласи овако:

Кад су стране сферног троугла наспрам полупречника одговарајуће лопте врло мале, онда се исти троугао може са врло великом приближношћу сматрати као једнак једном равном троуглу, којег су стране једнаке странама сфернога троугла и којег су угли, пошто се свакоме дода трећина сфернога сувишка, једнаки углима сфернога троугла.

Да би сад ову теорему доказали, кажимо нека су A, B, C угли сфернога троугла, a, b, c дужине супротних страна и r полупречник лопте; стране и полупречник измерени су наравно истом линеарном јединицом. Узимајући на ум да су размере $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ дужине страна сфернога троугла, кад је полупречник r узет за јединицу и стављајући $a+b+c=2s$ имаћемо (№ 168)

$$\sin\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin\frac{s-b}{r}\,\sin\frac{s-c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\,\sin\frac{c}{r}}}$$

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{\sin\frac{s}{r}\,\sin\frac{s-a}{r}}{\sin\frac{b}{r}\,\sin\frac{c}{r}}}$$

но на основу образаца у № 52 је

$$\sin\frac{s}{r}=\frac{s}{r}-\frac{s^3}{6r^3}+\ldots,$$

$$\sin\frac{s-a}{r}=\frac{s-a}{r}-\frac{(s-a)^3}{6r^3}+\ldots,$$

$$\sin\frac{s-b}{r}=\frac{s-b}{r}-\frac{(s-b)^3}{6r^3}+\ldots,$$

$$\sin\frac{s-c}{r}=\frac{s-c}{r}-\frac{(s-c)^3}{6r^3}+\ldots.$$

$$\sin\frac{b}{r}=\frac{b}{r}-\frac{b^3}{6r^3}+\ldots,$$

$$\sin\frac{c}{r}=\frac{c}{r}-\frac{c^3}{6r^3}+\ldots.$$

замењујући ове вредности у горњим обрасцима за $\sin\frac{1}{2}A$ и $\cos\frac{1}{2}A$, занемарујући притом чланове са четвртим и вишим степенима количине $\frac{1}{r}$, и узимајући осим тога на ум да ћемо држећи се у границама те приближности моћи ставити

$$\frac{1}{1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}}=1+\frac{b^2+c^2}{r^2}$$

добићемо

$$sin\,\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{1+\frac{s(s-a)}{3r^2}}$$

$$cos\,\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\sqrt{1+\frac{(s-b)(s-c)}{3r^2}}$$

одакле, пошто из другог чиниоца десно извучемо корен квадратни помоћу биномног обрасца

$$1)\quad\left\{\begin{aligned}sin\,\frac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\left[1+\frac{s(s-a)}{3r^2}\right]\\cos\,\frac{1}{2}A&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\left[1-\frac{(s-b)(s-c)}{3r^2}\right].\end{aligned}\right.$$

Узмимо сад да имамо један раван троугао са странама a, b, c; A', B', C' нека су супротни угли, а P' површина тога троугла. На основу образаца под 3) и 4) у № 73 имамо

$$1)\quad\left\{\begin{aligned}sin\,\frac{1}{2}A'&=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\\cos\,\frac{1}{2}A'&=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\end{aligned}\right.$$

Ако сад помоћу образаца под 1) и 2) изнаћемо вредности производа

$$\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A', \quad \cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}A',$$

и од првог одузмемо други, наћиће мо после врло простог свођаја.

$$\sin\frac{1}{2}(A-A') = \frac{\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}{6\,r^2} = \frac{P'}{6\,r^2}\,.$$

Одавде добијамо са једнаком приближношћу (№ 45, 46)

$$\frac{1}{2}(A-A') = \sin\frac{1}{2}(A-A') = \frac{P'}{6\,r^2}\,,$$

или

$$A = A' + \frac{P'}{3\,r^2}\,,$$

По овоме имамо дакле сљедећи низ образаца

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} A &= A' + \frac{P'}{3\,r^2}\,, \\ B &= B' + \frac{P'}{3\,r^2}\,, \\ C &= C' + \frac{P'}{3\,r^2}\,. \end{aligned}\right.$$

Угли A, B, C, A', B', C' у овим обрасцима изражени су не у степенима, минутама и секундама, већ дужинама лукова, који су са полупречником јединицом између њихових кракова описани. Сабирајући једначине под 1) и сећајући се, да је $A' + B' + C' = \pi$, добијамо

$$4)\qquad A + B + C = \pi + \frac{P'}{r^2}\cdot$$

Означавајући сад са P површину сферног троугла а са ε његов сферни сувишак, изражен на исти начин као и угли A, B, C имаћемо (№ 154):

$$5)\qquad A + B + C - \pi = \varepsilon = \frac{P}{r^2};$$

поредећи ову једначину са горњом добијамо

$$6)\qquad P = P'.$$

С обзиром на последње једначине добијамо из образаца под 3)

$$7)\qquad \begin{cases} A = A' + \dfrac{\varepsilon}{3}, \\[2ex] B = B' + \dfrac{\varepsilon}{3}, \\[2ex] C = C' + \dfrac{\varepsilon}{3}, \end{cases}$$

и тиме је доказ лежандрове теореме довршен.

210. Метода, које смо се при доказивању лежандрове теореме држали, даје нам повода да покажемо, како се из образаца сферне тригонометрије могу извести обрасци равне тригонометрије.

Обрасци под 1) у № 209 вреде само приближно, јер смо при њиховом извођењу занемарили чланове са четвртим и вишим степенима количине $\dfrac{1}{r}$; но они постају сасвим тачни за $r = \infty$ — у ком случају лопта прелази у раван а сферни троугао у раван троугао — и своде се на обрасце 3) и 4) № 72 равне тригонометрије.

Исто тако лако дају се извести и остали обрасци равне тригонометрије из одговарајућих образаца сферне. Тако на пример да би први образац под 2) у № 68 равне тригонометрије добили, узмимо нека су a, b, c дужине страна једног сферног троугла, измерених ма каквом линеарном јединицом; $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$ биће дужине истих страна, кад је полупречник r лопте узет као јединица; на основу образаца под 1) у № 156 имаћемо

$$1') \qquad \cos\frac{a}{r} = \cos\frac{b}{r}\cos\frac{c}{r} + \sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}\cos A;$$

али је на основу образаца под 2) и 4) у № 52

$$\cos\frac{a}{r} = 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} + \frac{1}{24}\frac{a^4}{r^4} - \ldots.,$$

$$\cos\frac{b}{r} = 1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{r^2} + \frac{1}{24}\frac{b^4}{r^4} - \ldots.$$

$$\cos\frac{c}{r} = 1 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} + \frac{1}{24}\frac{c^4}{r^4} - \ldots.,$$

$$\sin\frac{b}{r} = \frac{b}{r} - \frac{1}{6}\frac{b^3}{r^3} + \ldots.,$$

$$\sin\frac{c}{r} = \frac{c}{r} - \frac{1}{6}\frac{c^3}{r^3} + \ldots.;$$

замењујући ове вредности у једначину под 1') добијамо

$$1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} + \ldots . = (1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{r^2} + \ldots .)(1 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2} + \ldots)$$

$$+ \left(\frac{b}{r} - \frac{1}{6}\frac{b^3}{r^3} + \ldots ..\right)\left(\frac{c}{r} - \frac{1}{6}\frac{c^3}{r^3} + \ldots .\right)\cos A,$$

одакле

$$1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} + \ldots . = 1 - \frac{1}{2}\frac{b^2 + c^2}{r^2} + \ldots . + \frac{bc}{r^2}(1 - \ldots .)\cos A$$

или

$$-\frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} + \ldots . = -\frac{1}{2}\frac{b^2 + c^2}{r^2} + \ldots . + \frac{bc}{r^2}(1 - \ldots .)\cos A$$

где сви изостављени чланови имају у имениоцима количину r подигнуту на више степене но други.

Ако последњу једначину помножимо са $-2r^2$ изаћиће

$$a^2 + \ldots . = b^2 + c^2 + \ldots . - 2bc\,(1 - \ldots .)\cos A.$$

Ако ставимо $r = \infty$, то лопта прелази у раван а сферни троугао у раван троугао и горњи образац, пошто сви изостављени чланови отпадају, јер имају r у имениоцима, даје

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

211. Радећи по методи № 209 можемо доћи до колико хоћемо тачних резултата; тако на пример ако у горњој радњи (№ 209) занемаримо тек чланове, који су односно количине $\frac{1}{r}$ шестог и следећих виших степена, наћићемо

$$8)\quad A = A' + \frac{\varepsilon}{3} + \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2 \frac{\sin^2 B' + \sin^2 C' - 2\sin^2 A'}{10\sin A'\sin B'\sin C'}$$

$$8)\quad \begin{cases} B = B' + \frac{\varepsilon}{3} + \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2 \frac{\sin^2 C' + \sin^2 A' - 2\sin^2 B'}{10 \sin A' \sin B' \sin C'} \\ C = C' + \frac{\varepsilon}{3} + \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^2 \frac{\sin^2 A' + \sin^2 B' - 2\sin^2 C'}{10 \sin A' \sin B' \sin C'} \end{cases}$$

$$9)\qquad P = P' + \frac{P'^2}{r^2} \frac{\sin^2 A' + \sin^2 B' + \sin^2 C'}{12 \sin A' \sin B' \sin C'}$$

Помоћу образаца под 8) може се на лак начин доказати, да се Лежандров образац може слободно применити на троугле, којих стране износе 15 до 16 географских миља — дакле преко једног степена, — а да погрешке израчунатих сферних углова небуду поједине $> 0{\cdot}001$ секунде.

Примена лежандрове теореме.

212. Лежандрова теорема за практику је од највеће важности. јер се помоћу ње, као што већ рекосмо, разрешавање сферног троугла може свести на разрешавање равног, а ово је последње обично много лакше и простије.

Ми ћемо да пређемо узастопце све поједине случајеве, којих може бити.

1°. Дате су три стране *a*, *b*, *c* сфернога троугла.

Најпре треба израчунати угле A', B', C' и површину P' равнога троугла, коме су *a*, *b*, *c* стране. Затим ће се помоћу обрасца

$$\varepsilon = \frac{P'}{r^2 \sin 1''}$$

израчунати сферни сувишак ε, па ће се онда помоћу образаца под 7) у № 209 изнаћи лако угли A, B, C сфернога троугла.

2°. Дане су две стране a, b и захваћени угао C.

Овде треба пре свега израчунати сферни сувишак ε. Из једначина под 5) и 6) у № 209 сљедује

$$\varepsilon = \frac{P}{r^2 \sin 1''} = \frac{P'}{r^2 \sin 1''};$$

у осталом је $P' = \frac{1}{2} ab \sin C'$, или пошто се, због $C' = C - \frac{P}{3r^2}$, $\sin C'$ од $\sin C$ разликује тек количином, која је по $\frac{1}{r}$ другог степена, $P' = \frac{1}{2} ab \sin C$; дакле је

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{ab \sin C}{r^2 \sin 1''}.$$

Помоћу овог обрасца израчунаће се ε, па ће онда трећа једначина под 7) у № 209 дати C'; пошто је C' нађено решиће се раван троугао, у коме су a, b, C' познати комади, и на тај начин наћиће се c, A', B'; после тога обрасци под 7) у № 209 даће угле A, B сфернога троугла.

3°. Дати су угли A, B и страна c, на којој они леже.

Површина P' равног троугла, којег су стране једнаке странама сферног троугла, дата је обрасцем

$$P' = \frac{c^2}{2} \frac{\sin A' \sin B'}{\sin(A' + B')},$$

место којег се може узети

$$P' = \frac{c^2}{2} \frac{\sin A \sin B}{\sin(A+B)};$$

замењујући ово у обрасцу $\varepsilon = \frac{P'}{r^2 \sin 1''}$ добијамо

$$\varepsilon = \frac{c^2}{2r^2} \frac{\sin A \sin B}{\sin(A+B) \sin 1''}.$$

Овај образац даје ε, после чега се из образаца под 7) № 209 налазе угли A', B'; задатак се затим своди на разрешавање једног равног троугла, у коме су познати комади A', B', c.

4°. Дате су две стране a, b и угао A.

Површина P' равног троугла са истим странама као и сферни дата је обрасцем

$$P' = \frac{1}{2} ab \sin(A' + B'),$$

који се може заменити сљедећим

$$P' = \frac{1}{2} ab \sin(A + B).$$

Стављајући ово у обрасцу $\varepsilon = \frac{P'}{r^2 \sin 1''}$ добијамо

$$\varepsilon = \frac{ab}{2r^2} \frac{\sin(A+B)}{\sin 1''}.$$

Угао B није дат, али се из приближно тачног обрасца $\sin B = \frac{b}{a} \sin A$ може наћи. Пошто је ε помоћу горњег обрасца нађено, наћиће се A' из првог обрасца под 7) у № 209, па ће онда задатак бити сведен на разрешавање равног троугла, у коме су a, b, A' дати комади; пошто је раван троугао разрешен, обрасци под 7) даће угле B и C сферногa троугла.

5°. Дата су два угла A, B и страна a.

Површина равног троугла са истим странама као и сферни троугао дата је обрасцем

$$P' = \frac{1}{2}\,\frac{a^2 \sin B' \sin C'}{\sin (B' + C')} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2 \sin B' \sin (A' + B')}{\sin A'}$$

место којег се може узети

$$P' = \frac{1}{2}\,\frac{a^2 \sin B \sin (A + B)}{\sin A}.$$

Замењујући P' овом вредности у $\varepsilon = \frac{P'}{r^2 \sin 1''}$ добијамо

$$\varepsilon = \frac{a^2}{2\,r^2}\,\frac{\sin B \sin (A + B)}{\sin A \sin 1''}.$$

Из овог обрасца добија се ε, а затим из образаца 7) у № 209 угли A', B', после чега се задатак своди на разрешавање равног троугла, у коме су A', B', a познати комади.

213. Лежандрова теорема може се још употребити и на разрешавање сферних троуглова, у којих су две стране скоро једнаке 180°, јер кад се исте стране продуже дотле, докле се исте опет непресеку, добиће се нов један сферни троугао којег су стране врло мале. Разрешењем тога троугла, у којег су три комада позната, добиће се његови непознати комади, па онда из њих лако и непознати комади даног троугла.

Исто тако може се лежандрова теорема применити и на разрешавање сферних троуглова, у којих су два угла врло мала, јер су тада две стране суплементног троугла скоро једнаке 180°.

Разрешавање сферних троуглова у случајевима који су слични оном у № 209.

214. *Дате су три стране једног сферног троугла и тражи се један од углова, при томе се претпоставља да се стране, које тражени угао захватају, од 90° врло мало разликују.*

Нека су b, c стране, које се од 90° врло мало разликују; угао A, који се тражи, разликује се од a очевидно врло мало. Ако дакле ставимо

$$b = 90^\circ + \beta, \quad c = 90^\circ + \gamma, \quad A = a + x,$$

то ће количине β, γ, x бити врло мале. Замењујући последње вредности у једначину

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

добијамо

$$\cos (a+x) = \frac{\cos a - \sin\beta \sin\gamma}{\cos\beta \cos\gamma}.$$

Но како су β и γ врло мали луци, то можемо, на основу образаца под 2) и 4) у № 52, пошто занемаримо чланове, који су односно β и γ четвртог и виших степена, ставити

$$\sin\beta \sin\gamma = \beta\gamma, \quad \cos\beta \cos\gamma = 1 - \frac{\beta^2}{2} - \frac{\gamma^2}{2};$$

на тај начин добићемо

$$cos\,(a+x)=\frac{cos\,a-\beta\gamma}{1-\frac{1}{2}\beta^2-\frac{1}{2}\gamma^2}$$

$$=(1+\frac{1}{2}\beta^2+\frac{1}{2}\gamma^2)\,cos\,a-\beta\gamma.$$

Занемарујући други и сљедеће више степене од x имаћемо

$$cos\,(a+x)=cos\,a-x\,sin\,a\,,$$

дакле

$$1)\qquad x=\frac{\beta\gamma-\frac{1}{2}(\beta^2+\gamma^2)\,cos\,a}{sin\,a}$$

Пошто је x односно β и γ другог степена, то су количине, које су у последњем изразу занемарене, односно β и γ четвртог степена.

Стављајући сад

$$\frac{1}{2}(\beta+\gamma)=p\,,\quad \frac{1}{2}(\beta-\gamma)=q\,,$$

одакле $\beta=p+q\,,\quad \gamma=p-q\,,$

добићемо из 1)

$$2)\qquad x=\frac{p^2\,(1-cos\,a)}{sin\,a}-\frac{q^2\,(1+cos\,a)}{sin\,a}\,,$$

или

$$3)\qquad x=p^2\,tg\frac{1}{2}a-q^2\,cotg\frac{1}{2}a.$$

Овде се претпоставља, да су p, q, па дакле и x изражени у деловима полупречника; али у практици p и q дају се обично у секундама; ако се дакле хоће x у секундама, онда треба написати

$$4) \qquad x = p^2\, tg\, \frac{1}{2}\, a \sin 1'' - q^2 \cot g\, \frac{1}{2}\, a \sin 1''.$$

Нађени образац корисно се употребљује у геодетским радњама при своћењу углова на хоризонат; њиме се брже долази до резултата но помоћу обрасца № 188, који се употребљује при разрешавању сферних троуглова у првом случају. Али ако угли β, γ износе више од 2 или 3 степена, онда је сигурније радити по општој методи.

215. *Дате су стране b, c и захваћени угао A; али је страна c насирам стране b врло мала. Тражи се страна a.*

Замењујући у обрасцу

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$\cos c$ и $\sin c$ њиховим вредностима нађеним помоћу образаца под 2) и 4) у № 52 и занемарујући притом чланове, који су односно c четвртог и виших степена, добијамо

$$\cos a = \cos b\, (1 - \frac{1}{2}\, c^2) + \sin b \cos A\, (c - \frac{1}{6}\, c^3)$$

$$= \cos b + c \sin b \cos A - \frac{1}{2}\, c^2 \cos b - \frac{1}{6}\, c^3 \sin b \cos A,$$

одакле сљедује, да се a и b морају једно од друго у врло мало разликовати, што је у осталом и по себи увиђавно. Ставимо дакле

$$a = b + x,$$

где је x врло мало, па ћемо имати

1) $cos(b+x)=cos\,b+c\,sin\,b\,cos A-\frac{1}{2}c^2cos\,b-\frac{1}{6}c^3sin\,b\,cos\,A$

или

$$cos\,b\,cos\,x - sin\,b\,sin\,x$$

$$= cos\,b + c\,sin\,b\,cos\,A - \frac{1}{2}\,c^2\,cos\,b - \frac{1}{6}\,c^3\,sin\,b\,cos\,A.$$

Ако је c тако мало, да се већ c^2 може занемарити, онда ће се тим пре x моћи занемарити, и ми ћемо тада имати

$$cos\,b - x\,sin\,b = cos\,b + c\,sin\,b\,cos\,A,$$

одакле

2) $$x = -c\,cos\,A$$

као прву приближну вредност за x. Тачнију вредност за x добићемо, ако ставимо

$$x = -c\,cos\,A + y,$$

где је y односно количине c другог степена. Занемарујући трећи и сљедеће више степене од c имаћемо

$$x^2 = c^2\,cos^2 A, \quad x^3 = o, \ldots.$$

или

$$cos\,x = 1 - \frac{1}{2}x^2 = 1 - \frac{1}{2}\,c^2\,cos^2 A,$$

$$sin\,x = x = -c\,cos\,A + y,$$

дакле

$$\cos(b+x) = \cos b\,(1 - \frac{1}{2}\,c^2\cos^2 A) - \sin b\,(-c\cos A + y)$$

$$= \cos b - \frac{1}{2}\,c^2\cos b\cos^2 A + c\sin b\cos A - y\sin b.$$

По замени ових вредности у 1) добијамо

$$\cos b - \frac{1}{2}\,c^2\cos b\cos^2 A + c\sin b\cos A - y\sin b = \cos b +$$

$$+ c\sin b\cos A - \frac{1}{2}\,c^2\cos b - \frac{1}{6}\,c^3\sin b\cos A\,,$$

и одавде

$$y = \frac{1}{2}\,c^2\,\mathrm{cotg}\,b\sin^2 A\,;$$

дакле је

3)
$$x = -c\cos A + \frac{1}{2}\,c^2\,\mathrm{cotg}\,b\sin^2 A.$$

Још тачнију вредност за x наћићемо ако ставимо

$$x = -c\cos A + \frac{1}{2}\,c^2\,\mathrm{cotg}\,b\sin^2 A + z,$$

где је z односно количине c трећег степена. Занемарујући чланове са четвртим и вишим степенима од c имаћемо тада

$$x^2 = c^2\cos^2 A - a^3\,\mathrm{cotg}\,b\sin^2 A\cos A,\quad x^3 = -c^3\cos^3 A\,,$$

дакле

$$\cos(b+x) = \cos b\,(1 - \frac{1}{2}\,c^2\cos^2 A + \frac{1}{2}\,a^3\,\mathrm{cotg}\,b\sin^2 A\cos A) -$$

$$-\sin b\,(-c\cos A + \frac{1}{2}\,c^2\,\mathrm{cotg}\,b\sin^2 A + \frac{1}{6}\,c^3\cos^3 A + z).$$

По замени ових вредности у 1) излази

$$\cos b + c \sin b \cos A - \frac{1}{2} c^2 \cos b \cos^2 A - \frac{1}{2} c^2 \cos b \sin^2 A +$$

$$+ \frac{1}{2} c^3 \operatorname{cotg} b \cos b \sin^2 A \cos A - \frac{1}{6} c^3 \sin b \cos^3 A - z \sin b =$$

$$= \cos b + c \sin b \cos A - \frac{1}{2} c^2 \cos b - \frac{1}{6} c^3 \sin b \cos A,$$

а одатле

$$z = \frac{1}{2} c^3 \operatorname{cotg}^2 b \sin^2 A \cos A + \frac{1}{6} c^3 \sin^2 A \cos A,$$

дакле је

4) $$x = - c \cos A + \frac{1}{2} c^2 \operatorname{cotg} b \sin^2 A +$$

$$+ \frac{1}{2} c^3 \sin^2 A \cos A \left(\frac{1}{3} + \operatorname{cotg}^2 b \right),$$

и потоме

5) $$a = b - c \cos A + \frac{1}{2} c^2 \operatorname{cotg} b \sin^2 A +$$

$$+ \frac{1}{2} c^3 \sin^2 A \cos A \left(\frac{1}{3} + \operatorname{cotg}^2 b \right)$$

или ако се хоће у секундама

6) $$a = b - c \cos A + \frac{1}{2} c^2 \sin 1'' \operatorname{cotg} b \sin^2 A +$$

$$+ \frac{1}{2} c^3 \sin^2 1'' \sin^2 A \cos A \left(\frac{1}{3} + \operatorname{cotg}^2 b \right)$$

Ако је c тако мало, да се $c^3 sin^2 1''$ може занемарити, онда је

$$7) \qquad a = b - c \cos A + \frac{1}{2} c^2 \sin 1'' \cot g\, b \sin^2 A.$$

Разрешавање сферних троуглова, кад податци нису све сами комади троугла.

