التمرين 01

نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\left(2x^2-3x\right)e^x$ وليكن $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أحسب $f'(x)$ وانجز جدول تغيرات الدالة f

3) أوجد تقاطع المنحني $\left(C_f\right)$ مع محور الفواصل

4) أنشئ $\left(C_f\right)$.

5) نعتبر المعادلة التفاضلية $E: y''-2y'+y=4e^x$. بين أن f حل للمعادلة E .

6) استنتج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$

α عدد حقيقي سالب تماما . أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحصور بين المنحني $\left(C_f\right)$ ومحور الفواصل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$ ، $x=\alpha$ ثم أحسب $\lim\limits_{\alpha\to-\infty} A(\alpha)$

حل التمرين رقم 01 :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^2e^x-3xe^x\right)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x^2e^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 3xe^x=0,$

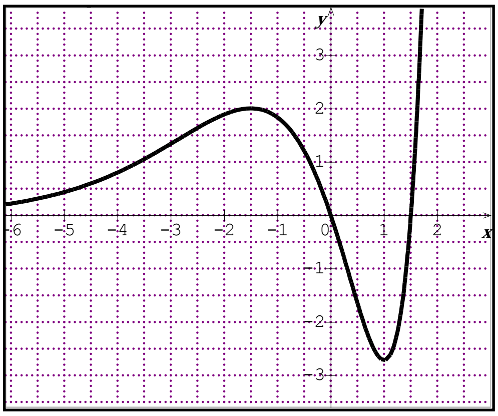
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^2-3x\right)e^x=+\infty$

1) f قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=(2x^2+x-3)e^x=\left(2x+3\right)\left(x-1\right)e^x$

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$f(-\frac{3}{2})$	↘	$-e$	↗	$+\infty$

3) المنحني $\left(C_f\right)$ يقطع محور الفواصل في نقطتين $O(0,0)$, $A(\frac{3}{2},0)$.

4) إنشاء المنحني $\left(C_f\right)$ $f(-\frac{3}{2})\approx 2,01$



5) المعادلة التفاضلية $E: y''-2y'+y=4e^{x}$. نبين أن f حل للمعادلة E .

لدينا : $f(x)=\left(2x^{2}-3x\right)e^{x}$ ، $f'(x)=(2x^{2}+x-3)e^{x}$ و $f''(x)=(2x^{2}+5x-2)e^{x}$

$$f''(x)-2f'(x)+f(x)=(2x^{2}+5x-2)e^{x}-2(2x^{2}+x-3)e^{x}+\left(2x^{2}-3x\right)e^{x}=4e^{x}$$

ومنه f حل للمعادلة E .

6) استنتاج دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$

الدالة F تحقق $f'(x)-2f(x)+F(x)=4e^{x}$ ومنه $F(x)=4e^{x}-f'(x)+2f(x)$

ومنه $F(x)=(2x^{2}-7x+7)e^{x}$

7)

$$A(\alpha)=\int_{\alpha}^{0}f(x)dx=\left[(2x^{2}-7x+7)e^{x}\right]_{\alpha}^{0}=7+(-2\alpha^{2}+7\alpha-7)e^{\alpha}$$

$$\lim_{\alpha\to-\infty}A(\alpha)=7$$

التمرين رقم 02:

(u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بحدها العام : $u_n=\dfrac{n^{2}}{2^{n}}$.

1) من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع $v_n=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا : $v_n=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2}$ واستنتج $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$.

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم لدينا : $v_n>\dfrac{1}{2}$.

ت) بين أنه إذا كان $n \geq 5$ فإن : $v_n < \frac{3}{4}$.

ث) بين أنه إذا كان $n \geq 5$ فإن : $u_{n+1} < \frac{3}{4}u_n$.

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$: $S_n = u_5 + u_6 + ... + u_n = \sum_{k=5}^{k=n} u_k$ ونريد إثبات أن المتتالية $(S_n)_{n\geq 5}$ متقاربة.

أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$: $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}.u_5$.

ب) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$: $S_n \leq \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + ... + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right].u_5$.

ت) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$: $S_n \leq 4u_5$.

ث) أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\geq 5}$ متزايدة واستنتج أنها متقاربة.

حل التمرين رقم 02:

1) لدينا

$$u_n = \frac{n^2}{2^n} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

أ)

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} = u_{n+1} \times \frac{1}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n^2} = \frac{2^n}{2^{n+1}} \times \frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

$n+1 \geq 5$

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

لدينا $\frac{1}{n} > 0$ ومنه $1 + \frac{1}{n} > 1$ إذن $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 > 1^2$ لأن الدالة مربع متزايدة تماما على $[0 , +\infty[$.

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 > 1^2$ بضرب الطرفين $\times \frac{1}{2}$ نحصل على $\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 > \frac{1}{2}$ أي $v_n > \frac{1}{2}$.

ب) إذا كان $n \geq 5$ فإن $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{5}$ ومنه $1+\frac{1}{n} \leq 1+\frac{1}{5}$ أي $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq \left(\frac{6}{5}\right)^2$ وبالتالي

$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{1}{2}\times\frac{36}{25}$ أي $v_n \leq \frac{36}{50}$ وبما أن $\frac{36}{50}<\frac{3}{4}$ ومنه $v_n \leq \frac{3}{4}$.

ت) لدينا فرضا $v_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}$ وحسب ما سبق $v_n \leq \frac{3}{4}$ وبالتالي $\frac{u_{n+1}}{u_n}<\frac{3}{4}$ أي $u_{n+1}<\frac{3}{4}u_n$ لأن $u_n>0$.

2) لدينا : $S_n=u_5+u_6+.....+u_n=\sum_{k=5}^{k=n}u_k$

أ) من أجل $n=5$ لدينا $\left(\frac{3}{4}\right)^{5-5}=1$ ومنه $u_5 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{5-5}.u_5$ صحيحة من أجل $n=5$.

نفرض أنها صحيحة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$ أي $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}.u_5$ ونبرهن على صحتها من

أجل $n+1$. لدينا مما سبق $u_{n+1}<\frac{3}{4}u_n$ ومنه $u_{n+1}<\frac{3}{4}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}.u_5\right)$ حيث $n+1>5$ أي

$u_{n+1}<\left(\frac{3}{4}\right)^{(n+1)-5}.u_5$ وأخيرا من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$: $u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-5}.u_5$.

ب) أثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$: $S_n \leq \left[1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+......+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right].u_5$.

لدينا : $S_n=u_5+u_6+.....+u_n$ ومن السؤال السابق نستنتج :

$u_5 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{5-5}.u_5$, $u_6 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{6-5}.u_5$, $u_7 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{7-5}.u_5$, $u_8 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{8-5}.u_5$, ... وبالتالي :

$S_n \leq \left[1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+......+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right].u_5$.

ت) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 5$: $S_n \leq 4u_5$.

لدينا $1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+......+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}=4\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$.

ولكن $1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\leq 1$ ومنه $1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^{2}+......+\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\leq 4$ أي $S_n\leq 4u_5$.

ث) أثبات أن المتتالية $\left(S_n\right)_{n\geq 5}$ متزايدة واستنتاج أنها متقاربة .

لدينا $S_{n+1}=u_5+u_6+........+u_n+u_{n+1}$ ومنه $S_{n+1}=S_n+u_{n+1}$ من أجل $n\geq 5$

ومنه $S_{n+1}-S_n\geq 0$ لأن $u_{n+1}\geq 0$. وبالتالي المتتالية $\left(S_n\right)_{n\geq 5}$ متزايدة.

بما أن المتتالية $\left(S_n\right)_{n\geq 5}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

التمرين رقم 03 :

من أجل كل عدد مركب $z\neq -1$ نضع $Z=\dfrac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$.

$z=x+iy$ و $Z=X+iY$ حيث $x\,;y\,;X\,;Y$ أعداد حقيقية.

1) عبر عن الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للعدد المركب Z بدلالة x و y .

2) عين E مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حتى يكون Z حقيقيا.

3) عين F مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حتى يكون Z تخيليا صرفا.