216. *Дат је угао A, страна a и збир или разлика $b \pm c$ осталих двеју страна.*

Како је кад $b+c$ или $b-c$ дато, израчунаће се угли B, C помоћу образаца (деламбрових)

$$\cos \frac{1}{2}(B-C) = \sin \frac{1}{2}(b+c) \frac{\sin \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} a},$$

$$\cos \frac{1}{2}(B+C) = \cos \frac{1}{2}(b+c) \frac{\sin \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} a},$$

или помоћу образаца

$$\sin \frac{1}{2}(B-C) = \sin \frac{1}{2}(b-c) \frac{\cos \frac{1}{2} A}{\sin \frac{1}{2} a},$$

$$\sin \frac{1}{2}(B+C) = \cos \frac{1}{2}(b-c) \frac{\cos \frac{1}{2} A}{\cos \frac{1}{2} a},$$

после чега се стране b, c дају лако израчунати.

217. *Познат је угао B, страна a и збир или разлика $b \pm c$ осталих двеју страна.*

Како је кад $b+c$ или $b-c$ дато, израчунаће се угао C помоћу обрасца

$$tg\frac{1}{2}C=\frac{sin\,(s-b)}{sin\,s}\,cotg\frac{1}{2}B,$$

или пак помоћу обрасца

$$tg\frac{1}{2}C=\frac{sin\,(s-b)}{sin\,(s-c)}\,tg\frac{1}{2}B,$$

после чега се непознати комади b, c, A дају лако израчунати по једној од метода у №ма 192, 193, 194. Последња два обрасца добијају се лако из оних у № 168.

218. *Дат је угао A, обим 2s троугла и сферни полупречник r уписаног круга.*

Из обрасца 1) у № 179 сљедује

$$sin\,(s-a)=tg\,r\,cotg\frac{1}{2}A;$$

помоћу овог обрасца налази се $s-a$, а затим лако и a; пошто је a нађено, задатак се своди на онај у № 216.

219. *Дати су угли A, B и сферни полупречник r уписаног круга.*

Обрасци

$$sin\,(s-a)=tg\,r\,cotg\frac{1}{2}A,\quad sin\,(s-b)=tg\,r\,cotg\frac{1}{2}B$$

дају $s-a$, $s-b$ па дакле и c јер је $c=(s-a)+(s-b)$;

пошто је c нађено, онда се комади a, b, C налазе помоћу образаца једне од № 192, 193, 194.

220. *Дати су угли B, C, површина p и полупречник r лопте, на којој се налази сферни троугао.*

Пошто је (№ 208, 2))

$$p = r^2 \varepsilon \sin 1''$$

то је $\varepsilon = \frac{p}{r^2 \sin 1''}$ или $A + B + C - 180^\circ = \frac{p}{r^2 \sin 1''}$

одакле у секундама

$$A = 180^\circ - (B + C) + \frac{p}{r^2 \sin 1''}$$

где се претпоставља, да је и $180^\circ - (B + C)$ у секундама изражено. Пошто је A изнађено, задатак се даље свршује по једној од метода показаних у № 188, 189.

221. *Дате су стране a, b, површина p и полупречник r лопте, на којој се троугао налази.*

Образац $\varepsilon = \frac{p}{r^2 \sin 1''}$ даје сферни сувишак у секундама, а затим се $C - \frac{1}{2}\varepsilon$, па дакле и C, налази помоћу обрасца

$$\sin (C - \frac{1}{2}\varepsilon) = cotg \frac{1}{2} a \, cotg \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2} \varepsilon,$$

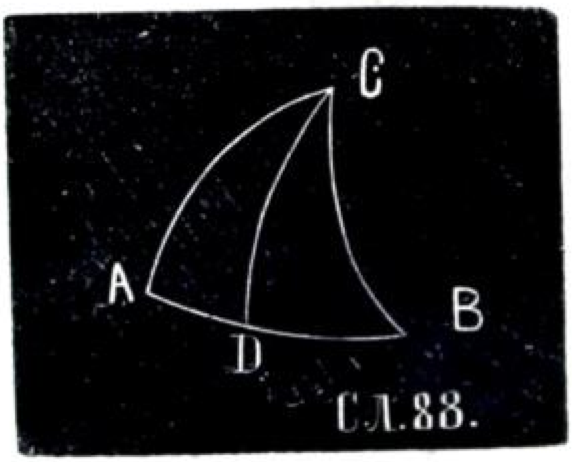
који се из образаца 3) и 4) у № 177 врло лако изводи

Пошто је $\frac{1}{2}\varepsilon < 180^\circ$, то је $\sin (C - \frac{1}{2}\varepsilon)$ положан и дакле угао $C - \frac{1}{2}\varepsilon$ положан и мањи од 180°. Али $C - \frac{1}{2}\varepsilon$ има две вредности, које се до 180° допуњавају; услед тога наћиће се и за C две вредности, које ће обе само тако задатку одговарати, ако су мање од 180°. Пошто је C израчунато, онда се задатак даље ради по обрасцима № 192 или 193 или 194.

Неколико примена сферне тригонометрије.

222. *Да се дати троугао ABC преполови једним великим луком повученим кроз теме C.*

Нека је (сл. 88) D тачка, где половећи лук CD страну AB пресеца; у троуглу ACD позната је страна $AC=b$, угао A и површина p. Ако је ε сферни сувишак троугла ACD, то ће се ε у секундама израчунати помоћу обрасца



Сл. 88.

$$\varepsilon = \frac{p}{r^2 \sin 1''}$$

а затим ће се AD лако израчунати, ако први образац под 7) у № 177 применимо на троугао ACD. На тај начин добијамо

$$tg\frac{1}{2}\varepsilon = \frac{tg\frac{1}{2}b\; tg\frac{1}{2}AD \sin A}{1 + tg\frac{1}{2}b\; tg\frac{1}{2}AD \cos A}$$

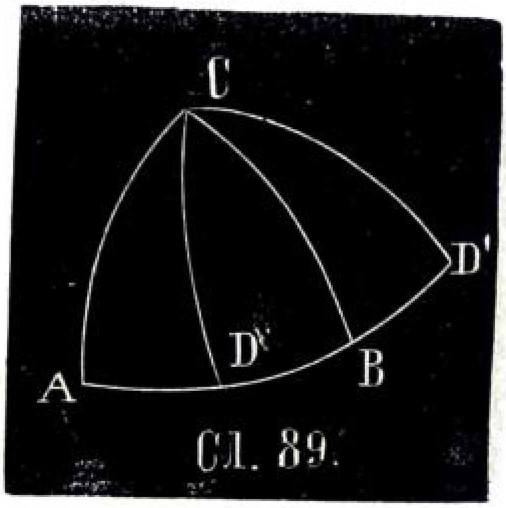
а одавде

$$tg\frac{1}{2}AD = \frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon}{tg\frac{1}{2}b \sin\left(A - \frac{1}{2}\varepsilon\right)}$$

Овај образац даје $\frac{1}{2} AD$ па дакле и AD и тиме се задатак решава.

223. *Да се са темена C сферног троугла ABC повуче један лук управно на страну AB.*

Управна може пасти (сл. 89) у троугао ABC или ван њега; у првом случају угли A и B морају (№ 165) оба бити истог рода са управном CD, јер је CD катета у правоуглим троуглима ACD, BCD а угли A, B супротни јој угли; у другом случају само један од углова A, B и то онај даљи од управне CD' биће с њоме истог рода, а што се тиче другог управној CD' ближег угла, његов суплеменат биће са CD' истог рода.



Сл. 89.

Кад управна пада у троугао ABC, онда су положај тачке D и управна CD дати обрасцима (№ 164)

$$tg\, AD = tg\, AC \cos A, \quad tg\, DB = tg\, BC \cos B,$$

$$\sin CD = \sin AC \sin A.$$

Последњи образац даје за CD две и то суплементне вредности. Она, која је мања од 90°, вреди кад су угли A, B оба мањи, а друга кад су они оба већи од 90°.

Ако ли управна пада ван троугла, онда су тачка D' и управна CD' дати обрасцима

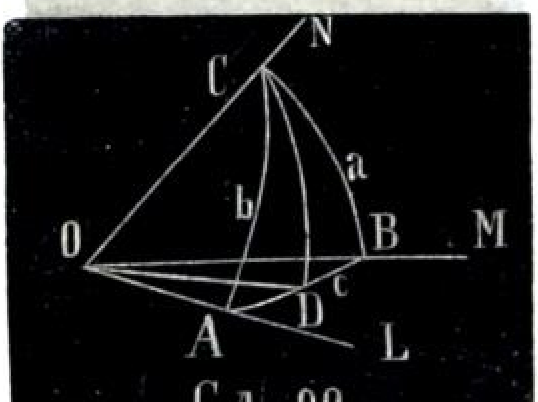
$$tg\, AD' = tg\, AC \cos A, \quad tg\, BD' = -\, tg\, BC \cos B,$$

$$\sin CD' = \sin AC \sin A.$$

Последњи образац даје опет за CD' две вредности, које се до 180° допуњавају. Она која је $< 90^\circ$, узеће се за CD', кад је $B > 90^\circ$, а друга кад је $B < 90^\circ$.

224. *Познати су оштрични угли једног тространог рогља; да се нађе нагиб сваке оштрице према равни осталих двеју.*

Нека су (сл. 90) OL, OM, ON три оштрице даног рогља, а A, B, C тачке, где те оштрице продиру кроз лопту, која је са полупречником 1 из O као средишта описана. Оштрични угли MON, LON, LOM једнаки су странама a, b, c сферног троугла ABC, који постаје из пресецања поменуте лопте са равнима данога рогља; телесни угли рогља једнаки су углима A, B, C троугла.



Сл. 90.

Угао, који оштрица OC прави са равни OAB осталих двеју оштрица, једнак је великом луку CD, који је кроз C управно на страну AB повучен, и за који је у № 223 нађен образац

$$\sin CD = \sin AC \sin A,$$

или кад се стави

$$CD = c' \text{ и } AC = b,$$

$$\sin c' = \sin b \sin A;$$

но како је (№ 168)

$$\sin A = \frac{2}{\sin b \sin c} \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}$$

то је најзад

$$1)\quad \sin c' = \frac{2}{\sin c}\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}$$

Ако се угли, под којима су оштрице OA, OB нагнуте према супротним равнима OBC, OAC означе са a', b', добиће се на исти начин

$$2)\quad \sin a' = \frac{2}{\sin a}\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}$$

$$3)\quad \sin b' = \frac{2}{\sin b}\sqrt{\sin s \sin(s-a) \sin(s-b) \sin(s-c)}$$

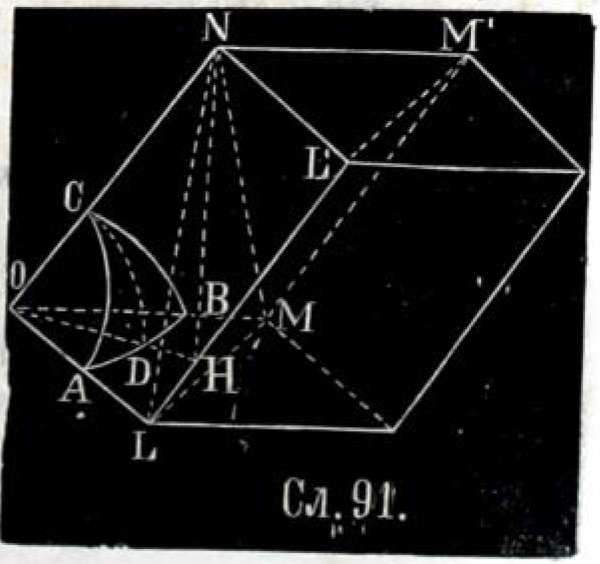
Из образаца 1), 2) и 3) сљедује

$$\sin a \sin a' = \sin b \sin b' = \sin c \sin c',$$

што ће рећи, *да су производи, који постају, кад се свака страна сферног троугла помножи са синусом одговарајуће јој висине, једнаки.*

225. *Да се нађе запремина косог паралелопипеда, кад су познате дужине његових оштрица и оштрични угли.*

Нека су (сл. 91) $OL = \alpha$, $OM = \beta$, $ON = \gamma$ три оштрице, које се у ћошку O паралелопипеда стичу. Из темена O као средишта и са полупречником 1 опишимо једну лопту. Из пресецања описане лопте са равнима тространог рогља $OLMN$ постаје сферни троугао ABC; стране a, b, c тога троугла једнаке су ош-



Сл. 91.

тричним углима MON, LON, LOM, а угли истога троугла једнаки су телесним углима рогља,

Површина паралелопипедове основе, која је паралелограм са странама $OL = \alpha$, $OM = \beta$ дата је обрасцем

$$p = \alpha\, \beta\, \sin AOB = \alpha\, \beta\, \sin c.$$

Ако се са темена N спусти управна NH на паралелопипедову основу, постаће правоугли троугао NOH из којег сљедује

$$NH = \gamma \sin NOH,$$

и потоме је запремина паралелопипеда

$$V = \alpha\beta\gamma \sin c \sin NOH;$$

али из правоуглог сферног троугла BCD, којег је катета CD једнака углу NOH, сљедује (№ 164)

$$\sin CD = \sin NOH = \sin a \sin B,$$

и почем је (№ 168)

$$\sin B = \frac{2}{\sin a \sin c} \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}$$

то је

$$V = 2\, \alpha\, \beta\, \gamma \sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}$$

Дијагонална раван $LML'M'$ дели паралелопипед на две једнаке тростране призме; trострана пирамида $OLMN$, која са призмом $OMLNML'$ има исту основу OLM и исту висину NH једнака је трећини те призме, дакле шестини паралелопипеда и потоме је запремина њена

$$v = \frac{1}{3}\,\alpha\,\beta\,\gamma\,\sqrt{\sin s\,\sin\,(s-a)\,\sin\,(s-b)\,\sin\,(s-c)}.$$

226. *Да се нађе запремина косог паралелопипеда, кад су познате три у истом темену стичуће се оштрице* α, β, γ, *и телесни угли, које равни тих оштрица између себе праве.*

Из № 225 сљедује, да је запремина косог паралелопипеда (сл. 91)

$$V = \alpha\beta\gamma\,\sin a\,\sin c\,\sin B.$$

Пошто је (№ 158)

$$\sin a = \frac{\sin A\,\sin b}{\sin B},\quad \sin c = \frac{\sin C\,\sin b}{\sin B},$$

то је даље

$$V = \alpha\beta\gamma\,\frac{\sin A\,\sin C}{\sin B}\,\sin^2 b,$$

или

$$V = 4\,\alpha\beta\gamma\,\frac{\sin A\,\sin C}{\sin B}\,\sin^2\frac{1}{2}b\,\cos^2\frac{1}{2}b,$$

или пошто $\sin\frac{1}{2}b$ и $\cos\frac{1}{2}b$ заменимо њиховим вредностима из № 168

$$V = 4\,\alpha\beta\gamma\,\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\,\sin\,(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\sin\,(B-\frac{1}{2}\varepsilon)\,\sin\,(C-\frac{1}{2}\,\varepsilon)}{\sin A\,\sin B\,\sin C}.$$

По овоме је запремина тростране пирамиде *OLMN* (слика 90)

$$V = \frac{2}{3}\alpha\beta\gamma\frac{\sin\frac{1}{2}\varepsilon\sin(A-\frac{1}{2}\varepsilon)\sin(B-\frac{1}{2}\varepsilon)\sin(C-\frac{1}{2}\varepsilon)}{\sin A\ \sin B\ \sin C}.$$

227. *Да се нађе средиште и полупречник кругу уписаном у сферни троугао ABC.*

Нека је O средиште а r' полупречник лопте, O' пол уписаног круга, D, E, F тачке додиравања уписаног круга са странама сферног троугла, и $r = O'D = O'E = O'F$ сферни полупречник уписаног круга. Права $O'O$ стоји управно (№ 145) на равни уписаног круга и продире кроз њу у тачки O'', која је тражено средиште уписаног круга; $O''D = O''E = O''F$ јесте дакле полупречник уписаног круга.

Из равног правоуглог троугла $OO''D$ налазимо, да је полупречник уписаног круга

$$O''D = r' \sin O''OD,$$

а отстојање његовог средишта од средишта лопте

$$OO'' = r' \cos O''OD.$$

Угао $O''OD$ једнак је сферном полупречнику $O'D = r$ уписаног круга, и потоме се добија помоћу обрасца (№ 179)

$$tg\, O''OD = tg\, r = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}.$$

228. *Да се нађе средиште и полупречник кругу, који је око сферног троугла ABC описан.*

Нека је O средиште а r' полупречник лопте, O' пол, дакле $O'A = O'B = O'C = R$ сферни полупречник описаног круга. Права OO' стоји управно на равни описаног круга и продире кроз њу у тачки O'', које је тражено средиште описаног круга; $O''A = O''B = O''C$ јесте дакле полупречник истог круга.