حل التمرين رقم 03 :

$$Z=\frac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}=\frac{2+x-iy}{1+x-iy}=\frac{2+x-iy}{1+x-iy}\times\frac{2+x+iy}{1+x+iy}$$

$$X=\frac{x^2+y^2+3x-2}{1+x^2+y^2}\ ;Y=\frac{y}{1+x^2+y^2}$$

1) يكون Z حقيقيا إذا كان $\begin{cases} y=0 \\ x,y\neq -1,0\end{cases}$ E هي محور الفواصل باستثناء النقطة $A(-1,0)$.

2) Z تخيليا صرفا إذا كان $\begin{cases} x^2+y^2+3x-2 \\ x,y\neq -1,0\end{cases}$ أي $\begin{cases}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4} \\ x,y\neq -1,0\end{cases}$ F هي دائرة مركزها النقطة $\omega\left(-\frac{3}{2};0\right)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$ باستثناء النقطة $A(-1,0)$.

التمرين رقم 04:

المستوي المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

أنشئ النقط A ، B ، I التي لواحقها على الترتيب :

$z_A = 3+2i$ ، $z_B = -3$ ، $z_I = 1-2i$.

1) علم النقط السابقة في المعلم ثم نكمل قي بقية التمرين.

2) أكتب على الشكل الجبري العدد المركب $Z = \dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$. ما هي طبيعة المثلث IAB ؟.

3) أحسب اللاحقة Z_C للنقطة C ، صورة النقطة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 .

4) لتكن النقطة D مرجح الجملة $(A,1);(B,-1);(C,1)$ أحسب اللاحقة z_D للنقطة D.

5) بين أن $ABCD$ مربع.

6) عين وانشئ Γ_1 مجموعة النقط M من المستوي بحبث :

$$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$$

7) لتكن Γ_2 مجموعة النقط M من المستوي بحبث : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$

- بين أن النقطة B تنتمي إلى Γ_2.
- عين وانشئ Γ_2.

حل التمرين رقم 04:

2) $$Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = \frac{(1-2i)-(3+2i)}{(1-2i-(-3))} = \frac{-2-4i}{4-2i} = -i$$

لدينا من جهة : $\dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = -i$ وبالتالي : $\left|\dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B}\right| = \dfrac{AI}{BI} = |-i| = 1$ أي $AI = BI$

ولدينا من جهة أخرى : $\dfrac{z_I - z_A}{z_I - z_B} = -i$ وبالتالي :

$$\arg\left(\frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \text{ أي } \overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{IB}$$

إذن المثلث IAB قائم في I ومتساوي الساقين .

3) لاحقة النقطة C

C صورة I بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته 2 معناه $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ أي

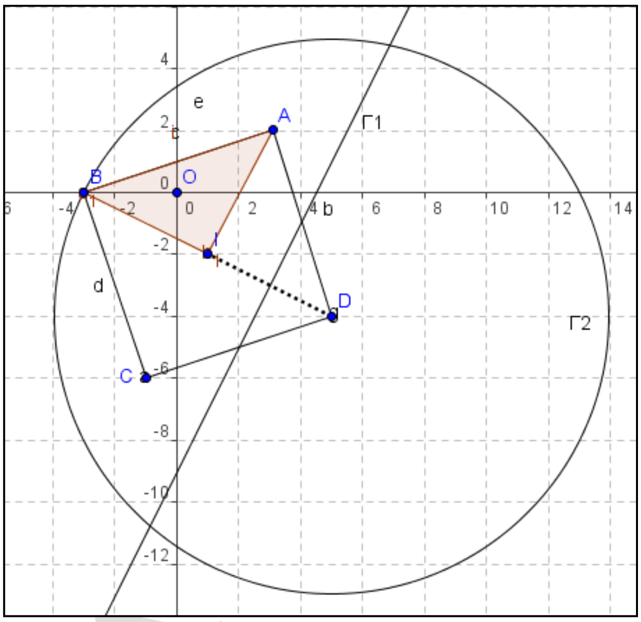
$z_C - z_A = 2(z_I - z_A)$

ومنه $z_C = z_A + 2(z_I - z_A)$ أي $z_C = 3 + 2i + 2(2 - 4i) = -1 - 6i$.

4) النقطة D مرجح الجملة $A,1\ ;B(,-1);C(,1)$ معناه $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ أي

$(z_A - z_D) - (z_B - z_D) + (z_C - z_D) = 0$ ومنه: $-z_D + z_A - z_B + z_C = 0$ وبالتالي

$z_D = z_A - z_B + z_C = \ 3 + 2i\ -\ -3\ +\ -1 - 6i\ = 5 - 4i$



5) طبيعة $ABCD$.