Из равног правоуглог троугла $OO''A$ налазимо, да је полупречник описаног круга

$$O''A = r' \sin O''OA,$$

а отстојање његовог средишта од средишта лопте

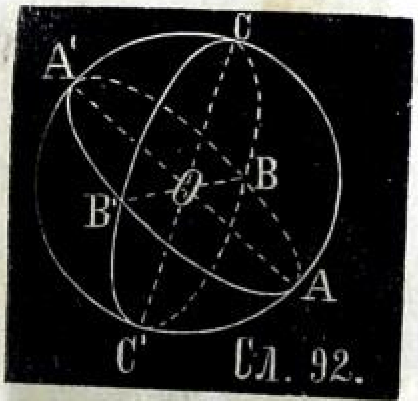
$$O''O = r' \cos O''OA.$$

Угао $O''OA$ једнак је сферном полупречнику R описаног круга и потоме је (№ 178, 2))

$$tg\, O''OA = tg\, R = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \ \sin \frac{1}{2} b \ \sin \frac{1}{2} c}{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}$$

229. *Да се на површју лопте нађе линија, у којој се морају налазити врхови свију оних сферних троуглова, који су на истој половини лопте и имају заједничку основицу и једнаке површине.*

Нека је (сл. 92) $A'B'$ дата основица, $A'B'C$ један од троуглова, који леже на тој основици, и код којих сферни сувишак има сталну вредност ε'. Нека су A, B тачке, које су тачкама A', B' дијаметрално противположене и ε сферни сувишак троугла ABC. На основу геометрије збир површина троуглова ABC, $A'B'C$ једнак је површини лоптине кришке, којој угао C одговара, и потоме је



Сл. 92.

$$\varepsilon + \varepsilon' = 2\,C, \text{ одакле } \frac{1}{2}\,\varepsilon' = C - \frac{1}{2}\,\varepsilon,$$

ако је сад R сферни полупречник круга, који је описан око троугла ABC, биће на основу образаца 1) у № 178

$$tg\ R = \frac{tg\ \frac{1}{2}\ c}{sin\ \frac{1}{2}\ \varepsilon'};$$

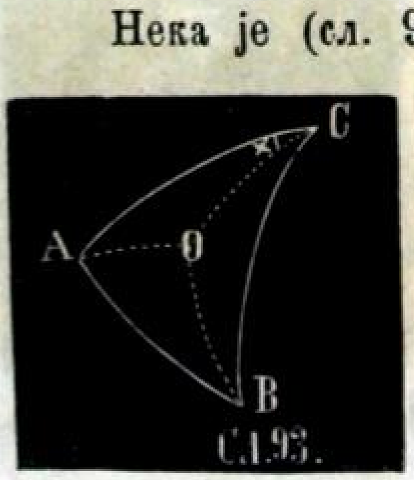
пошто су c и ε' сталне количине то јест имају једну и исту вредност за све троугле једнаке површине и подигнуте над основицом $A'B'$ у половини лопте $CA'B'AB$, то је и R стално; дакле

геометријско место врховима свију сферних троуглова, који су на истој половини лопте и имају заједничку основицу и једнаке површине, јесте једна кружна линија, која пролази кроз две тачке дијаметрално противположене крајевима A', B' основице.

Ова је теорема од Lexell-а.

230. *Дате су стране a, b, c сферног троугла ABC; да се одреди положај пóлу круга, који је око троугла описан.*

Нека је (сл. 93) ABC дани троугао, O' тражени пол и $O'A = O'B = O'C$ сферни полупречник описаног круга. Положај пôла O' савршено је одређен углом $ACO' = x$ и сферним полупречником $R = AO'$ описаног круга. За сферни полупречник имамо (№ 178)



Сл. 93.

$$tg\ R = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \ \sin \frac{1}{2} b \ \sin \frac{1}{2} c}{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}.$$

Из троугла AOC добијамо (№ 156, 1))

$$\cos AO' = \cos AC \cos O'C + \sin AC \sin O'C \cos x,$$

одакле

$$\cos x = \frac{\cos AO' \ (1 - \cos AC)}{\sin AO' \sin AC}$$

или

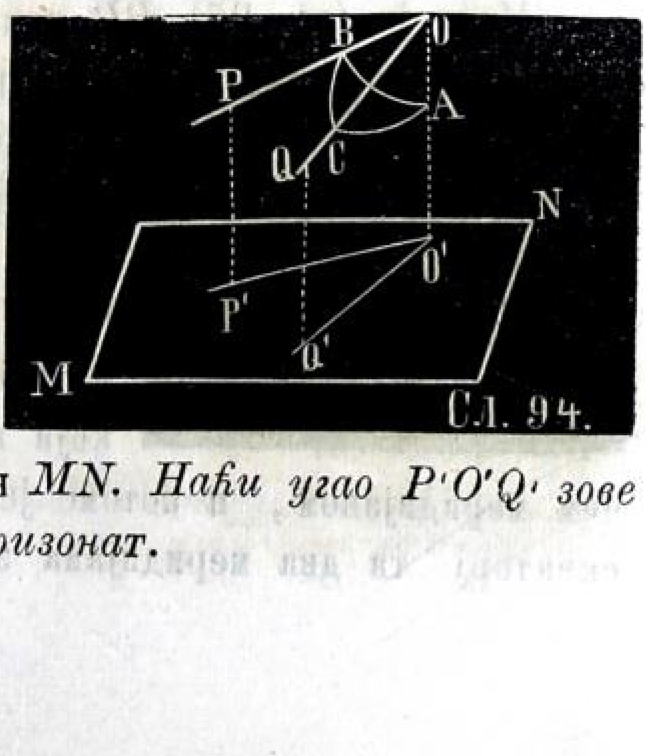
$$\cos x = \operatorname{cotg} R \,.\, \frac{1 - \cos b}{\sin b} = \operatorname{cotg} R \ tg \frac{1}{2} b,$$

или кад $\operatorname{cotg} R$ заменимо њеном вредношћу из прве једначине

$$\cos x = \frac{\sqrt{\sin s \sin (s-a) \sin (s-b) \sin (s-c)}}{2 \sin \frac{1}{2} a \ \cos \frac{1}{2} b \ \sin \frac{1}{2} c}.$$

231. *Свођење угла на хоризонат.*

Нека су (сл. 94) OP, OQ краци угла POQ, којег је раван према хоризонту нагнута; са тачака P, Q, које су на крацима угла POQ произвољно узете, спустимо на хоризонталну раван MN управне PP', QQ' и вежимо тачке P', Q' са подножјем O' управне OO' спуштене са угловог темена O на раван MN. *Наћи угао $P'O'Q'$ зове се свести угао POQ на хоризонат.*



Сл. 94.

Да би сад угао POQ могли на хоризонат свести, треба осим њега знати још и угле POO', QOO' његових кракова са управном OO'. Претпостављајући да су ти угли познати опишимо из O као средишта и са полупречником 1 једну лопту; из пресецања описане лопте са равнима тространог рогља $OPQO'$ постаје сферни троугао ABC, којег су стране једнаке оштричним а угли једнаки телесним углима рогља. Пошто OO' стоји управно на равни MN, то праве $P'O'$, $Q'O'$ стоје управно на OO', дакле је угао $P O'Q'$ једнак телесном углу рогља код оштрице OO', дакле једнак и углу A сферног троугла ABC. А угао A наћиће се помоћу познатог обрасца

$$tg\,\frac{1}{2}\,A = \sqrt{\frac{sin\,(s-b)\;sin\,(s-c)}{sin\;s\;sin\,(s-a)}}\,.$$

Ако се стране b, c, које су једнаке углима QOO', POO', од 90^0 врло мало разликују, то ће се и угао A од стране a врло мало разликовати и потоме биће боље тражити га тада по методи № 214.

232. *Наћи растојање двеју тачака на земљи, кад су им познате географска ширина и дужина.*

Нека је (сл. 95) PP' земљина оса, P северни, P' јужни пол и $E'E$ екватор (полутар); нека су A, B две тачке на земљи, којима се тражи растојање. Узмимо да је PGP' главни меридијан, од којег се почињући броје географске дужине. Дужина тачке A јесте угао, који њен меридијан прави са главним меридијаном, и потоме је једнака луку GC, кога на екватору та два меридијана захватају. Исто је тако гео-

Сл. 95.

графска дужина места *B* једнака луку *GD*. Дужина је источна или западна, како је кад сматрана тачка источно или западно од главног меридијана.

Географска ширина тачке *A* јесте угао *AOC*, под којим је полупречник *OA*, то јест одвесна тачке *A*, нагнута према екваторовој равни; тај је угао једнак луку *AC*, дакле оном делу кроз *A* повученог меридијана, који се налази између тачке *A* и екватора. На исти начин географска ширина тачке *B* једнака је луку *BD*. Ширина је северна или јужна, како је кад сматрана тачка северно или јужно од екватора.

У троуглу *PAB* познат је угао *P* и две стране, које га захватају. И доиста угао *P* једнак је разлики даних географских дужина, кад су ове обе источне или обе западне; на против угао је *P* једнак збиру географских дужина или њиној допуни до 360°, кад је једна географска дужина источна а друга западна. Уосталом страна *PA* једнака је 90° — или + географска ширина тачке *A*, како је кад ова последња северно или јужно од екватора; на исти начин страна *PB* једнака је 90° — или + географска ширина тачке *B*, како је кад ова северно или јужно од екватора.

Ми ћемо географске дужине сматрати као положне или одречне количине, како су кад оне источне или западне, а тако исто сматраћемо и географске ширине као положне или одречне, како су кад оне северне или јужне. Означивши са L и L' географске дужине тачака A и B, са l и l' њине географске ширине добићемо страну $x = AB$ помоћу једног од сљедећих образаца

$$\cos x = \frac{\sin l \, \sin(l' + \varphi)}{\cos \varphi}, \quad \sin \frac{1}{2} x = \pm \frac{\sin \frac{1}{2}(l - l')}{\cos \theta}$$

При употреби првог од ова два обрасца треба најпре угао φ израчунати помоћу обрасца

$$tg\,\varphi = cotg\,l\,cos\,(L' - L);$$

при употреби другог обрасца израчунаће се θ помоћу обрасца

$$tg\,\theta = \pm \frac{sin\,\frac{1}{2}\,(L - L')}{sin\,\frac{1}{2}\,(l\; - l')}\;\sqrt{cos\,l\,cos\,l'}.$$

Ова четири обрасца изводе се сасвим просто из образаца 2) и 4) у № 193 и образаца 2) и 3) у № 194.

Ако се растојање AB жели имати у метрима узећемо (№ 208) образац

$$AB = x\,.\,\frac{10000}{324},$$

а ако се AB жели имати у километрама, послужићемо се обрасцем

$$AB = x\,.\,\frac{10}{324}.$$

223. Пример. Тражи се растојање двају места на земљи, кад је за прво место

сев. ширина $= l = 50°$, источ. дужина $= L = 160°$,

а за друго

јуж. ширина $= l' = -60°20'$, источ. дуж. $= L' = 36°19'37''$.

Први начин.

Рачунање угла φ.

$$tg\,\varphi = cotg\,l\,cos\,(L' - L).$$

$lg\,cotg\,l$	9·9238135-10
lg-$cos\,(L'-L)$	9·7438649-10
Збир.	19·6676784-20
$lg - tg\,\varphi$ ...	9·6676784-10
$180^\circ - \varphi$ ...	24°56′59·29″
φ	155° 3′ 0·71″
$l' + \varphi$	94°43′ 0·71″

Рачунање растојања x.

$$cos\,x = \frac{sin\,l\,\,sin\,(l' + \varphi)}{cos\,\varphi}$$

$lg\,sin\,l$	9·8842540-10
$lg\,sin\,(l'+\varphi)$.	9·9985267-10
$-lg - cos\,\varphi$ ..	0·0425471
$lg - cos\,x$ ..	9·9253278-10
$180^\circ - x$	32°38′41·48″
x	147° 21′ 18·52″ 16372·793 килом.

Други начин.

Рачунање угла θ

$$tg\,\theta = \pm\frac{sin\,\frac{1}{2}\,(L - L')}{sin\,\frac{1}{2}\,(l - l')}\sqrt{cos\,l\,cos\,l'}$$

$lg\,sin\,\frac{1}{2}(L-L')$	9·9452738-10
$\frac{1}{2}\,lg\,cos\,l$	9·9040338-10
$\frac{1}{2}\,lg\,cos\,l'$	9·8472821-10
$-lg\,sin\,\frac{1}{2}(l-l')$	0·0857536
Збир.	29·7823433-30
$lg\,tg\,\theta$	9·7823433-10
θ	31° 12′ 29·89″

Рачунање растојања x.

$$sin\,\frac{1}{2}\,x = \frac{\pm\,sin\,\frac{1}{2}\,(l - l')}{cos\,\theta}$$

$lg\,sin\frac{1}{2}\,(l - l')$.	9·9142464-10
$-lg\,cos\,\theta$	0·0678870
Збир.	9·9821334-10
$log\,\,sin\frac{1}{2}\,x$...	9·9821334-10
$\frac{1}{2}\,x$......	73° 40′39·34″
x.......	147° 21′18·68″.

О утицају погрешних података на количине, које су из њих рачуном нађене.

234. У № 132 и сљедећим равне тригонометрије посматран је утицај погрешно измерених података на количине које су из њих рачуном изведене; то ћемо исто да учинимо сада и код сферних троуглова. Овај овде као и онај у поменутим №^{ма} равне тригонометрије разрешени задатак у ствари је истоветан са задатком, где се из малих промена познатих траже одговарајуће промене рачуном нађених комада, и потоме овде изведени обрасци могу послужити и при свима задатцима тога рода.

Овде ће се исто као и у равној тригонометрији погрешке — промене — троуглових комада означавати са δa, δb, δc, δA, δB, δC.

Из обрасца

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

кад с њим поступимо онако, као што смо у № 132 поступили са основним обрасцима равне тригонометрије, добијамо

$$\begin{aligned} \sin a \, \delta a = & (\cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A) \, \delta b \\ & + (\cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A) \, \delta c \\ & + \sin b \sin c \sin A \, \delta a, \end{aligned}$$

или с обзиром на обрасце 2) у № 158 и 3) у № 159,

$$1) \qquad \delta a = \cos C \, \delta b + \cos B \, \delta c + \sin c \sin B \, \delta A.$$

Примењујући овај образац на суплементни — полни — троугао добијамо

2) $\delta A = - \cos c \; \delta B - \cos b \; \delta C + \sin c \sin B \; \delta a.$

Из обрасца

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} \quad \text{или} \quad \sin A \; \sin b = \sin B \; \sin a$$

добијамо истим путем као у № 132

$$\sin b \; \cos A \; \delta A + \sin A \cos b \; \delta b = \sin B \; \cos a \; \delta a + \\ + \sin a \; \cos B \; \delta B,$$

или по деоби са $\sin b \; \sin A$

$$\operatorname{cotg} A \; \delta A + \operatorname{cotg} b \; \delta b = \frac{\sin B \; \cos a}{\sin b \; \sin A} \; \delta a \\ + \frac{\sin a \; \cos B}{\sin A \; \sin b} \; \delta B;$$

одавде с обзиром на образац 2) у № 158 добијамо даље

$$\operatorname{cotg} A \; \delta A + \operatorname{cotg} b \; \delta b = \operatorname{cotg} a \; \delta a + \operatorname{cotg} B \; \delta B,$$

или

3) $\operatorname{cotg} A \; \delta A - \operatorname{cotg} a \; \delta a = \operatorname{cotg} B \; \delta B - \operatorname{cotg} b \; \delta b.$

Из обрасца (№ 160, 5))

$$\operatorname{cotg} a \; \sin b - \operatorname{cotg} A \; \sin C = \cos b \; \cos C$$

добијамо по начину № 132 редом

$$\operatorname{cotg} (a + \delta a) \sin (b + \delta b) - \operatorname{cotg} (A + \delta A) \sin (C + \delta C) = \\ = \cos (b + \delta b) \; \cos \; (C + \delta C),$$

$$\frac{\mathrm{cotg}\, a - \delta a}{1 + \mathrm{cotg}\, a\, \delta a}(\sin b + \cos b\, \delta b) - \frac{\mathrm{cotg}\, A - \delta A}{1 + \mathrm{cotg}\, A\, \delta A}\times$$

$$(\sin C + \cos C\, \delta C) = (\cos b - \sin b\, \delta b)\,(\cos C - \sin C\, \delta C),$$

$$\left\{\mathrm{cotg}\, a - \frac{1 + \mathrm{cotg}^2 a}{1 + \mathrm{cotg}\, a\, \delta a}\,\delta a\right\}(\sin b + \cos b\, \delta b)$$

$$-\left\{\mathrm{cotg}\, A - \frac{1 + \mathrm{cotg}^2 A}{1 + \mathrm{cotg}\, A\, \delta A}\,\delta A\right\}(\sin C + \cos C\, \delta C)$$

$$= \cos C \cos b - \cos b \sin C\, \delta C - \sin b \cos C\, \delta b,$$

$$\left(\mathrm{cotg}\, a - \frac{\delta a}{\sin^2 a}\right)(\sin b + \cos b\, \delta b) -$$

$$-\left(\mathrm{cotg}\, A - \frac{\delta A}{\sin^2 A}\right)(\sin C + \cos C\, \delta C) =$$

$$= \cos C \cos b - \cos b \sin C\, \delta C - \sin b \cos C\, \delta b,$$

$$\frac{\sin C}{\sin^2 A}\,\delta A - (\mathrm{cotg}\, A \cos C - \cos b \sin C)\,\delta C - \frac{\sin b}{\sin^2 a}\,\delta a$$

$$+ (\mathrm{cotg}\, a \cos b + \sin b \cos C)\,\delta b = 0$$

и најзад одавде множећи са *sin A* и узимајући на ум обрасце 1) у № 156, 2) у № 158 и 6) у № 161

$$4) \qquad \frac{\sin C}{\sin A}\,\delta A + \cos B\, \delta C - \frac{\sin B}{\sin a}\,\delta a$$

$$+ \mathrm{cotg}\, c \sin C\, \delta b = 0.$$

Помоћу образаца под 1, 2, 3, 4, и оних, који се из њих простом изменом слова добијају, може се погрешка — промена — ма којег од шест комада сфернога троугла израчунати, кад су познате или дате погрешке — промене — ма којих трију од осталих пет троуглових комада. Свега различитих задатака може бити шест, и ми ћемо их у сљедећој № редом прећи.

235. — *Задатак I.* Из погрешака датих комада *a*, *b*, *c* траже се погрешке комада *A*, *B*, *C*, који су из првих рачуном нађени.

Образац под 1) у № 234 и они, који се из њега изменом слова добијају, дају

$$\delta A = \frac{\delta a - \cos C\ \delta b - \cos B\ \delta c}{\sin c\ \sin B}.$$

$$\delta B = \frac{\delta b - \cos C\ \delta a - \cos A\ \delta c}{\sin a\ \sin C},$$

$$\delta C = \frac{\delta c - \cos B\ \delta a - \cos A\ \delta b}{\sin b\ \sin A}.$$

Задатак II. Из погрешака датих комада *A*, *B*, *C* траже се погрешке комада *a*, *b*, *c*, који су из првих рачуном добивени.

Образац под 2) у № 234 и они, који се из њега изменом слова добијају, дају

$$\delta a = \frac{\delta A + \cos c\ \delta B + \cos b\ \delta C}{\sin c\ \sin B},$$

$$\delta b = \frac{\delta B + \cos a\ \delta C + \cos c\ \delta A}{\sin a\ \sin C},$$

$$\delta c = \frac{\delta C + \cos a \ \delta B + \cos b \ \delta A}{\sin b \ \sin A}.$$

Задатак III. Из погрешака датих комада a, b, C траже се погрешке комада A, B, c, који су из првих рачуном нађени.

Обрасци под 1) и 4) у № 234 дају

$$\delta c = \cos B \ \delta a + \cos A \ \delta b + \sin b \ \sin A \ \delta C,$$

$$\delta A = \frac{\sin B}{\sin c} \delta a - \operatorname{cotg} c \ \sin A \ \delta b - \frac{\cos B \ \sin A}{\sin C} \delta C,$$

$$\delta B = \frac{\sin A}{\sin c} \delta a - \operatorname{cotg} c \ \sin B \ \delta a - \frac{\cos A \ \sin B}{\sin C} \delta C.$$

У овом случају, који је у применама понајчешћи, нужно је врло често изразити погрешке δc, δA комадима b, c, A, при чему се $\sin a$ може оставити као чинилац у сачиниоцима од δa; обрасци зато добијају се из прва два од ових последњих образаца, кад се још узму у помоћ обрасци под 2) у № 158 и под 3) у № 159; ево тих образаца

$$\delta c = \frac{1}{\sin a} (\cos b \ \sin c - \sin b \ \cos c \ \cos A) \ \delta a +$$

$$+ \cos A \ \delta b + \sin b \ \sin A \ \delta C,$$

$$\delta A = \frac{1}{\sin a} \cdot \frac{\sin b \ \sin A}{\sin c} \delta a - \sin A \ \operatorname{cotg} c \ \delta b -$$

$$- (\cos b - \sin b \ \operatorname{cotg} c \ \cos A) \ \delta C.$$

Задатак IV. Из погрешака датих комада a, B, C траже се погрешке комада A, b, c, који су из првих рачуном изведени.

Помоћу образаца 2) и 4) у № 234 добијамо

$$\delta b = \frac{\sin B \cos c\ \delta a + \sin c\ \delta B + \sin b \cos A\ \delta C}{\sin A},$$

$$\delta c = \frac{\sin C \cos b\ \delta a + \sin b\ \delta C + \sin c \cos A\ \delta B}{\sin A},$$

$$\delta A = -\cos c\ \delta B - \cos b\ \delta C + \sin c \sin B\ \delta a.$$

Задатак V. Из погрешака даних комада a, b, A траже се погрешке комада c, B, C, који су из првих рачуном изведени.

Помоћу образаца под 1) и 3) у № 234 добијамо

$$\delta c = \frac{\delta a - \cos C\ \delta b - \sin c \sin B\ \delta A}{\cos B},$$

$$\delta B = \frac{\operatorname{cotg} b\ \delta b - \operatorname{cotg} a\ \delta a + \operatorname{cotg} A\ \delta A}{\operatorname{cotg} B},$$

$$\delta C = \frac{\sin B\ \delta a - \sin A \cos c\ \delta b - \sin c\ \delta A}{\sin a \cos B}.$$

Задатак VI. Из погрешака датих комада a, A, B траже се погрешке комада b, c, C, који су из првих рачуном нађени.

Помоћу образаца под 2), 3), 4) у № 324 добијамо

$$\delta b = \frac{\operatorname{cotg} a\ \delta a - \operatorname{cotg} A\ \delta A + \operatorname{cotg} B\ \delta B}{\operatorname{cotg} b},$$

$$\delta c = \frac{\sin C\ \delta a - \sin b\ \delta A - \sin a\ \cos C\ \delta B}{\sin A\ \cos b},$$

$$\delta C = \frac{\sin c\ \sin B\ \delta a - \delta A - \cos c\ \delta B}{\cos b}.$$

Примедба. Ако би се неки од познатих комада могли узети као безпогрешни, онда би у горњим обрасцима требало ставити одговарајуће погрешке $= 0$.

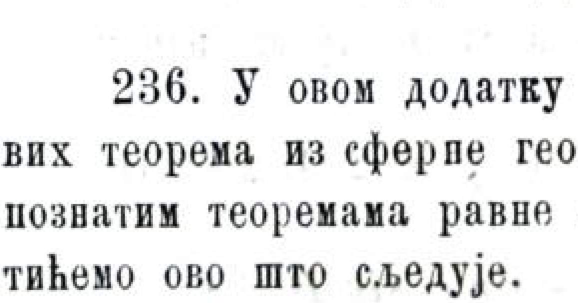
ДОДАТАК I.

236. У овом додатку прећићемо још неколико занимљивих теорема из сферне геометрије, од којих неке одговарају познатим теоремама равне геометрије. Но пре свега приметићемо ово што сљедује.

1°. Ако кроз две тачке A, B лоптиног површја, које се неналазе на крајевима истог пречника, опишемо један велики круг, он ће бити раздељен тачкама A, B на два комада; мањи од та два комада јесте онај, који ћемо имати на уму, кад будемо спомињали *велики лук AB*.

2°. Кад за једну тачку C (сл. 96) налазећу се у продужењу лука AB будемо рекли, да она дели лук AB у правцу од A према B (то ће рећи у правцу, кад се лук AmB од A почињући прелази), или у правцу од B према A (то ће рећи у правцу, кад се лук AmB почињући од B прелази) на два *суптрактивна* комада, онда ће то значити, да су та два

Сл. 96.



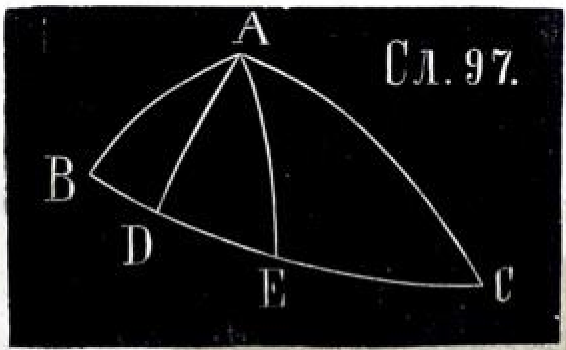
комада у првом случају луци $AmBnC$, BnC, а у другом луци $Am'C$, $BmAm'C$. Ако се тачка C налази на луку AB, онда ћемо рећи, да га она дели на два *адитивна* комада.

3°. Узмимо нека су K, K' два велика круга на истој лопти, P, P' две тачке, у којима се они секу, и A, B друге две тачке, које се налазе на првом кругу, али нису на крајевима једног његовог пречника.

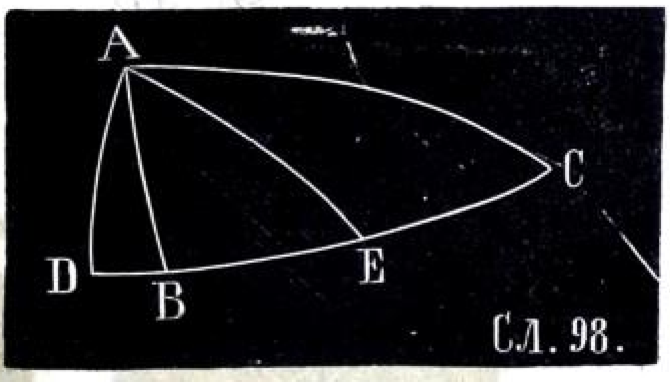
Кад је једна од двеју тачака P, P' на великом луку AB, онда друга неможе бити на њему, и неможе га делити ни у правцу од A према B, ни у правцу од B према A на два суптрактивна комада оба мања од 180°.

Ако ли се ниједна од тачака P, P' неналази на великом луку AB, онда једна од њих дели лук AB у правцу од A према B, а друга у правцу од B према A на два суптрактивна комада оба мања од 180°.

237. Ако су темена сферног троугла ABC (сл. 97, 98)



Сл. 97.



Сл. 98.

од средине E стране BC једнако удаљена, и ако са темена A на страну BC управно повучени велики лук исту страну у тачки D дели на два адитивна или два суптрактивна комада (у правцу од C према B), у ком су последњем случају оба комада мања од 180°, онда је

$$tg^2 AD = \frac{\sin BD \sin CD}{\cos^2 \frac{1}{2} a}.$$

Да би ово доказали посматрајмо правоугли троугао ADE; из њега добијамо

$$cos^2 AD = \frac{cos^2 AE}{cos^2 DE} = \frac{cos^2 \frac{1}{2} a}{cos^2 DE},$$

одакле

$$sin^2 AD = \frac{cos^2 DE - cos^2 \frac{1}{2} a}{cos^2 DE};$$

одавде на основу образаца под 10) у № 39 сљедује

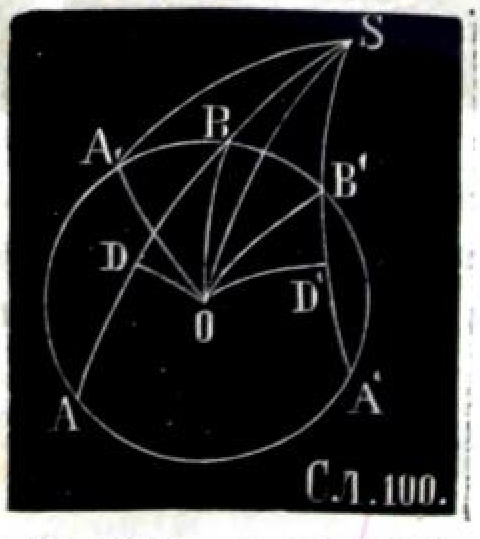
$$sin^2 AD = \frac{sin\ BD\ sin\ CD}{cos^2 DE};$$

дакле је

$$tg^2 AD = \frac{sin^2 AD}{cos^2 AD} = \frac{sin\ BD\ sin\ CD}{cos^2 \frac{1}{2} a}.$$

138. Ако је k један мали круг на лопти (сл. 99, 100)

Сл.99.



Сл.100.

K, K' два велика круга, који га секу, и то први у тачкама A, B, а други у тачкама A', B', и S једна од оних двеју тачака, у којима се велики кругови K, K'пресецају, онда између шест великих лукова SA, SB, AB, SA', SB', $A'B'$ постоје сљедећи односи

$$1) \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}SA\cos\frac{1}{2}SB}{\cos\frac{1}{2}AB} = \frac{\cos\frac{1}{2}SA'\cos\frac{1}{2}SB'}{\cos\frac{1}{2}A'B'}$$

$$2) \qquad tg\frac{1}{2}SA\ tg\frac{1}{2}SB = tg\frac{1}{2}SA'\ tg\frac{1}{2}SB'.$$

Да би ово доказали, означимо са D, D' средине великих лукова AB, $A'B'$, са O пôл круга k, и повуцимо велике луке OS, OB, OB', OD и OD', па ћемо онда имати

$$\cos\frac{1}{2}SA\cos\frac{1}{2}SB = \cos(BD \mp \frac{1}{2}SB)\cos\frac{1}{2}SB$$

$$= \frac{1}{2}(\cos BD + \cos SD),$$

и

$$\cos BD = \frac{\cos OB}{\cos OD}, \ \cos SD = \frac{\cos OS}{\cos OD},$$

одакле

$$\frac{\cos\frac{1}{2}SA\cos\frac{1}{2}SB}{\cos\frac{1}{2}AB} = \frac{1}{2}\frac{\cos OB + \cos OS}{\cos BD\cos OD}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\cos OS}{\cos OB}\right).$$

На исти начин добићемо и

$$\frac{\cos\frac{1}{2}SA'\cos\frac{1}{2}SB'}{\cos\frac{1}{2}A'B'}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\cos OS}{\cos OB'}\right);$$

пошто су велики луци OB, OB' једнаки, то из последњих двеју једначина добија се однос под 1).

Из горе наведених образаца

$$\cos BD=\frac{\cos OB}{\cos OD},\quad \cos SD=\frac{\cos OS}{\cos OD}$$

сљедује

$$\frac{\cos BD}{\cos SD}=\frac{\cos OB}{\cos OS},$$

па како се исто тако лако може наћи и

$$\frac{\cos B'D'}{\cos SD'}=\frac{\cos OB'}{\cos OS}\text{ или }\frac{\cos B'D'}{\cos SD'}=\frac{\cos OB}{\cos OS};$$

то је

$$\frac{\cos BD}{\cos SD}=\frac{\cos B'D'}{\cos SD'},$$

одакле

$$\frac{\cos BD-\cos SD}{\cos BD+\cos SD}=\frac{\cos B'D'-\cos SD'}{\cos B'D'+\cos SD'},$$

или најзад

$$tg\frac{1}{2}SA\,tg\frac{1}{2}SB=tg\frac{1}{2}SA'\,tg\frac{1}{2}SB.$$

Ако круг K дира круг k у тачки A_1, онда је (као што се лако може наћи, кад се велики лук OA_1 повуче, или кад се претпостави, да се тачке A, B у тачки A_1 састају)

$$cos^2\frac{1}{2}SA_1=\frac{cos\frac{1}{2}SA'cos\frac{1}{2}SB'}{cos\frac{1}{2}A'B'},$$

$$tg^2\frac{1}{2}SA_1=tg\frac{1}{2}SA_1 tg\frac{1}{2}SB'.$$

Ако једначину под 2) помножимо једначином

$$\frac{4\,cos\frac{1}{2}SA\,cos\frac{1}{2}SB}{cos\frac{1}{2}SA\,cos\frac{1}{2}SB}=\frac{4\,cos\frac{1}{2}SA'\,cos\frac{1}{2}SB'}{cos\frac{1}{2}SA'\,cos\frac{1}{2}SB'}$$

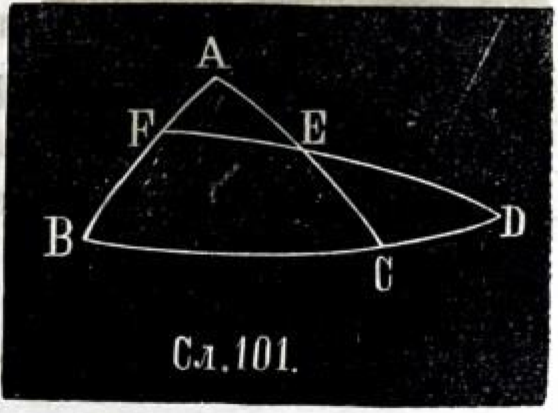
добићемо однос

$$\frac{sin\,SA\;sin\,SB}{cos^2\frac{1}{2}SA\,cos^2\frac{1}{2}SB}=\frac{sin\,SA'\;sin\,SB'}{cos^2\frac{1}{2}SA'cos^2\frac{1}{2}SB'}$$

а из овог и оног под 1)

$$\frac{sin\,SA\;sin\,SB}{cos^2\frac{1}{2}AB}=\frac{sin\,SA'\;sin\,SB'}{cos^2\frac{1}{2}A'B'}.$$

239. Кад три тачке D, E, F једног и истог великог круга (сл. 101) леже односно на трима странама (или њиним продужењма) BC, AC, AB сферног троугла ABC, онда између великих лукова AE, CD, BF, AF, BD, CE постоји однос



Сл. 101.

1) $sin\,AE\;sin\,CD\;sin\,BF$

$= sin\,AF\;sin\,BD\;sin\,CE$

Да би ову теорему доказали, посматрајмо сферне троугле AEF, BDF, CDE; из истих добијамо

$$\frac{\sin AE}{\sin AFE} = \frac{\sin AF}{\sin AEF}, \quad \frac{\sin BF}{\sin BDF} = \frac{\sin BD}{\sin BFD},$$

$$\frac{\sin CD}{\sin CED} = \frac{\sin CE}{\sin CDE}.$$

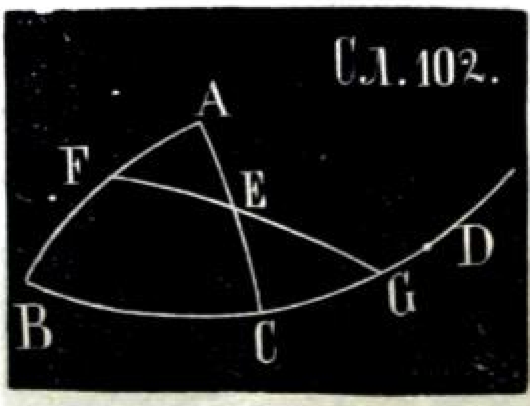
одакле, ако се узме на ум да је

$$\sin AFE = \sin BFD, \quad \sin BDF = \sin CDE,$$

$$\sin CED = \sin AEF$$

сљедује сасвим просто горњи однос под 1)

Примедба. Барем једна од тачака D, E, F мора се налазити у продужењу једне од страна BC, AC, AB и делити исту страну на два суптрактивна комада оба мања од 180°, али никад немогу имати само две од тих тачака то својство.



Сл. 102.

240. Кад су три тачке D, E, F (сл. 102), које леже на странама — или њиним продужењма — BC, AC, AB сферног троугла ABC такве, да се барем једна од њих налази у продужењу које стране и исту дели на два суптрактивна комада оба мања од 180°, или су све три оне такве а не *само две*, и кад између великих лукова AE, CD, BF, AF, BD, CE постоји однос

1) $\sin AE \sin CD \sin BF = \sin AF \sin BD \sin CE$,

онда тачке D, E, F морају се налазити у једном и истом великом кругу.

Узмимо (што је на основу казанога допуштено), да се тачка D налази у продужењу стране BC и да је дели у правцу од B према C на два суптрактивна комада оба мања од 180°, и означимо са K велики круг, који пролази кроз тачке E, F.

Услед претпоставке учињене у теореми и онога што је речено у №-ма 236, 239, круг K мора сећи продужење стране BC у двема тачкама, од којих једна, коју ћемо означити са G, дели исту страну у правцу од B према C на два комада оба мања од 180°.

На основу теореме № 239 сада је

$$\sin AE \sin CG \sin BF = \sin AF \sin BG \sin CE,$$

одавде узимајући у обзир однос под 1) добијамо

$$\frac{\sin CD}{\sin CG} = \frac{\sin BD}{\sin BG}$$

одакле

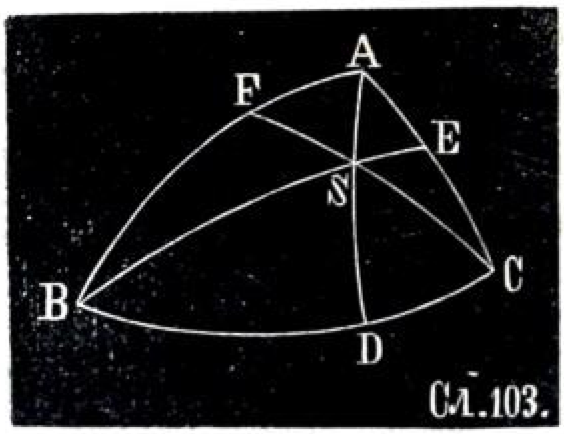
$$\frac{\sin BD + \sin CD}{\sin BD - \sin CD} = \frac{\sin BG + \sin CG}{\sin BG - \sin CG},$$

или

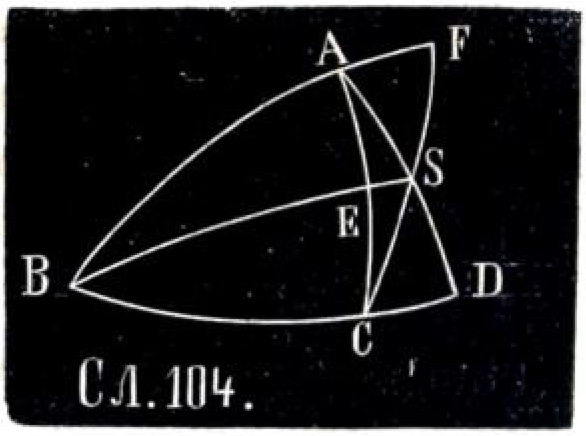
$$tg\left(\frac{1}{2} BC + CD\right) = tg\left(\frac{1}{2} BC + CG\right),$$

Како су велики луци CD, CG оба мањи од 180°, то из последње једначине изводимо, да ти луци морају бити једнаки, и да потоме кроз тачке E, F описани круг K мора пролазити и кроз тачку D.

241. Кад кроз тачку S (сл. 103 и 104) и темена A, B, C сферног троугла ABC опишемо три велика круга K_1, K_2, K_3, који супротне стране (или њина продужења) BC, AC, AB секу у тачкама D, E, F онда између великих лукова AE, CD, BF, AF, BD, CE постоји сљедећи однос



Сл.103.



Сл.104.

$$1)\quad \sin AE \sin CD \sin BF = \sin AF \sin BD \sin CE.$$

Доказ ове теореме врло је лак, јер из сферних троуглова ABD, ACD сљедује (№ 239)

$$\sin AS \sin CD \sin BF = \sin AF \sin BC \sin DS\,,$$

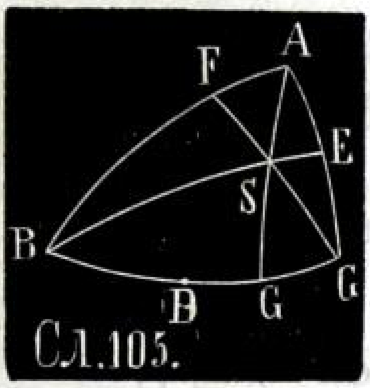
$$\sin AE \sin BC \sin DS = \sin AS \sin BD \sin CE\,,$$

а множењем ових двеју једначина однос под 1).

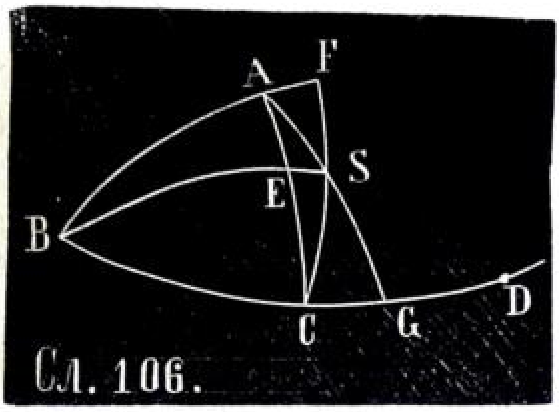
Примедба. Од трију тачака D, E, F или се ниједна неналази у продужењу једне од страна BC, AC, AB тако, да је дели на два суптрактивна комада оба мања од 180°, или су пак две и то само две од њих, које имају то својство.

242. Ако тачке D, E, F леже односно на трима странама (или њиним продужењма) BC, AC, AB сферног тро-

угла *ABC* (сл. 105, 106) и ниједна се од њих неналази у



Сл.105.



Сл. 106.

продужењу једне од тих страна тако, да је дели на два суптрактивна комада оба мања од 180°, или су две и то само две од њих, које имају то својство, и ако између шест великих лукова *AE*, *CD*, *BF*, *AF*, *BD*, *CE* постоји однос

$$1)\quad \sin AE \sin CD \sin BF = \sin AF \sin BD \sin CE,$$

онда три велика круга, који пролазе односно кроз *A* и *D*, *B* и *E*, *C* и *F* морају се сећи у истим тачкама.