لاحقة $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A = -3 -\ 3 + 2i\ = -6 - 2i$

لاحقة $\overrightarrow{DC}$ هي $z_C - z_D =\ -1 - 6i\ -\ 5 - 4i\ = -6 - 2i$ ومنه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ إذن $ABCD$

متوازي الأضلاع. بالإضافة إلى ذلك:

لاحقة $\overrightarrow{AD}$ هي $z_D - z_A =\ 5 - 4i\ -\ 3 + 2i\ = 2 - 6i$

بما أن $i^2 = -1$ يمكن كتابة $z_D - z_A = 2 - 6i$ على الشكل

$z_D - z_A = i\ -6 - 2i\ = i(z_B - z_A)$

أي $z_D - z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}\ z_B - z_A$ وهذا يعني أن النقطة D هي صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$. وأخيرا $ABCD$ متوازي الأضلاع فيه ضلعان متتاليان متقايسان ومتعامدان فهو إذن مربع.

6) Γ_1 مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$

لدينا : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$ لأن D مرجح الجملة $A,1\ ;B(,-1);C(,1)$

وكذلك $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MJ}$ حيث J هو منتصف القطعة المستقيمة AC إذن :

$\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MD}\right\| = \frac{1}{2}\left\|2\overrightarrow{MJ}\right\|$ أي $\left\|\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MJ}\right\|$

ولدينا لاحقة J هي : $z_J = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{3+2i\ -1-6i}{2} = 1-2i\ = z_I$ إذن I هي منتصف AC

$\left\|\overrightarrow{MD}\right\| = \left\|\overrightarrow{MJ}\right\|$ تكافئ إذن $MD = MI$ وأخيرا مجموعة النقط Γ_1 هي محور القطعة المستقيمة ID.

7) B تنتمي إلى Γ_2 مجموعة النقط M من المستوي بحيث : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$

نعوض M بالنقطة B فنجد في الطرف الأول : $\left\|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{BD}\right\|$

لأن $ABCD$ مربع فهو متوازي أضلاع.ولكن $\left\|\overrightarrow{BD}\right\| = |z_D - z_B| = |5-4i\ +3| = |8-4i| = 4\sqrt{5}$

ومنه B تنتمي إلى Γ_2.

تعيين Γ_2 : $\left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}$ تكافئ $\left\|\overrightarrow{MD}\right\| = MD = 4\sqrt{5}$ لأن D مرجح الجملة $A,1\ ;B(,-1);C(,1)$ وبالتالي Γ_2 هي الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها $4\sqrt{5}$

التمرين رقم 05:

الجزء الأول :

f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=1+x-e^{-\frac{x}{2}}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. الوحدة : $2cm$.

1) أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

2) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني عند $+\infty$.

3) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (D).

4) أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f وانجز جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$.

5) أنشئ (D) و (C_f).

الجزء الثاني :

n عدد طبيعي غير معدوم ، A_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (D) وبالمستقيمين : $x=n$ و $x=n+1$.

1) شطب على المنحني الحيز المعرف سابقا من أجل $n=2$ ثم بين أن المتتالية (A_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول A_1.

2) عبّر بدلالة n عن المجموع $S_n=A_1+A_2+A_3+..........+A_n$

3) ماذا يمثل S_n بيانيا .

4) أحسب نهاية المتتالية (S_n).

حل التمرين رقم 05:

الجزء الأول :

1) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

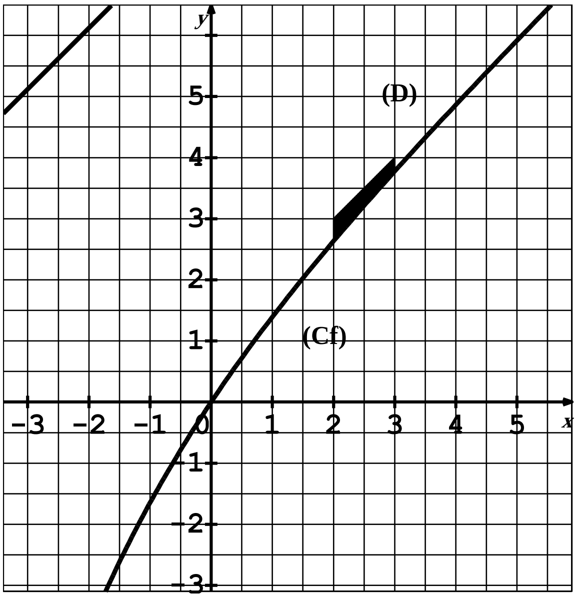
بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{2}}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

2) بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^{-\frac{x}{2}}=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=$ فإن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل للمنحني عند $+\infty$.

3) لدراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (D) ندرس إشارة الفرق $f(x)-(x+1)$

لدينا $f(x)-(x+1)=-e^{-\frac{x}{2}}$ ومنه $[f(x)-(x+1)]<0$ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ وبالتالي (C_f) يقع تحت (D) من أجل كل $x\in\mathbb{R}$.

4) f قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x)=1+\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$ وهي موجبة تماما على $\mathbb{R}$



x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

الجزء الثاني :

1) من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ لدينا : $A_n=\int_n^{n+1}\left[(x+1)-f(x)\right]dx=\int_n^{n+1}e^{-\frac{x}{2}}dx=-2\left[e^{-\frac{n+1}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\right]$

ونحصل على $A_n=2\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$

و $A_{n+1}=2\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}A_n$ وذا يعني أن (A_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{\sqrt{e}}$ وحدها الأول $A_1=\frac{2}{\sqrt{e}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

(2 $S_n=A_1+A_2+A_3+..........+A_n=\frac{A_1(1-q^n)}{1-q}==\frac{2}{\sqrt{e}}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n\right)$

3) بيانيا يمثل S_n مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم (D) وبالمستقيمين : $x=1$ و $x=n+1$.

4) **حساب نهاية المتتالية** (S_n). بما أن $\frac{1}{\sqrt{e}} \in]0,1[$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n = 0$ ومنه نستنتج أن $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{\sqrt{e}}$.

التمرين رقم 06:

المستوي منسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O\ ;\vec{u}\ ;\vec{v})$. ولتكن (C) الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1. نعتبر النقطة A من الدائرة (C) لاحقتها $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1) أ) عين اللاحقة z_B للنقطة B صورة A بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

ب) عين اللاحقة z_C للنقطة C صورة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$.

2) أ) تحقق من أن الدائرة (C) محيطة بالمثلث ABC. أنشئ النقط $A\ ;B\ ;C$.

ب) ما هي طبيعة المثلث ABC؟

3) ليكن h التحاكي الذي مركزه O ونسبته -2.

أ) أكمل الشكل بإنشاء النقط $P\ ;Q$ و R صور $A\ ;B$ و C على الترتيب بالتحاكي h.

ب) ما هي طبيعة المثلث PQR؟

4) أ) أعط الصيغة المركبة للتحاكي h.

ب) أحسب $z_A + z_B + z_C$ واستنتج أن A هي منتصف $[QR]$.

ج) ماذا يمثل المستقيم (QR) بالنسبة إلى الدائرة (C)؟

ح) أوجد معادلة (Γ) صورة الدائرة (C) بهذا التحاكي.

المجموعة (E_2) هي سطح كرة مركزها H ونصف قطرها $\sqrt{29}$.

حل التمرين رقم 06

1) أ) العبارة المركبة للدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ هي $z' = e^{i\frac{2\pi}{3}}z$ ومنه

$$z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}}z_A = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1$$

ب) $z_C = e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}} \times e^{i\pi} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \overline{z_A} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

نستنتج أن A و C متناظرتان بالنسبة لمحور الأعداد الحقيقية.

2) أ) لدينا $|z_A|=|z_B|=|z_C|=1$ أي $OA=OB=OC=1$ وهذا يعني أن النقط $A\ ;B\ ;C$ تنتمي للدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 1 أي للدائرة (C) .