Да би теорему доказали, узмимо (што је на основу казанога допуштено), да се тачка *D* налази на страни *BC* или њеном продужењу, но без да је дели на два суптрактивна комада оба мања од 180°, и означимо са *K* велики круг, који пролази кроз теме *A* и кроз једну од оних двеју тачака, у којима се секу велики кругови описани односно кроз тачке *B* и *E*, *C* и *F*.

Услед претпоставке учињене у теореми, и онога што је речено у №-ма 236 и 241, круг *K* мора пролазити кроз једну тачку стране *BC* и још једну тачку, која се налази на њеном продужењу. Нека је *G* прва или друга од тих двеју тачака, како се кад тачка *D* налази на страни *BC* или њеном продужењу.

На основу теореме у № 241 добијамо

$$\sin AE \sin CG \sin BF = \sin AF \sin BG \sin CE,$$

из ове пак једначине и оне под 1) добијамо даље

$$\frac{\sin CD}{\sin CG} = \frac{\sin BD}{\sin BG},$$

одакле изводимо на исти начин као и у № 240

$$tg\left(\frac{1}{2}BC-CD\right)=tg\left(\frac{1}{2}BC-CG\right),$$

или

$$tg\left(\frac{1}{2}BC+CD\right)=tg\left(\frac{1}{2}BC+CG\right),$$

како је кад тачка D на страни BC или њеном продужењу.

Како су сад луци CD, CG оба мањи од 180°, то из сваког од два последња односа закључујемо, да су исти луци једнаки и да потоме круг K мора пролазити и кроз тачку D.

Примедба. Три велика круга, који пролазе кроз темена A, B, C сферног троугла ABC и средине D, E, F супротних страна BC, AC, AB морају се сећи у истим тачкама.

Јер је очевидно

$$\sin AE \sin CD \sin BF = \sin AF \sin BD \sin CE.$$

Исто тако и три велика круга, који полове угле A, B, C сферног троугла ABC, морају се сећи у истим тачкама.

Јер, ако су D, E, F тачке, у којима поменути кругови секу стране BC, AC, AB, то је

$$\frac{\sin AE}{\sin C} = \frac{\sin CE}{\sin A}, \frac{\sin CD}{\sin B} = \frac{\sin BD}{\sin C},$$

$$\frac{\sin BF}{\sin A} = \frac{\sin AF}{\sin B}$$

одакле множењем

$$\sin AE \sin CD \sin BF = \sin AF \sin BD \sin CE.$$

Најзад и три велика круга K_1, K_2, K_3, који су кроз три темена A, B, C сферног троугла ABC управно на супротне стране повучени, морају се сећи у истим тачкама.

Јер понајпре лако је увидити, да или сва три велика круга K_1, K_2, K_3, или барем један од њих на пример први, морају сећи стране, на којима управно стоје, али никад само два; означимо дакле са D тачку, у којој круг K_1 сече страну BC, са E тачку, у којој круг K_2 дели страну AC на два адитивна, или, и то у правцу од A према C, на два суптрактивна комада оба мања од 180°, и са F тачку у којој круг K_3 дели страну AB на два адитивна или, и то у правцу од A према B, на два суптрактивна комада оба мања од 180°, па ћемо имати

$$\sin AE = \frac{tg\, BE}{tg\, A}, \quad \sin AF = \frac{tg\, CF}{tg\, A},$$

$$\sin CD = \frac{tg\, AD}{tg\, C}, \quad \sin BD = \frac{tg\, AD}{tg\, B},$$

и

$$\sin BF = \frac{tg\, CF}{tg\, B}, \quad \sin CE = \frac{tg\, BE}{tg\, C},$$

или

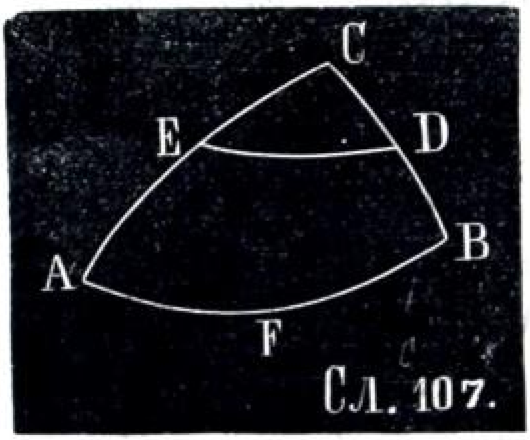
$$\sin BF = -\frac{tg\, CF}{tg\, B}, \quad \sin CE = -\frac{tg\, BE}{tg\, C},$$

како се кад тачке E, F налазе на странама AC, AB, или њиним продужењима. Из ових једначина добијамо множењем

$$\sin AE \sin CD \sin BF = \sin AF \sin BD \sin CE.$$

243. Кад више сферних троуглова находећих се на истој лопти имају једну страну заједничку и једнаке површине, онда велики луци, који вежу средине осталих двеју страна сваког од тих троуглова, јесу између себе једнаки.

Да би ово доказали, узмимо (сл. 107) нека је AB заједничка страна и ABC један ма који од троуглова, који леже на тој страни и имају једнаке површине. Нека су D, E средине страна AC, BC. Из троугла CDE добијамо



Сл. 107.

$$\cos DE = \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b + \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \cos C,$$

одакле на основу обрасца под 5) у № 177

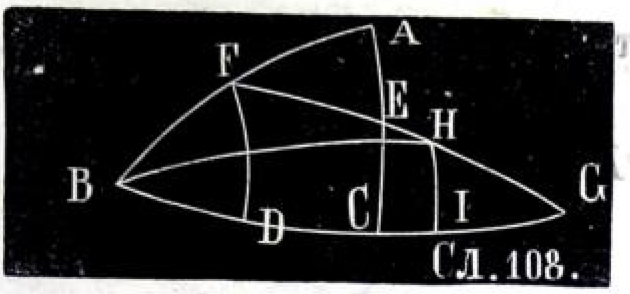
$$\cos DE = \cos \frac{1}{2} \varepsilon \cos \frac{1}{2} c;$$

пошто су ε и c сталне количине, то је и DE стално. Исто тако, ако је F средина стране AB, налази се и

$$\cos DF = \cos \frac{1}{2} \varepsilon \cos \frac{1}{2} b,$$

$$\cos EF = \cos \frac{1}{2} \varepsilon \cos \frac{1}{2} a.$$

244. Ако су (сл. 108) E, F средине страна AB, AC сферног троугла ABC, и G тачка, где велики круг, који кроз



Сл. 108.

те тачке пролази, пресеца продужену страну BC тако, да је дели у правцу од B према C на два суптрактивна комада оба мања од 180°, онда је

$$1)\qquad \cos BGF = tg\,\frac{1}{2}\,a\,cotg\,EF.$$

Јер је на основу № 239

$$\sin AE \sin CG \sin BF = \sin AF \sin BG \sin CE\,;$$

но како је лук AE једнак луку CE и лук BF једнак луку AF, то је

$$\sin CG = \sin BG\,,$$

одакле сљедује, да су луци CG, BG суплементни, дакле

$$BG = 90^\circ + \frac{1}{2}\,a.$$

Из сферних троуглова AEF, BFG добијамо у осталом

$$\frac{\sin EF}{\sin A} = \frac{\sin AE}{\sin AFE}\,,\quad \frac{\sin BG}{\sin BFG} = \frac{\sin BF}{\sin BGF}\,,$$

одакле

$$\sin BGF = \frac{\sin AE \sin BF \sin A}{\sin BG \sin EF}\,,$$

или

$$2)\qquad \sin BGF = \frac{\sin\frac{1}{2}\,b\,\sin\frac{1}{2}\,c\,\sin A}{\cos\frac{1}{2}\,a\,\sin EF}$$

но из троугла BFG добијамо такође (№ 160, 5)

$$\cot g\, BF \sin BG - \cot g\, BGF \sin B = \cos BG \cos B\,,$$

или

$$\cot g\, BGF = \frac{\cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} c + \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} c \cos B}{\sin \frac{1}{2} c \sin B}$$

или, означавајући са D средину стране BC,

$$3) \qquad \cot g\, BGF = \frac{\cos DF}{\sin \frac{1}{2} c \sin B}$$

Множећи једначине 2) и 3) добијамо даље

$$\cot g\, BGF = \frac{\sin \frac{1}{2} b \sin A \cos DF}{\cos \frac{1}{2} a \sin B \sin EF}$$

или, због

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}{\sin \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2} b}$$

$$4) \qquad \cot g\, BGF = \frac{\sin \frac{1}{2} a \cos DF}{\sin EF \cos \frac{1}{2} b}$$

али је у № 243 нађено

$$\cos EF = \cos\frac{1}{2}\varepsilon\cos\frac{1}{2}a,\quad \cos DF = \cos\frac{1}{2}\varepsilon\cos\frac{1}{2}b,$$

одакле

$$\cos DF = \frac{\cos\frac{1}{2}b}{\cos\frac{1}{2}a}\cos EF;$$

замењујући ове вредности у 4) добићемо однос 1).

Примедба. Из горе нађеног односа

$$BG = 90^o + \frac{1}{2}a$$

закључујемо ово: кад више сферних троуглова находећих се на истој лопти имају једну заједничку страну, онда велики кругови, који пролазе кроз средине осталих двеју страна сваког од тих троуглова, морају се сећи у истим двема тачкама, које се налазе у продужењу заједничке стране.

245. Ако велики лук EF (сл. 108), који везује средине E, F страна AC, AB сферног троугла ABC продужимо дотле, докле он непресече продужену страну BC у тачки G, па затим пренесемо од тачке G на луку FG дужину $GH = EF$ и на луку BG дужину $GJ = BD = \frac{1}{2}a$, троугао GHJ биће правоугао код J, и лук HJ биће једнак половини сферног сувишка.

Из троугла BGH сљедује

$$\cos BH = \cos GH \cos BG + \sin GH \sin BG \cos BGF,$$

или

$$\cos BH = -\cos EF \sin\frac{1}{2}a + \sin EF \cos\frac{1}{2}a\cos BGF,$$

или такође

$$\cos BH = \sin EF \cos \frac{1}{2} a \ (\cos BGF - tg \frac{1}{2} a \, cotg EF)$$

одакле, узимајући у обзир однос 1) у № 244, закључујемо, да је лук $BH = 90^0$; но како је на основу исте № и $BJ = 90^0$, то је онда B пол великом луку JH, и зато троугао GJH код J правоугао.

Из истог троугла добијамо

$$\cos JH = \frac{\cos GH}{\cos GJ} \quad \text{или} \quad \cos JH = \frac{\cos EF}{\cos \frac{1}{2} a}$$

па како је на основу № 243

$$\cos EF = \cos \frac{1}{2} \varepsilon \ \cos \frac{1}{2} a,$$

то је напослетку

$$\cos JH = \cos \frac{1}{2} \varepsilon \quad \text{дакле} \quad JH = \frac{1}{2} \varepsilon.$$

246. Кад се више сферних троуглова са једном заједничком страном и једнаким површинама налазе на истој лоптиној полутини, којој као основа служи круг, добивен продужењем заједничке стране, онда средине осталих двеју страна сваког од тих троуглова морају лежати у једном и истом великом кругу.

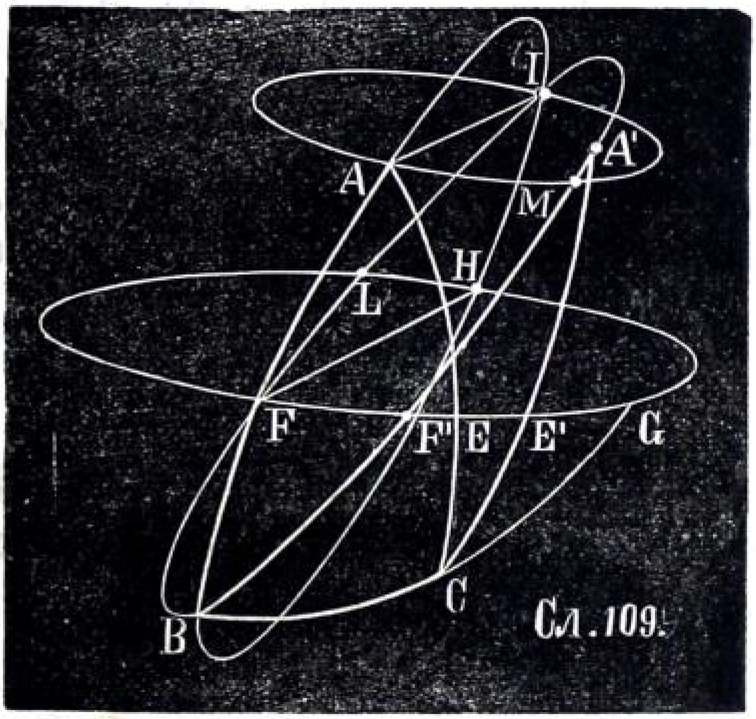
Да би ово доказали, узмимо нека су (сл. 109 види страну 455) ABC, $A'BC$ два сферна троугла, који имају једнаке површине и страну BC заједнички, и који се осим тога налазе на истој лоптиној полутини, којој је основа круг који постаје, кад се заједничка страна BC продужи.

Ако означимо са E, F, E', F', средине страна AC, AB, $A'C$, $A'B$ то, као што је већ познато, велики кругови K, K', од којих први пролази кроз тачке E, F, а други кроз тачке E', F', морају сећи продужену страну BC у истој тачки G, и делити је у тој тачки у правцу од B према C, на два суптрактивна комада оба мања од 180° (№ 239); осим тога луци EF, $E'F'$ морају бити једнаки (243).

Како је даље на основу № 244

$$cotg\ BGF = tg\ \frac{1}{2}\ a\ cotg\ EF,$$

$$cotg\ BGF' = tg\ \frac{1}{2}\ a\ cotg\ E'F',$$



Сл. 109.

то одатле изводимо, да су угли BGF, BGF' једнаки, и да се дакле велики кругови K, K' поклапају.

247. Кад се више сферних троуглова са једном заједничком страном и једнаким површинама налазе на истој лоптиној половини, којој је основа круг добивен продужењем заједничке стране, онда темена свију тих троуглова супротна заједничкој страни морају лежати у једном малом кругу, који је паралелан са великим кругом, на коме су средине осталих двеју страна сваког од тих троуглова.

Да би ово доказали, претпоставимо све онако као у № 246 (сл. 109), и узмимо (што је допуштено), да тачка A не стоји даље од равни круга K но тачка A'; ако кроз тачку A опишемо један мали круг k, којег је раван паралелна са равни круга K, онда тачка A' мора се налазити на лоптиној капи коју од лоптине половине одваја раван малога круга k.

Означимо са H, J тачке, где продужена страна AB сече кругове K, k, са L тачку, где продужена страна BA' сече круг K, и са M прву тачку круга k, на коју се наилази, кад се страна BA' почињући од B и у правцу од B према A' прелази.

Пошто су равни кругова K, k паралелне, то су праве AJ, FH, од којих прва везује тачке A, J, а друга тачке F, H, паралелне, и с тога луци AF, JH једнаки; дакле је

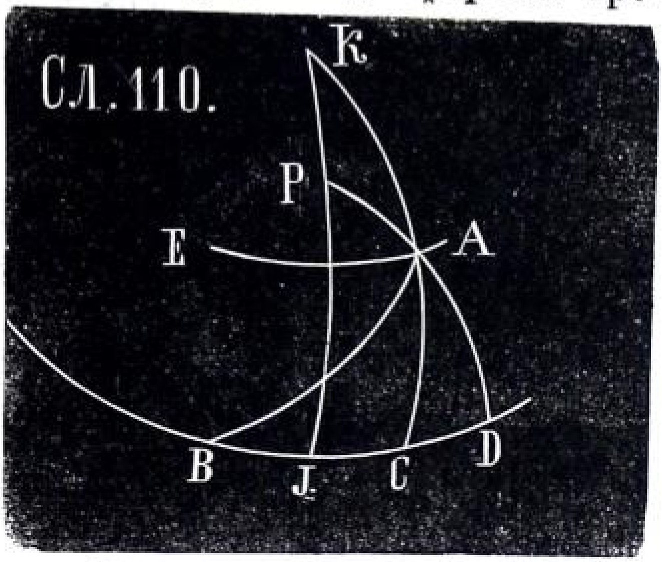
$$BF + FJ = JH + FJ = 180^{\circ}.$$

Пошто су усљед овога тачке B, J на крајевима истог лоптиног пречника, то страна BA' довољно продужена мора пролазити кроз тачку J; одатле сљедује да су луци BF', $F'J$ суплементни, дакле је

$$BF' + F'J = F'J + JL;$$

из ове једначине налазимо, да су луци BF', JL једнаки; но како је због паралелности правих MJ, $F'L$, од којих прва везује тачке M, J, а друга тачке F', L, лук JL једнак луку MF', то је и лук BF' једнак луку MF'. Али је са друге стране $BF' = A'F'$, дакле се тачке A', M поклапају.

Овим смо, као што се види, доказали још на један начин Lexell-ову теорему, о којој је било говора у № 229. Трећи начин доказивања те теореме показан је у сљедећој №.



Сл. 110.

248. Нека је (сл. 110) ABC један од сферних троуглова, који имају заједничку страну $BC=a$ и исту површину $A+B+C-\pi=\varepsilon$. Нека је JPK један лук, који је управно на страну BC и кроз њену средину повучен; ако узмемо $JP=90^0$, тачка P биће пôл луку BC и лук PAD описан кроз тачке P, A стајаће управно на BC. Ако ставимо $JD=p$, $AD=q$, то ће правоугли сферни троугли BAD, CAD, у којима је $AB=c$, $AC=b$, $BD=p+\frac{1}{2}a$, $CD=p-\frac{1}{2}a$, дати

$$\cos b=\cos q\cos\left(p-\frac{1}{2}a\right),\qquad \cos c=\cos q\cos\left(p+\frac{1}{2}a\right)$$

Али је, као што се из образаца № 177 даје лако извести

$$1)\qquad \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varepsilon=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{\sin b\sin c\sin A}$$

стављајући у овом обрасцу

$$\cos b+\cos c=2\cos p\cos q\cos\frac{1}{2}a\,,$$

$$1+\cos a=2\cos^2\frac{1}{2}a,$$

$$\sin c\sin A=\sin a\sin C=2\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a\sin C$$

добићемо

$$cotg\,\frac{1}{2}\,\varepsilon = \frac{cos\,\frac{1}{2}\,a + cos\,p\,cos\,q}{sin\,\frac{1}{2}\,a\,sin\,b\,sin\,C}$$

Даље из правоуглог троугла ACD добијамо

$$sin\,b\,sin\,C = sin\,q\,;$$

дакле је

$$cotg\,\frac{1}{2}\,\varepsilon = \frac{cos\,\frac{1}{2}\,a + cos\,p\,cos\,q}{sin\,\frac{1}{2}\,a\,sin\,q}$$

одакле

$$2) \qquad cos\,p\,cos\,q = cotg\,\frac{1}{2}\,\varepsilon\,sin\,\frac{1}{2}\,a\,sin\,q - cos\,\frac{1}{2}\,a.$$

Помоћу овог односа моћићемо сад изнаћи линију, на којој леже темена A свију троуглова са заједничком страном BC и истом површином ε.

Пренесимо на управној JPK од P почевши $PK = x$, вежимо K са A једним великим луком и ставимо $KA = y$; из троугла PKA, где је $PA = \frac{1}{2}\,\pi - q$ и угао $KPA = \pi - p$ добијамо

$$cos\,y = sin\,q\,cos\,x - cos\,q\,sin\,x\,cos\,p\,,$$

а замењујући овде $cos\,p\,cos\,q$ његовом вредношћу под 2)

$$cos\,y = sin\,x\,cos\,\frac{1}{2}\,a + sin\,q\,(cos\,x - sin\,x\,cotg\,\frac{1}{2}\,\varepsilon\,sin\,\frac{1}{2}\,a)$$

Ако се сад стави

$$\cos x - \sin x \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \varepsilon \sin \frac{1}{2} a = o$$

или што је свеједно

$$\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \varepsilon \sin \frac{1}{2} a$$

вредност за y биће стална (то ће рећи иста за све троугле са заједничком страном BC и површином ε), јер ће тада бити

$$\cos y = \sin x \cos \frac{1}{2} a$$

Дакле ако кроз средину стране BC повучемо велики лук JPK управно на исту страну, отсечемо на истом луку од J почевши комад $JP = 90^{\circ}$ и од P пренесемо један комад PK, који је такав, да је $\operatorname{cotg} PK = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \varepsilon \sin \frac{1}{2} a$, онда врхови свију троуглова, који леже на страни $BC = a$ и имају исту површину ε, морају се налазити на малом кругу, који је описан из тачке P као пôла и са сферним полупречником KA, који је такав, да је

$$\cos KA = \sin PK \cos \frac{1}{2} a.$$

Задатци.

1°. Да се докаже, да кад су темена сферног троугла ABC од средине D стране BC једнако удаљена, мора постојати однос

$$tg^2 \frac{1}{2} AD = tg \frac{1}{2} BD \, tg \frac{1}{2} CD.$$

2°. Велики луци, који везују темена сферног троугла *ABC* са срединама супротних страна, секу се као што знамо у једној и истој тачки S. Ако означимо са α лук, који везује теме A са средином стране $BC = a$ и са α', α'' комаде од α, од којих се први налази између темена A и тачке S, а други између тачке S и стране a, онда је

$$\frac{\sin \alpha'}{\sin \alpha''} = 2 \cos \frac{1}{2} a.$$

3°. Велики луци, који су са темена A, B, C сферног троугла *ABC* управно на супротне стране повучени, секу се у једној тачки S. Наћи комаде тих управних између темена и тачке S.

4°. Да се докаже, да велики круг, који полови суплеменат једном ма којем углу, на пример углу A, сферног троугла *ABC*, дели супротну страну *BC* на два суптрактивна комада оба мања од 180°, којих су синуси сразмерни синусима страна *AC*, *AB*.

5°. Ако је D тачка, где велики лук *AD*, који полови угао A сферног троугла *ABC*, пресеца супротну страну *BC*, и D' тачка, где велики лук AD', који полови суплеменат угла A, пресеца исту страну, то је

$$\frac{tg \frac{1}{2} a}{tg \frac{1}{2} (CD - BD)} = \frac{tg \frac{1}{2} (CD' + BD')}{tg \frac{1}{2} a} = \frac{tg \frac{1}{2} (b + c)}{tg \frac{1}{2} (b - c)}$$

6°. Ако је r сферни полупречник круга, који је уписан у сферни троугао ABC, то је

$$tg\ r = sin\ (s-a)\ tg\ \frac{1}{2}\ A = sin\ (s-b)\ tg\ \frac{1}{2}\ B$$

$$= sin\ (s-c)\ tg\ \frac{1}{2}\ C.$$

8°. Ако су r_a, r_b, r_c, сферни полупречници кругова који дирају односно стране a, b, c споља, а остале две стране у њином продужењу, то је

$$tg\ r_a = sin\ s\ tg\ \frac{1}{2}\ A = sin\ (s-c)\ cotg\ \frac{1}{2}\ B$$

$$= sin\ (s-b)\ cotg\ \frac{1}{2}\ C,$$

$$tg\ r_b = sin\ s\ tg\ \frac{1}{2}\ B = sin\ (s-c)\ cotg\ \frac{1}{2}\ A$$

$$= sin\ (s-a)\ cotg\ \frac{1}{2}\ C,$$

$$tg\ r_c = sin\ s\ tg\ \frac{1}{2}\ C = sin\ (s-b)\ cotg\ \frac{1}{2} A$$

$$= sin\ (s-a)\ cotg\ \frac{1}{2}\ B$$

9°. Велики луци, који су описани кроз темена A, B, C сферног троугла ABC тако, да полове његову површину, секу се у истој тачки S.

10°. Дат је на лопти један мали круг k, коме је тачка O пол, и још једна тачка S; кроз тачку S описан је један велики круг K, који пресеца мали круг k у тачкама A, B; да се докаже, да је производ $tg\frac{1}{2}AOS\times tg\frac{1}{2}BOS$ сталан.

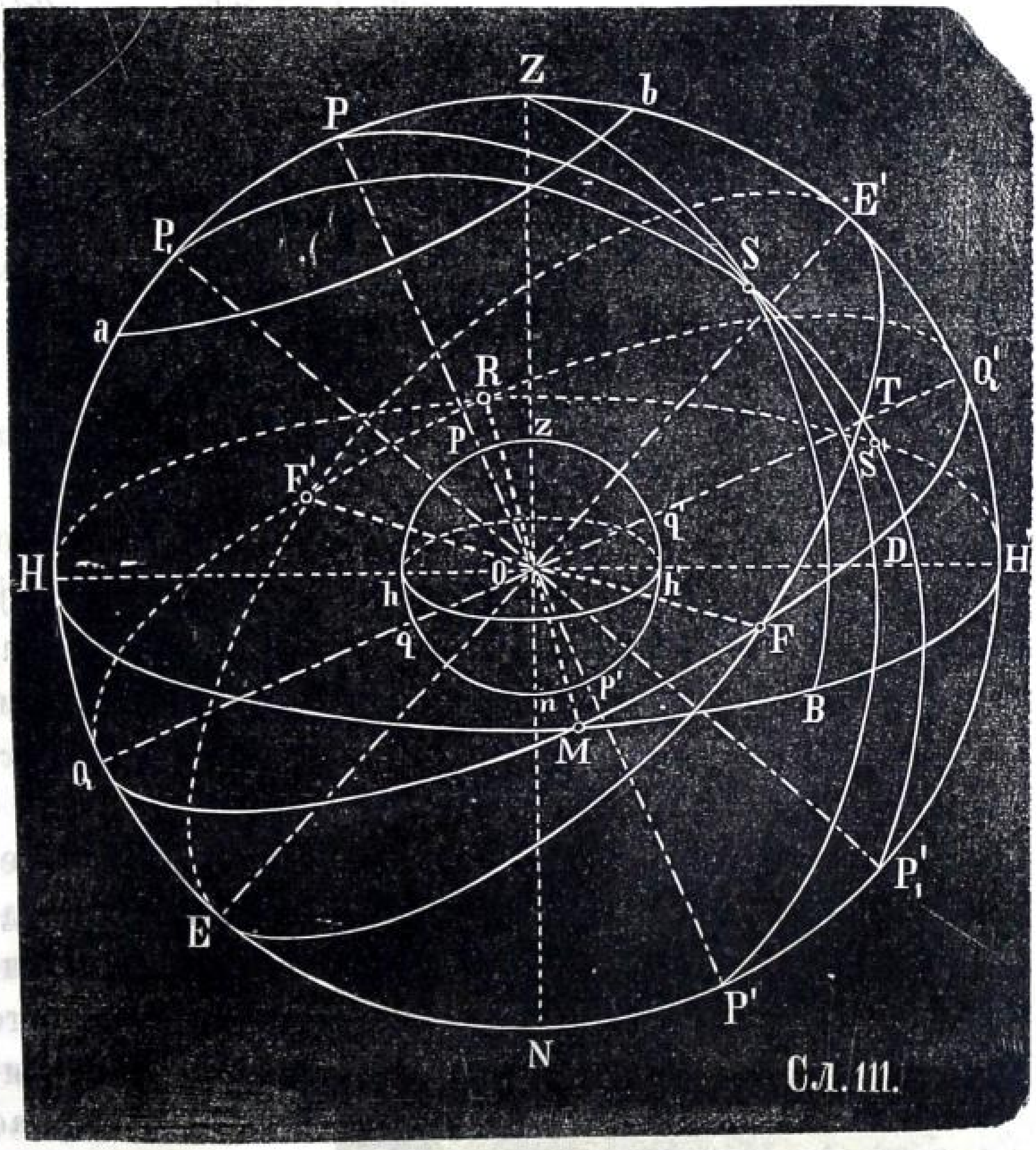
ДОДАТАК II.

249. У овом додатку прећиһемо неколико простих задатака из астрономије, која је једна од најважнијих и најинтереснијих примена сферне тригонометрије. Али пре свега треба да се упознамо са основним појмовима те науке.

Сваком посматрачу z на земљи (сл. 111) изгледа земна површина као једна раван, која је свуд унаоколо једним кругом опасана. Иста раван продужена до неба, које ваља замислити као једну из средишта земље описану лопту (сферу), зове се *привидни хоризонат* (доглед) посматрача за разлику од његовог *истинског хоризонта HH'*, који се добија, кад се кроз средиште O земље повуче једна са привидним хоризонтом паралелна раван.

Кад се на месту посматрања обеси један конац, који је на доњем крају ма чиме оптерећен, па се мирно остави, онда његов правац стоји управно на хоризонту посматрача. Исти конац продужен у мислима на горе и на доле пробија небо у двема тачкама Z, N, од којих се прва Z налази над хоризонтом посматрача, и зове његов *зенит*, а друга се N налази испод његовог хоризонта и зове његов *надир*. Све кроз зенит Z и надир N повучене равни стоје управно на хоризонту, и зову се с тога *вертикалне равни*. Кругови, по којима те равни небо секу, зову се *вертикални кругови*.

Цело небо изгледа као да се дневно обрће од истока к западу око једне земљину осу pp' поклапајуће праве PP', која се зове *светска оса.* Тачке P, P', у којима светска оса пробија небо, зову се *светски пôлови* (обрти). Пôл P, који је нашем зениту Z ближи, и који дакле ми можемо видити, зове се *северни,* а други P' *јужни светски пôл.*



Сл. 111.

Раван, која је кроз средиште O земље управно на светску осу PP' повучена, сече небо и земљу по великим круговима AQ, aq, од којих се први зове *небесни* а други *земни* *екватор* (полутар). Ти кругови деле небо и земљу на две полутине, једну *северну* а другу *јужну*.

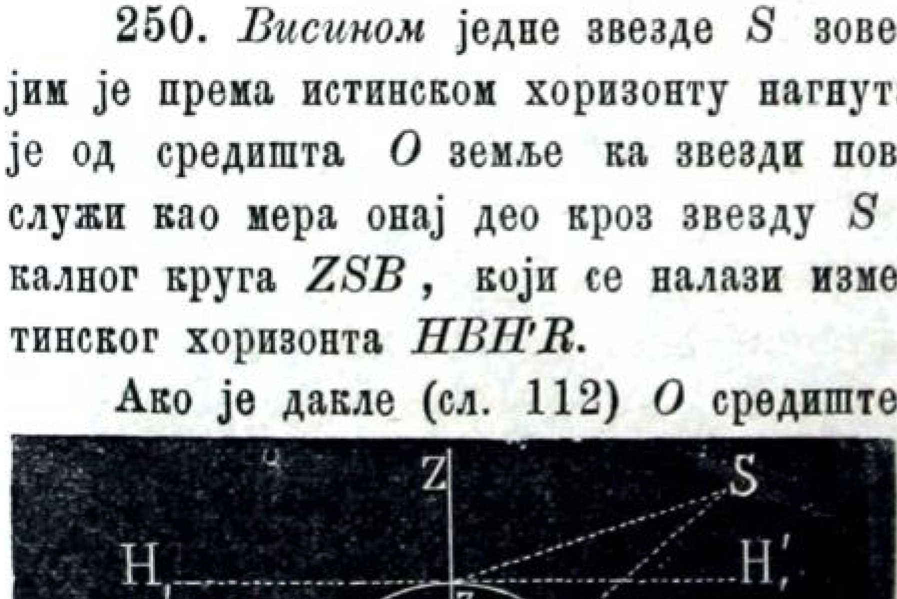
Један велики небесни круг, као $ZQP'Q'$, који пролази кроз светске полове и зенит посматрача, зове се његов *меридијан* (полудневак). Меридијан стоји дакле управно и на екватору и на хоризонту. Небесном меридијану $ZQP'Q'$ одговара земни $zqp'q'$.

Пресек HH' меридијана са хоризонтом зове се *полудневица*. Северном пôлу ближи крај њен H зове се *северна тачка*, а други крај H' *јужна тачка* хоризонта. Пресецањем хоризонта HH' и екватора QQ' добија се права MR. Кад се стане у O и гледа северна тачка хоризонта, онда десно налазећи се крај R праве MR јесте *источна* а лево стојећи крај њен M *западна тачка* хоризонта.

Меридијан дели небо и земљу на две половине; она, у којој се налази источна тачка, зове се *источна*, а друга *западна половина*.

250. *Висином* једне звезде S зове се угао, под којим је према истинском хоризонту нагнута права SO, која је од средишта O земље ка звезди повучена; томе углу служи као мера онај део кроз звезду S пролазећег вертикалног круга ZSB, који се налази између звезде S и истинског хоризонта $HBH'R$.

Ако је дакле (сл. 112) O средиште земље и HH' месту z на земљи одговарајући истински хоризонат, то је угао SOH' висина звезде S. Угао SOH' неможе се непосредно мерити, већ само угао



Сл. 112

SzH'_1, под којим је прва Sz према привидном хоризонту

$H_1\ H_1'$ нагнута. Али из угла SzH_1' може се угао SOH_1 врло лако наћи, јер је

$$SOH_1 = 90^\circ - SOZ = 90^\circ - (SzZ - zSO) = SzH_1' + zSO.$$

Што се тиче угла zSO (паралакса), то је

$$\frac{\sin zSO}{\sin SzO} = \frac{zO}{SO},\ \text{одакле}\ \sin zSO = \frac{zO}{SO} \sin SzO,$$

или

$$\sin zSO = \frac{zO}{SO} \cos SzH_1'.$$

SO је даљина звезде S од средишта земље, zO њен полупречник. За звезде некретнице SO је наспрам zO грдно велико, дакле разломак $\frac{zO}{SO}$ ишчезљив; то исто вреди дакле и за $\sin zSO$, па дакле и за сам угао zSO; и потоме можемо ставити

$$SOH' = SzH_1',$$

а то ће рећи: кад је о некретницама реч, можемо узети, да се истински и привидни хоризонат поклапају, што очевидно излази на то, да саму земљу наспрам грдне даљине некретница можемо као једну тачку сматрати.

Зенитном даљином звезде S зове се угао, који на звезду управљени видни зрак гради са правом zZ, што иде ка зениту. Томе је углу мера лук ZS кроз звезду пролазећег вертикалног круга ZSB.

Зенитна даљина и висина звезде допуњавају се до 90°.

Угао, који прави меридијан каквог места са вертикалним кругом једне звезде, зове се *азимут* звезде. Њему служи као мера лук, који је на хоризонту меридијаном и вертикалним кругом звезде захваћен. Азимут се рачуна почињући од јужне тачке преко запада и севера од 0° до 360°, или често од исте јужне тачке и на запад и на исток, али у оба ова случаја само од 0° до 180°. Тако је на пример (сл. 111) угао $H'ZB$, коме је лук $H'B$ мера, азимут звезде S.

Висином и азимутом, или зенитном даљином и азимутом одређује се положај звезда на небу односно хоризонта.

251. Кроз северни пол P па дакле и јужни P' пролазећи велики кругови $PQ'P'Q$, PSP' и т. д. зову се *деклинациони* (скретајни) или *часовни кругови*. Лук SD таквог једног круга PSP' између звезде S и екватора QQ' зове се *деклинација* (скретај) звезде. Комплеменат SP деклинације зове се *полна даљина* звезде.

Деклинација је *северна* или *јужна*, како је кад звезда северно или јужно од екватора, и броји се увек од екватора према половима од 0° до 90°. Деклинација се сматра као *положна*, кад је она са посматрачем на истој страни екватора, иначе као *одречна*.

Угао $Q'OH'$, под којим је екватор QQ' нагнут према хоризонту места посматрања z зове се *екваторска висина* тога места. Томе је углу мера лук $Q'H'$.

Комплеменат $Q'Z = HP$ екваторске висине, или угао, под којим је светска оса према хоризонту нагнута, то ће рећи висина пола над хоризонтом, зове се *полна висина* места посматрања. Пошто $Q'Z$ има исти број степена као и $q'z$, то одатле сљедује, да је полна висина једног места на земљи једнака његовом отстојању од екватора то јест његовој географској ширини.

Угао $Q'PD$, кога деклинациони или часовни круг звезде S прави са меридијаном места z, зове се *часовни угао* те звезде. Исти угао, који је једнак луку $Q'D$ екватора, броји се од јужне тачке на запад од 0° до 360°, или од исте јужне тачке и на исток и на запад, али тада само од 0° па до 180°.

Ако је *F* пролетња равнодневица (тачка на екватору, где је сунце 9-га Марта и која се тачка такође зове пролетња — еквинокцијална — тачка), то се отстојање *FD* часовног или деклинацијоног круга звезде *S* од исте тачке зове *ректасцензија* (успон) звезде; оно се рачуна на екватору од запада на исток од 0° до 360°.

Ректасцензијом и деклинацијом или ректасцензијом и полном даљином одређује се положај звезда на небу наспрам екватора.

252. Раван, која је кроз пролетњу равнодневицу *F* и њој дијаметрално против положену *F'*, а под углом од 23° 27′ 28″ према екваторовој равни повучена, сече небо по једном великом кругу *EE'*, који се зове *еклиптика*. Еклиптика је путања, коју сунце на небу преко године привидно описује.

Тачка *F'* зове се *јесења равнодневица* (у њој је сунце 10-га Септембра; та се тачка такође зове јесења — еквинокцијална — тачка).

Права *EE'*, која је кроз *O* а у равни еклиптике управно повучена на праву *FF'* (што везује равнодневице) сече еклиптику у двема тачкама *E*, *E'*, такозваним *солстицијама*, од којих се она прва над екватором зове *летња солстиција* (дугодневица) а друга под њим *зимња* (краткодневица), (у првој је сунце 9-г Јуна у другој 10-га децембра).

Осим обичног начина поделе еклиптике на 360°, остао је још један из најстаријих времена, по коме је она подељена на 12 једнаких делова, који се зову знаци. Сваки од тих знакова заузима 30°, и има особито име. Ево имена тих знакова у оном реду, као што они, почињући од пролетње равнодневице и у правцу од запада на исток, сљедују:

1) Ован (♈),
2) Бик (♉),
3) Близанци (♊),
4) Рак (♋),
5) Лав (♌),
6) Девојка (♍),
7) Веси (♎),
8) Акреп (♏),
9) Стрелац (♐),
10) Јарац (♑),
11) Водолија (♒),
12) Рибе (♓).

Кад се кроз једну звезду S и место посматрања повуче једна раван управно на еклиптику, то ће иста раван проћи кроз пôл P_1 еклиптике, и сећи небо по једном великом кругу, који се зове круг ширине звезде S. Лук ST тога круга између звезде и еклиптике, дакле највеће отстојање звезде S од еклиптике, зове се *ширина* звезде, и јесте *северна* или *јужна*, како је кад звезда над еклиптиком или испод ње.

Дужина звезде S јесте пак отстојање FT њеног круга ширине од пролетње равнодневице F, рачунато на еклиптици у правцу од запада на исток од 0° до 360°.

Дужином и ширином звезде одређује се њен положај на небу према еклиптици.

253. При обртању неба око светске осе PP' свака звезда описује из дана у дан од истока на запад један круг, који је паралелан са екватором; због тога мора се непрестанце мењати положај њеног вертикалног и деклинацијоног круга, Звездама описани паралелни кругови изгледају на местима. којих је географска ширина или полна висина испод 90°, нагнута према хоризонту исто као и екватор, и зато паралелни кругови оних звезда, којих је полна даљина већа од полне висине места посматрања, морају бити хоризонтом пресечени на два комада тако, да се један, који је над хоризонтом види, а други, који је испод њега невиди. Звезде којих је полна даљина мања од полне висине места посматрања, описују паралелне кругове, који су сасвим над

хоризонтом места; те звезде незалазе дакле никад за то место и зову се *циркумполарне* звезде.

Звезде, које излазе и залазе т. ј. оне, којих паралелне кругове хоризонат места сече, дижу се по изласку све више и више над хоризонтом и дошавши у меридијан стоје највише; у том тренутку њин вертикалан и деклинацијони круг падају у меридијан. Кад је звезда у меридијану, дакле њена висина највећа, онда се каже, да она *кулминише*, и тачка где се она тада находи, зове се *тачка кулминације*; од те тачке спушта се звезда према хоризонту тако, да су у тренутцима, који су од тренутка кулминације једнако удаљени, њене висине једнаке.

Циркумполарне звезде виде се, за време једног свог оптока двапут у меридијану; тако на пример ако се једна звезда креће у паралелном кругу ab (сл. 111), то она у тачкама a, b пролази кроз меридијан; у тачки b њена је висина ајвећа а у тачки a најмања; пролаз звезде кроз b зове се *горња* а онај кроз a *доња кулминација* њена. Помоћу обеју кулминација једне циркумполарне звезде врло је лако наћи полну висину или географску ширину места посматрања. И доиста полна је висина

$$HP = aH + aP = aH + \frac{1}{2}\,aPb = \frac{1}{2}\,(2\,aH + aPb)$$

или

$$HP = \frac{1}{2}\,(aH + bH),$$

одакле се види, да је полна висина или географска ширина једнака половини збира највеће и најмање висине једне циркумполарне звезде.