ب) طبيعة المثلث ABC:

من السؤال 1) B صورة A بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ نستنتج أن $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{2\pi}{3}$

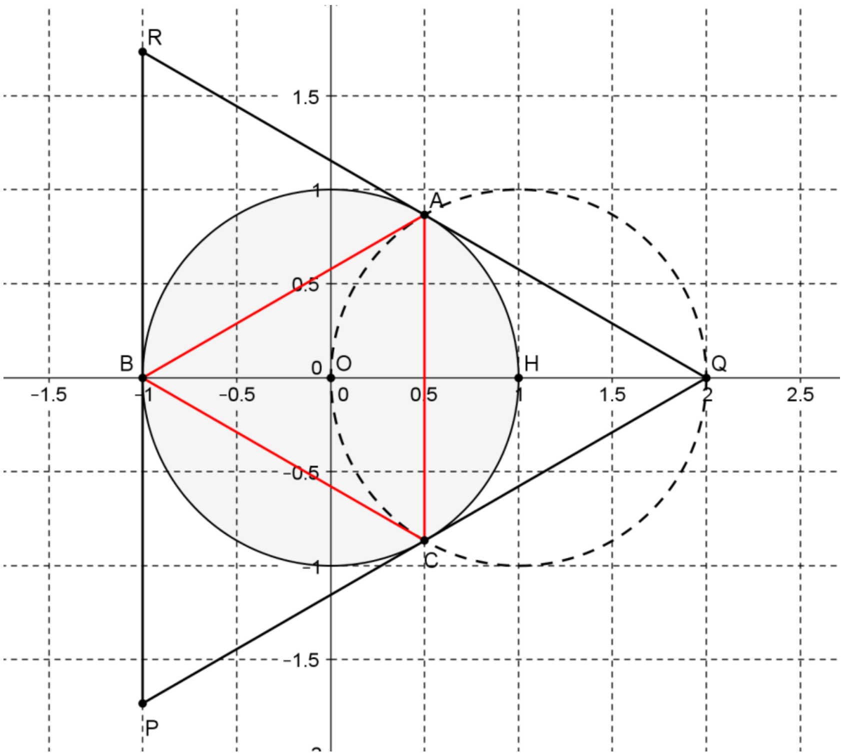
وكذلك C صورة B بالدوران r الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ نستنتج $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=\frac{2\pi}{3}$.

باستعمال علاقة شال نستنتج أن $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA})=\frac{2\pi}{3}$.

المثلثات OAB و OBC و OCA مثلثات متساوية الساقين رأسها O و $\frac{2\pi}{3}$ هي قيس زاوية الرأس O

ومنه الزاويتين الباقيتين متقايستين وقيسهما $\frac{\pi}{3}$. ومنه المثلث ABC متقايس الأضلاع.

3) أ) الشكل



ب) المثلثان PQR و ABC متحاكيان ومنه المثلث PQR متقايس الأضلاع كذلك.

4) أ) الصيغة المركبة للتحاكي h هي : $z'=-2z$.

ب) $z_A+z_B+z_C=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

$z_A+z_B+z_C=0$ معناه $z_A=-z_B-z_C$ ولكن $z_Q=-2z_B$ أي $-z_B=\frac{1}{2}z_Q$ ولدينا كذلك $z_R=-2z_C$ أي $-z_C=\frac{1}{2}z_R$ إذن $z_A=-z_B-z_C=\frac{1}{2}z_Q+\frac{1}{2}z_R=\frac{z_Q+z_R}{2}$ وهذا يعني أن A هي منتصف $[QR]$.

ج) من تعريف التحاكي تكون النقط $P\ ;\ O$ و A في استقامية. المستقيم (PA) هو محور المثلث PQR وهو ارتفاع كذلك ومنه (OA) عمودي على (QR).

وأخيرا المستقيم (QR) هو مماس للدائرة (C) في النقطة A.

التمرين رقم 07:

في كل سؤال يوجد جواب واحد فقط صحيح من بين الإجابات المقترحة. حدد الإجابة الصحيحة مع التبرير.

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O\ ;\vec{i}\ ;\vec{j}\ ;\vec{k}\right)$ النقطتين $A(1\ ;2\ ;3)$ ، $B(2;-3,1)$ والمستوي (P) الذي معادلته $x+3y-z+7=0$.

01: مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=3$ هي:

أ) مستوي ، ب) سطح كرة ، ج) مجموعة خالية.