254. Време, које протиче од једне до друге кулминације какве звезде јесте стално и зове се *звездани дан*, који

се дели на 24 часа, час се дели на 60 минута а минута на 60 секунада. Време звезданим даном мерено зове се *звездано време*; оно је од *сунчаног времена* различно, јер је сунчани дан т. ј. време између две узастопне кулминације сунца, од прилике за 3′ и 56·5″ дужи од звезданог дана. Почетак звезданог дана јесте тренутак кулминације пролетње равнодневице.

Пошто свака тачка на небу при свом оптоку око светске осе за 24 звездана часа описује један круг од 360°, дакле за 1 час 15°, за једну минуту 15 лучних минута и за 1 секунду 15 лучних секунада, и пошто даље између два деклинацијона круга лежећи луци паралелних кругова имају исти број степена, минута и секунада, и потоме им исто време за пролаз кроз меридијан треба, то је јасно, да ће лук екватора од пролетње равнодневице па до деклинацијоног круга звезде, то ће рећи ректасцензија звезде, имати 15, 30, 45 .... 15 t секунада, кад звезда за 1, 2, 3 .... t секунада доцније ступи у меридијан но пролетња равнодневица дакле кад по звезданом времену удешени часовник показује 1, 2, 3, ... t секунада. По овоме ректасцензија добија се у лучним степенима, минутама и секундама, кад се са 15 помножи време, које по звезданом времену удешени часовник у тренутку звездине кулминације показује.

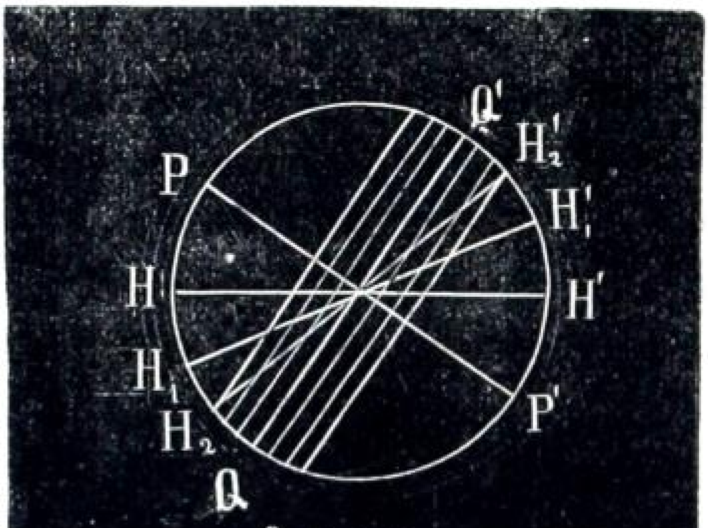
255. Еклиптика, која је према екватору под углом од 23° 27′ 28″ нагнута, и који она сече у тачкама F, F' (сл. 111), реклисмо да је путања, коју сунце на небу преко године привидно описује. Кад је сунце у једној од тачака F, F', онда паралелни круг, који оно тога дана описује, јесте сам екватор; пошто је овај хоризонтом преполовљен, па био хоризонат нагнут под макаквим углом према светској оси PP', то је тада сунце за сва места на земљи исто онолико дуго над хоризонтом, колико је и испод њега, то ће рећи

дан и ноћ су тада једнаки. То је узрок зашто се тачке F, F' зову равнодневице или еквинокцијалне тачке.

Пошто сунце пређе пролетњу равнодневицу F, оно се диже над екватором, и описује из дана у дан паралелне кругове, који су све даљи и даљи од екватора, јер његова деклинација расти све једнако, и достиже своју највећу вредност $E'Q' = 23^\circ 27' 28''$ 9-га Јуна, када је сунце у E', и потоме његова ректасцензија $FQ' = 90^\circ$. Кроз E' пролазећи паралелни круг, који сунце тога дана описује, зове се *повратни круг рака*, и тачка E' *повратна тачка*, јер се одатле сунце екватору враћа, и све му се више и више приближава; тачка E' зове се и летња солстиција (solstitium), јер су тада дневне промене у деклинацији сунца тако мале, да изгледа, као да сунце скоро стоји.

После 9-г Јуна, деклинација сунца поступно опада, док међутим његова ректасцензија још једнако расти; 10-га Септембра деклинација је сунца нула, ректасцензија 180° и сунце се налази у јесењој равнодневици F'; после тога дана деклинација сунца постаје јужна, а ректасцензија расти и даље; кад је ова $= 270^\circ$, а то је 10-га Децембра, онда деклинација добија опет највећу вредност од $23^\circ 27' 28''$, и сунце се находи у тачки Q; паралелни круг кроз Q зове се *повратни круг јарца*, а тачка Q *повратна тачка* или и зимна солстиција. После 10-га децембра деклинација сунца опада све једнако а ректасцензија расти, докле сунце недође у пролетњу равнодневицу, и тада је деклинација његова нула а ректасцензија 360°.

256. Нагиб еклиптике према екватору, који се нагиб зове и *косина еклиптике*, узрок је између осталога и неједнакости дана и ноћи. Паралелне кругове, које сунце на небу из дана у дан описује, дели казалисмо хоризонат на два комада, од којих је један над хоризонтом а други испод њега; први комад зове се *дневни* а други *ноћни* лук



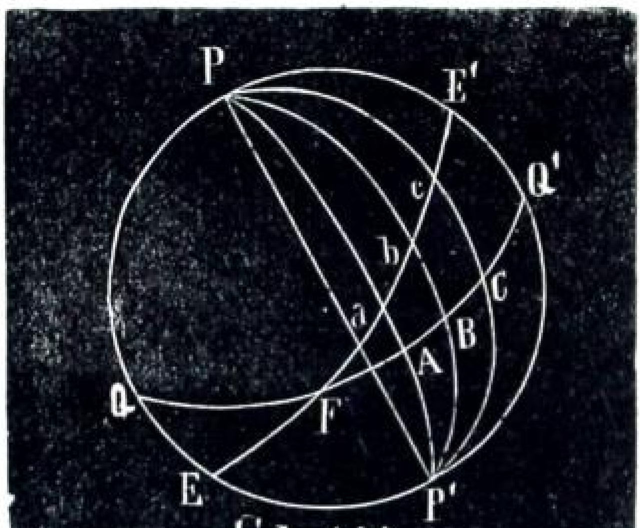
Сл. 113.

сунца. За време северне деклинације, то јест од 9-г Марта до 10-га Септембра дневни је лук већи од ноћног (сл. 113) и он је тим већи, дакле и тачке изласка и заласка сунца тим даље према северу, што је год дотични паралелни круг даљи од екватора, а за време јужне деклинације то јест од 10-г Септембра до 9-га Марта дневни је лук тим мањи од ноћног, дакле и и тачке изласка и заласка сунца тим даље према југу, што је год дотични паралелни круг даљи од екватора. За време северне деклинације дан је дакле дужи од ноћи, а за време јужне краћи, и разлика у дужини дана и ноћи на једном и истом месту земље тим је већа, што је год већа деклинација сунца; најдужи је дакле дан, кад је сунце у летњој солстицији (дугодневици) а најкраћи, кад је у зимној (краткодневици). Но ваља још приметити, да је разлика у дужини дана и ноћи на једном и истом месту земље у једно извесно доба године тим већа, што је већа његова географска ширина (полна висина). Јер кад хоризонат из положаја HH' (сл. 113) дође у положај H_1H_1', онда су дневни луци сунца за време његове северне деклинације дужи, а за време јужне краћи но при пређашњем положају HH' хоризонта.

Ако хоризонат H_2H_2' каквога места прави са екватором QQ' угао $\alpha = 23° 27' 28''$, ако је дакле његова географска ширина или полна висина $= 66° 32' 32''$, онда један *повратни круг* лежи над хоризонтом и дира га у северној тачки, а други испод њега, и дира га у јужној тачки, и потоме на том месту на дан летње солстиције сунце незалази, а на дан зимње солстиције никако неизлази. На местима још веће географске ширине налази се за време северне деклинације више паралелних кругова над хоризонтом, и потоме сунце кроз више дана никако незалази; на полу *P*, где је географска ширина $= 90^\circ$, дакле светска оса *PP'* управна на хоризонту, због чега се овај последњи са екватором поклапа, паралелни кругови теку паралелно са хоризонтом, дакле тамо сунце за време северне деклинације, то јест кроз 6 месеца, незалази, а за време јужне деклинације, то јест опет кроз 6 месеца неизлази.

257. Сунце се по еклиптици привидно креће од запада на исток; ако је оно једног извесног дана са каквом звездом *S* кулминисало, то ће оно сљедећег дана не са њом, већ са другом, која је мало више према истоку, кулминисати, дакле ће доцније од звезде *S* проћи кроз меридијан; због тога сунчани дан мора бити дужи од звезданог и то за онолико, колико луку еклиптике, који сунце кроз један дан прелази, треба времена, да прође кроз меридијан. Тај лук због неједнообразног кретања сунца по еклиптици, није свакад једнак; он је највећи око 19-га Децембра и има тада $1^\circ 1' 10''$, а најмањи око 21-га Јуна, и има тада $0^\circ 57' 11{\cdot}5''$; због тога и време, које томе луку за пролаз кроз меридијан треба, није увек исто, одакле сљедује, да сунчани дан није сталан, и с тога као јединица за мерење времена неудесан.

Али и кад би се сунце по еклиптици једнообразно кретало, опет због нагиба еклиптике према екватору, сунчани дан неби био сталан. И доиста ако су (сл. 114) *Fa*, *bc* два једнака лука на еклиптики, први код пролетње равнодневице а други близу летње солстиције *E'*, и *A*, *B*, *C* тачке, у којима кроз *a*, *b*, *c* повучени деклинацијони кругови екватор секу, то ће при дневном обртању неба тачке *a*, *b*, *c* са тачкама *A*, *B*, *C* бити у исто доба у меридијану, и потоме ће луку *Fa* требати за пролаз кроз меридијан исто онолико времена, колико и луку BC; али како је $BC > bc$ и $FA < Fa$, због чега је и $BC > FA$, то ће луку BC, па дакле и луку bc, требати за пролаз кроз меридијан више времена него ли луцима FA и Fa.



Сл. 114.

Да би незгоде, које од неједнакости у трајању сунчаног дана долазе, избегли, астрономи су замислили тако звано *средње сунце*, које са истинским сунцем у исти мах кроз пролетњу равнодневицу пролази, али се по екватору једнообразно креће, због чега је његов дан, који се зове *средњи дан*, сталан и потоме за мерене времена удесан. Време, коме средњи дан служи као јединица, зове се *средње време* за разлику од *истинског*, које се управља по кретању истинског сунца. Наши обични часовници показују средње, а сунчаници истинско време. Разлику између истинског и средњег времена астрономи зову *једначином времена* (équation du temps); истинско подне час је пре а час после средњег, и само је четири пута у години т. ј. око 3-г Априла, 3-г Јуна, 20-г Августа и 12 Децембра једначина времена нула. Једначине времена за све годишње дане налазе се у астрономским ефемеридама (дневницима, где астрономи своја дневна посматрања бележе). Ако је помоћу сунчаника или тачно повучене полудневице нађен тренутак, кад је истинско подне, онда се помоћу познате једначине времена може тачно одредити време, кад је средње подне; и на тај начин могу се дакле часовници регулисати.

258. Време које протиче од тренутка, кад је сунце код какве некретнице и с њом заједно кулминише, па до тренутка кад се оно звезди опет повраћа, зове се *звездана (сидерна) година;* она има 365·25637 дана. Време од

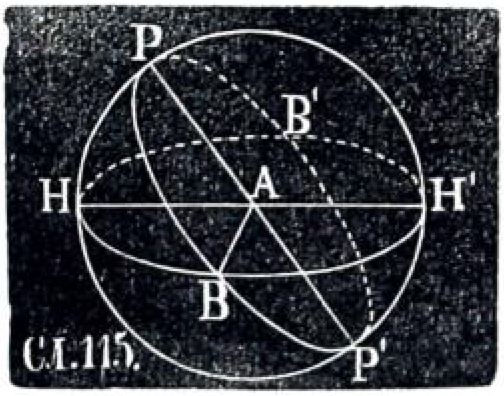
проласка сунца кроз пролетњу равнодневицу па до његовог повратка к истој зове се *сунчана (тропска) година*, која је од сидерне нешто краћа с тога, што пролетња равнодневица сваке године нешто мало (за 50·221") на запад скреће; тропска година има 365·242255 дана или 365 дана, 5 сати, 48' и 50·4".

Конструкција хоризонатног сунчаника.

259. У тачки *A*, где се хоризонатни сунчаник жели конструисати, наместимо једну праву паралелно са светском осом, дакле тако да угао, под којим је она према хоризонту од *A* нагнута, буде једнак географској ширини или полној висини места *A*. Кад сунце поменути штап осветли, онда ће сенка овог последњег на једном хоризонатном кругу, коме је средиште у *A*, у сваком тренутку показивати истинско време. Да би тај круг поделили, то ће рећи да би у њему повукли праве, које ће, кад на њих сенка штапа падне, дотично време показивати, узмимо на ум, да се време од једне па до друге поноћи дели на 24 једнаких делова или часова, тако да 12-ти час пада у подне, дакле у оно доба, кад сунце кроз меридијан места *A* пролази. Ако узмемо, да се сунце једнообразно креће, оно ће сваког часа једнаке луке прелазити, дакле ће његов часовни угао сразмерно времену растити или опадати, и то свакога часа за 15°. По овоме лако је у свако доба наћи часовни угао сунца, као и обратно из часовног угла сунца пре или после подне закључити на дотично време. У тренутку, који је t часова пре или после подне, часовни је угао сунца $15\,t^{0}$, и обратно кад је часовни угао сунца у једном извесном тренутку пре или после подне s, онда је исти тренутак $\frac{s}{15}$ часова пре или после подне.

Нека је (сл. 115) HH' хоризонат места *A*, где се сунчачик жели поставити, AP нека је правац штапа, AB

сенка, коју он баца, $PHP'H'$ меридијан места A. Из правоуглог сферног троугла BHP, где је $HPB = H'PB' = s$ часовни угао, $HP = p$ полна висина места A и $HB = x =$ углу HAB, који сенка штапа прави са полудневицом HH' (то ће рећи са правом, на коју сенка у подне пада), добијамо (№ 164):



Сл. 115.

$$tg\, s = \frac{tg\, x}{sin\, p}, \quad \text{одакле} \quad tg\, x = tg\, s\; sin\, p.$$

Последњи образац даје угао $HAB = x$, дакле се може AB конструисати, и кад затим сенка падне на AB, часовни угао сунца биће s°, дакле време $\frac{s}{15}$. По овоме, ако хоћемо да нам хоризонатни сунчаник показује само целе часове, повућићемо у хоризонатној и кроз A пролазећој равни праве, које су према AH нагнуте под углима, који су такви, да су им тангенте $= tg\, 15^\circ\, sin\, p$, $tg\, 30^\circ\, sin\, p$, $tg\, 45^\circ\, sin\, p$ . . . . , и кад потом сенка штапа AB на те праве буде пала, биће 1, 2, 3, ... или 11, 10, 9 . . . . часова претпостављајући наравно да AH полудневицу тачно поклапа.

Као што се види за конструкцију сунчаника нужно је знати правац полудневице дотичнога места. Практички се исти правац овако налази. Из тачке A, где се штап, који ће сенку бацати, има наместити, треба описати у хоризонатној равни цео један низ кругова, и у истој тачки затим поставити управно један штап произвољне дужине. Затим треба посматрати дужину сенке, коју штап баца, пре и после подне, што је помоћу описаних кругова врло лако; у тренутку, кад је сенка најкраћа, јесте истинско подне, и правац сенке јесте правац полудневице. Но сигурније се полудневица налази, кад се нађу сенке једнаке дужине пре и после подне, и угао истих преполови. Притоме се претпоставља да сунце стоји највише, кад је оно у меридијану, што би и било, кад се у течају једног дана деклинација његова неби мењала. Али како се она мења, то су за поменути посао најзгоднији дани око 9-га Јуна и 10-га децембра, јер се тада, као што већ знамо, деклинација сунца сасвим неприметно мења. Пошто се најзад крај сенке згодно неопажа, то је боље на горњем крају штапа утврдити једну металну плочицу са једним малим отвором, и светлу тачку, која на тај начин постаје, узети као крај сенке.

Дужина дана. Најдужи дан. Сутон.

260. У претходећој №-и рекли смо, да часовни угао сунца сразмерно времену расти или опада т. ј. свакога часа за 15°, и да се потоме време, које сунцу треба, па да у меридијан дође, или које је прошло, од како је оно меридијан оставило, добија, кад се часовни угао са 15 подели. По овоме ако поделимо са 15 часовни угао сунца у тренутку, кад се оно рађа, добићемо време од његовог рођења па до подне; а ако поделимо са 15 његов часовни угао у тренутку, кад оно залази, имаћемо време од подне до његовог заласка. Збир та два времена даје дужину дана.

Нека је (сл. 110) S сунце, z место посматрања на земљи, HH' његов хоризонат, Z његов зенит, $PZP'Q$ његов меридијан, $z = SZ$ зенитна даљина сунца, $d = SD$ његова деклинација, $s = DPQ'$ његов часовни угао, $p = PH$ полна висина или географска ширина места посматрања. Из сферног троугла PZS, у коме је $PZ = 90° - PH = 90° - p$, $PS = 90° - SD = 90° - d$, $SZ = z$ и угао $DPQ' = s$, добијамо (№ 156, 1)

$$1) \qquad \cos z = \sin p \sin d + \cos p \cos d \cos s,$$

где d треба одречно узети, ако је деклинација јужна. Пошто је при изласку и заласку сунца његова висина $= 0$, дакле његова зенитна даљина $= 90^\circ$, то да би из обрасца 1) добили часовни угао сунца при његовом изласку или заласку, треба нам само у њему ставити $z = 0$, па ћемо добити

$$1) \qquad \cos s = - tg\, p \; tg\, d.$$

За s нађени број степена, минута и секунада подељен са 15 даје време од изласка сунца до подне или од подне до његовог заласка.

Ми се овде нисмо освртали на преламање светлости, услед којег сунце привидно увек више стоји, но што је то у самој ствари. Услед тога преламања светлости сунце се види пре но што је се над хоризонтом места дигло, и то узвишење износи од прилике 33″, који ћемо број ми означити са ε; и тако зенитна даљина сунца у тренутку његовог изласка или заласка биће $90^\circ + \varepsilon$. Што се деклинације тиче, она је обично позната само за подне дотичнога места, то ће рећи за онај тренутак, кад сунце кроз меридијан места пролази, и друкчија је при изласку и заласку сунца; али ми можемо узети, да се она у размаку од изласка сунца до подне, или од подне па до заласка једнообразно мења; ми ћемо узети, да она расти за n'' кроз 24 часа, или што је свеједно кад часовни угао s нарасти за 360°. Ако је сад d деклинација за подне дотичнога места, то ће она при изласку сунца, кад је часовни угао $= s$ бити $d - \frac{ns}{360}$ претпостављајући да је s дато у степенима; при заласку сунца, кад је часовни угао $= s'$, она ће бити $d + \frac{ns'}{360}$.

Дакле ћемо сада имати

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos(90^0+\varepsilon)=\sin p\,\sin\left(d-\frac{ns}{360}\right)+\\ &\qquad +\cos p\cos\left(d-\frac{ns}{360}\right)\cos s.\\ &\cos(90^0+\varepsilon)=\sin p\,\sin\left(d+\frac{ns'}{360}\right)+\\ &\qquad +\cos p\cos\left(d+\frac{ns'}{360}\right)\cos s'. \end{aligned}\right.$$

одакле

$$4)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos s=-\frac{\sin\varepsilon+\sin p\,\sin\left(d-\frac{ns}{360}\right)}{\cos p\,\cos\left(d-\frac{ns}{360}\right)}\\ &\cos s'=-\frac{\sin\varepsilon+\sin p\,\sin\left(d+\frac{ns'}{360}\right)}{\cos p\,\cos\left(d+\frac{ns'}{360}\right)} \end{aligned}\right.$$

Ови обрасци дају часовне угле при изласку и заласку сунца, после чега се дужина дана лако добија. Али да би из истих образаца s и s' добили, треба најпре на десној страни истих узети $s=0$, и $s'=0$, то ће рећи треба s и s' тражити из обрасца

$$5)\qquad \cos s=\cos s'=-\frac{\sin\varepsilon+\sin p\sin d}{\cos p\cos d},$$

па онда за s и s' нађену вредност заменити на десној страни образаца под 3), после чега ћемо добити тачније вредности за часовне угле. Ако би желили имати још тачније вредности, морали би само те нове вредности опет заменити на десној страни образаца под 3); но то у највише прилика није нужно, јер су количине $\frac{ns}{360}$, $\frac{ns'}{360}$ врло мале.