02 : إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P) هي:

أ) $(2\ ;-3\ ;0)$ ، ب) $(0\ ;-1\ ;4)$ ، ج) $(-2\ ;1;\ 5)$.

03: إذا كانت (S) سطح كرة مركزها النقطة A ونصف قطرها $\sqrt{10}$ فإن:

أ) (S) يقطع المستوي (P) وفق دائرة ، ب) (S) مماس للمستوي (P) ، ج) (S) لا تقطع للمستوي (P)

04: إذا كان المستقيم (d) يشمل النقطة B و $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ شعاع توجيه له وكان $\begin{cases}x=3+t\\y=-1+2t\\z=2-t\end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$ هو تمثيل وسيطي للمستقيم (d') فإن المستقيمين (d) و (d'):

أ) متوازيان ، ب) متقاطعان ، ج) ليسا من نفس المستوي.

05: مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية البعد عن النقطتين A و B هي:

أ) المستقيم $(\Delta):\begin{cases} x=\frac{3}{2}-t \\ y=-\frac{1}{2}+5t \\ z=2+2t \end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$ ، ب) المستوي (P) الذي معادلته $x-5y+z-6=0$

ج) المستوي (P') الذي معادلته $x-5y-2z=0$.

حل التمرين رقم 07:

1) مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\|=3$: **الإجابة الصحيحة هي ب)**

التبرير: ليكن G مرجح الجملة $\{(A\ ;\ 3)\ ,(B\ ;-1)\}$ إذن $\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\|=3$ تكافئ $\|2\overrightarrow{MG}\|=3$ أي $MG=\frac{3}{2}$ وبالتالي مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\|=3$ هي سطح كرة مركزها G ونصف قطرها $\frac{3}{2}$.

2) إحداثيات النقطة H المسقط العمودي للنقطة A على المستوي (P): **الإجابة الصحيحة هي ب)**

التبرير:ليكن المستقيم (Δ) العمودي على (P) والمار من A. فتكون النقطة H هي نقطة تقاطع المستقيم (Δ) والمستوي (P).

نجد تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) الذي يشمل A و $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix}$ شعاع توجيه له

إذن : $(\Delta):\begin{cases} x=1+t \\ y=2+3t \\ z=3-t \end{cases}$ حيث $t\in\mathbb{R}$

تقاطع (Δ) و (P) نحل الجملة $\begin{cases} x=1+t \\ y=2+3t \\ z=3-t \\ x+3y-z+7=0 \end{cases}$ فنجد $t=-1$ ومنه $H(0\ ;-1\ ;\ 4)$

3) الوضعية النسبية لـ (S) والمستوي (P): **الإجابة الصحيحة هي ج)**

التبرير: $d(A\,;(P))=\sqrt{11}$ إذن $\sqrt{11}>\sqrt{10}$ (S) لا تقطع للمستوي (P) .

4) الإجابة الصحيحة هي ج)

التبرير:

لدينا $(\Delta'):\begin{cases} x=3+t' \\ y=-1+2t'\ ;\ t'\in\mathbb{R} \\ z=2-t' \end{cases}$ و $(\Delta):\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3-t\ ;\ t\in\mathbb{R} \\ z=1+3t \end{cases}$

شعاعا التوجيه $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ و $\vec{u'}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ غير مرتبطين خطيا وبالتالي (d) و (d') غير متوازيان فهما إما متقاطعان أو لا ينتميان إلى نفس المستوي.

نحل الجملة $\begin{cases}2+2t=3+t'\\-3-t=-1+2t'\end{cases}$ نجد $\begin{cases}t=0\\t'=-1\end{cases}$

النقطة من (d) من أجل $t=0$ هي $(2\,;-3\,;1)$ و النقطة من (d') من أجل $t'=-1$ هي $(2\,;-3\,;3)$ وبالتالي فهما لا ينتميان إلى نفس المستوي.

5) الإجابة الصحيحة هي ج

مجموعة النقط M من الفضاء المتساوية البعد عن النقطتين A و B هي المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ يشمل منتصف $[AB]$ أي يشمل النقطة $I\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};2\right)$ وشعاعه الناظمي $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-5\\-2\end{pmatrix}$ وبالتالي معادلته $x-5y-2z=0$.