Пошто је најдужи дан онда, кад је деклинација сунца $= 23^{\circ}\,27'\,28''$ т. ј. кад сунце описује повратни круг рака, то треба у овим рачунима, кад се тражи трајање најдужег дана за једно место на земљи, ставити $d = \alpha$.

261. Помоћу образаца претходеће №-е можемо врло лако наћи географску ширину места, где најдужи дан траје 24 часа и више.

Најдужи је дан на једном месту, казасмо мало час, кад је деклинација сунца $\alpha = 23^{\circ}\,27'\,28''$. Ако дакле узмемо у рачун преламање светлости, ставићемо у образцу 5) № 260 $s = 180^{\circ}$, $d = \alpha = 23^{\circ}\,27'\,28''$, па ћемо добити

$$\frac{\sin \varepsilon + \sin \alpha \sin p}{\cos p \cos \alpha} = 1,$$

одакле

$$\sin \varepsilon = \cos p \cos \alpha - \sin p \sin \alpha = \cos (p + \alpha).$$

или

$$p + \alpha = 90^{\circ} - \varepsilon \quad \text{и} \quad p = 90^{\circ} - (\alpha + \varepsilon).$$

Ако ли се необазиремо на преламање светлости, имаћемо

$$tg\, p\ tg\, \alpha = 1, \quad tg\, p = cotg\, \alpha, \quad \text{и} \quad p = 90^{\circ} - \alpha,$$

то ће рећи на местима, која су под 66° 32′ 32″ географске ширине, сунце је најдужега дана кроз 24 часа над хоризонтом.

262. Да би нашли трајање најдужег дана на оним местима земље, где је географска ширина већа од $90^\circ-(\alpha+\varepsilon)$, узмимо само на ум, да је тамо тога дана часовни угао при изласку сунца $s=180^\circ$, а такође и часовни угао при заласку сунца $s'=180^\circ$, и да је с тога (№ 260, 3)

$$\cos(90^\circ+\varepsilon) = \sin p \sin\left(d-\frac{n\,180}{360}\right)$$

$$-\cos p \cos\left(d-\frac{n.180}{360}\right),$$

$$\cos(90^\circ+\varepsilon) = \sin p \sin\left(d'-\frac{n'.180}{360}\right)$$

$$-\cos p \cos\left(d'-\frac{n'.180}{360}\right),$$

где су d, d' деклинације при првом и последњем пролазу сунца кроз меридијан, а n, n' количине, за које се кроз 24 часа деклинација мења (она с почетка расте а после опада). Ако међутим n, n' занемаримо, имаћемо

$$\sin\varepsilon = \cos p \cos d - \sin p \sin d = \cos(p+d),$$

дакле

$$p+d = 90^\circ-\varepsilon, \quad \text{и} \quad d = 90^\circ-(p+\varepsilon),$$

и

$$\sin\varepsilon = \cos p \cos d' - \sin p \sin d' = \cos(p+d'),$$

дакле

$$p+d' = 90^\circ-\varepsilon, \quad \text{и} \quad d' = 90^\circ-(p+\varepsilon),$$

то ће рећи, најдужи дан траје од тренутка, кад је деклинација $= 90^\circ - (p + \varepsilon)$, па до тренутка, кад је она опет постала $= 90^\circ - (p + \varepsilon)$.

263. Све, што је досада казано, тиче се сунчевог средишта; али како сунце има $32'$ у пречнику, то ће се досадањи говор тицати горњег сунчевог окрајка, ако место ε узмемо $\varepsilon + 16$, а доњег, ако место ε узмемо $\varepsilon - 16$, што значи претпоставити у горњим рачунима, да је у првом случају зенитна даљина сунчевог средишта при изласку или заласку $90^\circ + \varepsilon + 16$, а у другом $90^\circ - \varepsilon - 16$.

Тако на пример ако у № 261 желимо знати географску ширину места, где је у доба летње солстиције (9. Јуна) барем један део сунца свеједнако над хоризонтом, тако да му се горњи окрајак око поноћи још види, и тек сљедеће поноћи залази, наћићемо да је она

$$p = 90^\circ - (\alpha + \varepsilon + 16').$$

Са истим претпоставкама наћићемо у № 262 да је

$$d = 90^\circ - (p + \varepsilon + 16').$$

Ако за места, где најдужи дан траје 24 и више часова желимо знати трајање најдуже ноћи, треба нам само наћи време, које протиче од тренутка, кад је часовни угао при изласку сунца $=0$, и онога кад је часовни угао при заласку сунца опет $= 0$. Ако место средишта узмемо горњи окрајак сунца у обзир, имаћемо

$$\cos(90^\circ + \varepsilon + 16') = \sin p \sin d + \cos p \cos d = \cos(p - d)$$

одакле

$$p - d = 90^\circ + \varepsilon + 16', \text{ и } d = -(90^\circ + \varepsilon + 16' - p);$$

кад је дакле на местима, којих је географска ширина $=p$, деклинација сунца добила вредност — $(90^0 + \varepsilon + 16' - p)$, дакле постала јужна, онда се на њином хоризонту горњи окрајак сунца последњи пут указује, и затим настаје ноћ, која траје све донде, докле деклинација сунца није наново добила исту вредност.

264. Кроз неко извесно време пред заласком сунца а тако исто и после заласка на хоризонту се види; то видело које се зове *сутон*, долази усљед одбијања сунчане светлости од горњих ваздушних слојева, које сунце, пре но што је се родило, или пошто је већ село, кроз неко извесно време обасјава. Из искуства се зна, да, кад је сунце од прилике за 18^0 испод хоризонта најмањих звезда већ нестаје и да се већ може читати, кад је сунце за $6{\cdot}5^0$ испод хоризонта.

Да би нашли трајање сутона за једно извесно место на земљи, тражићемо као у № 260 часовни угао s_1 сунца за тренутак, кад је његова зенитна даљина $= 108^0$ (или $96{\cdot}5$ за други случај), као и часовни угао s_2 за тренутак, кад је зенитна даљина $= 90^0$ (ако се т. ј. на преламање светлости необазиремо, јер се при оваквим рачунима на особито велику тачност негледа); разлика $s_1 - s_2$ подељена са 15 даје време, кроз које сутон траје. Ако је дакле p географска ширина места, и d деклинација сунца, имаћемо (№ 260)

$$\cos s_1 = \frac{\cos 108^0 - \sin p \sin d}{\cos p \cos d}, \quad \cos s_2 = - tg\, p\; tg\, d\,,$$

где промену у деклинацији сунца, која је мала, нисмо у рачун узели. Ако из ових образаца s_1 и s_2 израчунамо, онда ће $\frac{s_1 - s_2}{15}$ бити трајање (јутрењег или вечерњег) сутона.

Ако је географска ширина места таква, да зенитна даљина сунца око поноћи није већа од 108°, онда настаје *непрекидни сутон*, почем тада вечерњи сутон у јутрењи прелази. Да би за једно место на земљи нашли дан, кад се то први пут дешава, треба нам само из једначине

$$\cos 108^\circ = \sin p \sin d + \cos p \cos d \cos 180^\circ = -\cos(p+d)$$

израчунати d; из исте једначине сљедује

$$108^\circ = 180^\circ - (p+d) \quad \text{и} \quad d = 72^\circ - p;$$

дакле онога дана, кад је деклинација сунца $= 72^\circ - p$, настаје непрекидни сутон, који траје све дотле, докле деклинација сунца непостане опет $= 72^\circ - p$.

265. У овој последњој № прећићемо још неколико простих задатака из астрономије.

1°. Нека је (сл. 110) $r = FD$ ректасцензија сунца S', и $\alpha = S'FD$ косина еклиптике; да се нађе деклинација $S'D = d$ сунца.

Из правоуглог сферног троугла $S'FD$ сљедује (№ 164)

$$tg\,\alpha = \frac{tg\,d}{\sin r} \quad \text{одакле} \quad tg\,d = \sin r\, tg\,\alpha.$$

2°. Из дужине $L = FS'$ сунца S' и косине α еклиптике, да се нађе деклинација сунца.

Из правоуглог сферног троугла $S'FD$ сљедује

$$\sin d = \sin \alpha \sin L.$$

3°. Из деклинације d, часовног угла s, и зенитне даљине z звезде S (сл. 110) да се нађе азимут $a = H'ZB$.

Из сферног троугла SPZ, где је $SP=90^0-d$, $ZPS=s$, $SZ=z$ и $PZS=180^0-a$, слѣдује (№ 158, 2))

$$\frac{\sin(180^0-a)}{\sin s}=\frac{\sin(90^0-d)}{\sin z}$$

одакле

$$\sin a=\frac{\cos d \sin s}{\sin z},$$

4⁰. Познат је часовни угао s, азимут a, деклинација d, и висина h звезде S, да се нађе географска ширина p места посматрања.

Из сферног троугла SPZ, где су познате две стране $PS=90^0-d$, $ZS=90^0-h$ и супротни угли $PZS=180^0-a$, $ZPS=s$, наћићемо трећу страну, $PZ=90^0-p$ (па дакле и p) по једном од образаца (№ 172)

$$tg\frac{1}{2}(90^0-p)=\frac{cotg\frac{1}{2}(h+d)\sin\frac{1}{2}(a-s)}{\sin\frac{1}{2}(a+s)}$$

$$tg\frac{1}{2}(90^0-p)=\frac{tg\frac{1}{2}(h-d)\cos\frac{1}{2}(a-s)}{\cos\frac{1}{2}(a+s)}$$

5⁰. Висина једне звезде при њеној кулминацији јесте H, а њена висина t часова после кулминације h; да се нађе географска ширина p места посматрања и деклинација d звезде.

Ако је (сл. 110) S место, где је звезда t часова после своје кулминације, то је у сферном троуглу SPZ : $SZ=90^0-h$,

$SP=90^\circ-d$, часовни угао $ZPS=15\,t=s$, $PZ=90^\circ-p$, дакле је на основу № 156, 1)

$$\sin h=\sin d\sin p+\cos d\cos p\cos s. \tag{1}$$

У тренутку кулминације је $s=o$, дакле

$$\sin H=\sin d\sin p+\cos d\cos p=\cos(p-d) \tag{2}$$

и

$$p-d=90^\circ-H.$$

Из 1) и 2) добијамо одузимањем

$$\sin H-\sin h=\cos d\cos p\,(1-\cos s),$$

одакле

$$\cos d\cos p=\frac{\sin H-\sin h}{2\sin^2\frac{1}{2}s} \tag{3}$$

По замени ове вредности у 2) добијамо

$$\sin d\sin p=\sin H-\frac{\sin H-\sin h}{2\sin^2\frac{1}{2}s} \tag{4}$$

а одузимањем 4) од 3)

$$\cos(p+d)=\frac{\sin H-\sin h}{\sin^2\frac{1}{2}s}-\sin H \tag{5}$$

Овај образац даје $p+d$, дакле се p и d могу наћи, јер је $p-d$ већ познато.

6°) t и t' часова после кулминације сунца његова је висина била h и h'; тражи се деклинација d сунца и географска ширина p места посматрања.

Из обрасца 1) задатка 5) сљедују једначине

$$1)\quad \begin{cases} \sin h = \sin d \sin p + \cos d \cos p \cos s, \\ \sin h' = \sin d \sin p + \cos d \cos p \cos s'. \end{cases}$$

где су s и s' часовни угли t и t' часова после кулминације. Из ових једначина сљедује

$$\sin h - \sin h' = \cos d \cos p (\cos s - \cos s'),$$

или

$$2)\quad \cos d \cos p = \frac{\sin h - \sin h'}{\cos s - \cos s'}$$

Замењујући ово у прву једначину под 1) добијамо

$$3)\quad \sin d \sin p = \sin h - \frac{\sin h - \sin h'}{\cos s - \cos s'} \cos s$$

Из 2) и 3) добијамо најзад

$$\cos (p - d) = \frac{\sin h - \sin h'}{\cos s - \cos s'}\ 2 \sin^2 \frac{1}{2} s + \sin h$$

$$\cos (p + d) = \frac{\sin h - \sin h'}{\cos s - \cos s'}\ 2 \cos^2 \frac{1}{2} s - \sin h$$

Ови обрасци дају p и d.

7°) Из зенитне даљине z, азимута a једне звезде и полне висине p места посматрања наћи часовни угао s.

Из сферног троугла (сл. 110) SPZ, где је $SZ = z$, $PZS = 180^\circ - a$, $PZ = 90^\circ - p$, ако још ставимо $PSZ = v$, сљедује (№ 172)

$$tg\,\frac{1}{2}\,(v+s) = \frac{cos\,\frac{1}{2}\,(z - 90^\circ + p)}{cos\,\frac{1}{2}\,(z + 90 - p)}\,tg\,\frac{1}{2}\,a,$$

$$tg\,\frac{1}{2}\,(v-s) + \frac{sin\,\frac{1}{2}\,(-z + 90^\circ - p)}{sin\,\frac{1}{2}\,(z + 90^\circ - p)}\,tg\frac{1}{2}\,a.$$

8°) Из часовног угла s, деклинације d звезде S, и географске ширине p места посматрања тражи се азимут a и зенитна даљина z звезде.

Из сферног троугла SPZ, где су стране $SP = 90^\circ - d$, $PZ = 90^\circ - p$, и угао $ZPS = s$ познати, а угли $PZS = 180^\circ - a$, $ZSP = v$ непознати, добијамо (№ 172)

$$cotg\,\frac{1}{2}\,(a-v) = \frac{cos\,\frac{1}{2}\,(p-d)}{sin\,\frac{1}{2}\,(p+d)}\,cotg\,\frac{1}{2}\,s,$$

$$cotg\,\frac{1}{2}\,(a+v) = \frac{sin\,\frac{1}{2}\,(p-d)}{cos\,\frac{1}{2}\,(p+d)}\,cotg\,\frac{1}{2}\,s.$$

из којих се образаца $a-v$ и $a+v$, па дакле и a може наћи.

Из истог сферног троугла SPZ сљедује (№ 172)

$$tg\frac{1}{2}z = \frac{sin\frac{1}{2}(a-v)}{sin\frac{1}{2}(a+v)}\,cotg\frac{1}{2}(p+d),$$

$$tg\frac{1}{2}z = \frac{cos\frac{1}{2}(a-v)}{cos\frac{1}{2}(a+v)}\,tg\frac{1}{2}(p-d);$$

сваки од ова два обрасца даје зенитну даљину z.

9°) Позната је ректасцензија r и деклинација d звезде S, као и косина α еклиптике, да се нађе дужина L и ширина l звезде.

Из троугла P_1SP (сл. 110), пошто је на основу слике $FD = r$, $PS = 90° - d$, $E'Q' = P_1P = \alpha$, $FT = L$, $P_1S = 90° - l$, $P_1PS = 90° + r = QD$, $SP_1P = 90° - L = TE'$, и $PSP_1 = w$, добијамо (№ 172)

$$tg\frac{1}{2}(90° - L + w) = \frac{cos\frac{1}{2}(90° - d - \alpha)}{cos\frac{1}{2}(90° - d + \alpha)}\,cotg\frac{1}{2}(90° + r)$$

$$tg\frac{1}{2}(90° - L - w) = \frac{sin\frac{1}{2}(90° - d - \alpha)}{sin\frac{1}{2}(90° - d + \alpha)}\,cotg\frac{1}{2}(90° + r)$$

ови обрасци дају L и w, а затим се l налази помоћу обрасца (№ 172)

$$\cos l = \frac{\sin \alpha \cos r}{\sin w}.$$

10°) Из деклинације d, часовног угла s звезде S, и географске ширине p места посматрања тражи се зенитна даљина z звезде.

Из сферног троугла SPZ, где је $PZ = 90° - p$, $PS = 90° - d$, $ZPS = QD = s$ и $SZ = z$ сљедује (№ 156)

$$\cos z = \sin p \sin d + \cos p \cos d \cos s,$$

или, ако је φ један помоћни угао, који је такав, да је

$$tg\, \varphi = cotg\, d \cos s,$$

$$\cos z = \frac{\sin d}{\cos \varphi} \sin (p + \varphi).$$

11°) Позната је деклинација d, висина h звезде S, као и географска ширина p места посматрања; тражи се часовни угао s звезде.

Из сферног троугла SPZ, где је $PS = 90° - d$, $SZ = 90° - h$, $PZ = 90° - p$, $ZPS = s$, добијамо (№ 156)

$$\sin h = \sin d \sin p + \cos d \cos p \cos s,$$

одакле

$$\cos s = \frac{\sin h - \sin d \sin p}{\cos d \cos p};$$

овај образац даје часовни угао s, који се у осталом може и помоћу образаца 3) у № 168 згодно наћи.

12°) Географска ширина једног места јесте p, а деклинација звезде d; тражи се висина звезде при њеној кулминацији.

У првом од последња два обрасца треба ставити $s=o$, па ће изаћи

$$h = 90^{\circ} - p + d.$$

За $p = d$ излази $h = 90^{\circ}$, што ће рећи да звезде, којих је деклинација једнака географској ширини места, пролазе кроз зенит места, што се и иначе увиђа.

Кад је најдужи дан, онда је $d = \alpha$, а кад је најкраћи, онда је $d = - \alpha$, дакле је у првом случају $h = 90^{\circ} - p + \alpha$, а у другом $h = 90^{\circ} - p - \alpha$.

13°) Из дужине L, и ширине l звезде S, као и косине α еклиптике тражи се ректасцензија r.

Из сферног троугла P_1PS (сл. 110), где је $SP_1P = 90^{\circ} - L$, $P_1S = 90^{\circ} - l$, $P_1P = \alpha$, $P_1PS = 90^{\circ} + r$, $P_1SP = w$, сљедује (№ 172)

$$tg\,\frac{1}{2}\,(90^{\circ} + r + w) = \frac{cos\,\frac{1}{2}\,(90^{\circ} - l - \alpha)}{cos\,\frac{1}{2}\,(90^{\circ} - l + \alpha)}\,cotg\,\frac{1}{2}(90^{\circ} - L)$$

$$tg\,\frac{1}{2}\,(90^{\circ} + r - w) = \frac{sin\,\frac{1}{2}\,(90^{\circ} - l - \alpha)}{sin\,\frac{1}{2}\,(90^{\circ} - l + \alpha)}\,cotg\,\frac{1}{2}(90^{\circ} - L)$$

ови обрасци дају r и w.

Задатци.

1°. Географска ширина Београда јесте 44° 50′ 15″ (по некима 44° 48′ 0″); да се нађе трајање најдужег дана, најдуже ноћи: *a*) кад се преламање светлости неузима и *b*) кад се оно узима у обзир.

2°. Колико траје сутон у Београду при највећој северној и јужној деклинацији сунца.

3°. Најдужи је дан на једном месту 18 часова; колика је његова географска ширина.

4°. Ректасцензија је сунца 316°, косина еклиптике 23° 37′ 28″; да се нађе деклинација сунца.

5°. Деклинација је сунца северна и има 20° 15′ 37″; колика је ректасцензија. (Добијају се две вредности. Зашто.)

6°. Колика је ректасцензија сунца, кад је оно између летње солстиције и јесење равнодневице, и кад је деклинација његова 20° 13′.

7°. Колика је деклинација сунца, кад је оно у 20-ом степену лава. (Најпре треба знати дужину L сунца, па затим се послужити обрасцем задатка 2°) у № 265.)

8°. Јужна деклинација сунца између зимње солстиције и пролетње равнодневице има 12° 20′, да се нађе ректасцензија сунца и знак, у коме се оно налази.

9°. Висина сунца у меридијану износи 51° 20′, а три часа доцније 37° 55′; да се нађе његова деклинација и географска ширина места посматрања. (№ 265. зад. 5).

10°. Висина сунца на једном месту била је у два и по часа 31° 22′, а два часа доцније 20° 16′; да се нађе деклинација сунца и географска ширина места.

11°. Ректасцензија једне звезде има 48° 25′ 37″, јужна деклинација његова 29°55′46″, косина еклиптике 23°27′28″; да се одреди положај звезде према еклиптици.

12°. Дужина једне звезде има 172° 44′ 16″, а ширина (северна) 18° 20′; да јој се нађе ректасцензија.

13°. Географска ширина једног места је 48° 50′ 20″, деклинација једне звезде (јужна) 12° 14′, а њен часовни угао 50° 27′ 18″; да се нађе азимут и зенитна даљина звезде.