التمرين رقم 08:

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان كما يلي:

$\begin{cases}u_0=0\\v_0=12\end{cases}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $\begin{cases}u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}\\v_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}\end{cases}$

1) نعرف متتالية (w_n) من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي: $w_n=v_n-u_n$.

أ) بين أن المتتالية (w_n) هي متتالية هندسية يطلب تعيين حدها الأول وأساسها.

ب) عبّر عن w_n بدلالة n واحسب نهايتها.

2) بين أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

3) بين أنّ المتتالية (t_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $t_n=2u_n+3v_n$ هي متتالية ثابتة.

4) لتكن l هي النهاية المشتركة للمتتاليتين (u_n) و (v_n)، عين قيمة l .

حل التمرين رقم 08:

أ) $w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{u_n+2v_n}{3}-\dfrac{u_n+v_n}{2}=\dfrac{1}{6}(v_n-u_n)=\dfrac{1}{6}w_n$.

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{6}$ وحدها الأول $w_0=v_0-u_0=12$

ب) $w_n=12\left(\frac{1}{6}\right)^n$. لدينا $0<\frac{1}{6}<1$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\lim\limits_{n\to+\infty}12\left(\frac{1}{6}\right)^n=0$

2) نبين أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

- تغيرات (u_n): $u_{n+1}-u_n=\frac{u_n+v_n}{2}-u_n=\frac{v_n-u_n}{2}=\frac{1}{2}w_n=6\left(\frac{1}{6}\right)^n$

إذن $u_{n+1}-u_n>0$ ومنه المتتالية (u_n) متزايدة .

- تغيرات (v_n): $v_{n+1}-v_n=\frac{u_n+2v_n}{3}-v_n=\frac{u_n-v_n}{3}=-\frac{1}{3}w_n=-4\left(\frac{1}{6}\right)^n$

إذن $v_{n+1}-v_n<0$ ومنه المتتالية (v_n) متناقصة.

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=0$

وأخيرا المتتاليتان (u_n) و (v_n) متجاورتان.

3) لدينا $t_{n+1}-t_n=2u_{n+1}+3v_{n+1}-2u_n-3v_n=0$ ومنه المتتالية (t_n) هي ثابتة.

4) باستعمال النهايات $2l+3l=t_0=36$ ومنه $l=\frac{36}{5}$.

التمرين رقم 09:

الدالة العددية f معرفة على المجال I حيث $I=]-2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=1+x\ln(x+2)$

C_f تمثيلها البياني في المستوي المزوّد بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) أحسب $f'(x)$ و $f''(x)$ من أجل كلّ عدد من I.

ب) عيّن إشارة $f''(x)$ ثمّ استنتج وجود عدد حقيقي وحيد α من المجال $]-0,6;-0,5[$ بحيث $f'(\alpha)=0$.

2) أدرس تغيّرات الدالة f .

3) بيّن أنّ $f(\alpha)=\frac{\alpha+2-\alpha^2}{\alpha+2}$ ثمّ استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

4) A نقطة من C_f فاصلتها x_0 و T المماس للمنحني C في A.

أ) بيّن أنّ T يمرّ بالمبدأ O إذا وفقط إذا كان $f(x_0)=x_0f'(x_0)$.

ب) استنتج وجود مماسين T_1 و T_2 يمرّان بالمبدأ O. أكتب معادلتي T_1 و T_2 .

5) أرسم المماسين T_1 و T_2 ثمّ المنحني C_f .

حل التمرين رقم 09:

1) أ) $f'(x)=\ln(x+2)+\frac{x}{x+2}$ و $f''(x)=\frac{x+4}{(x+2)^2}$

ب) $f''(x)$ موجبة تماما على $]-2;+\infty[$ ومنه f' متزايدة تماما على المجال $]-2;+\infty[$.

لدينا $f'(-0,5)=0,072$ و $f'(-0,6)=-0,09$

f' مستمرة ورتيبة تماما على $]-2;+\infty[$ وخصوصا على المجال $]-0,6;-0,5[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α من المجال $]-0,6;-0,5[$ بحيث $f'(\alpha)=0$

2) تغيّرات f :

$\lim_{x\to -2} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

جدول التغيّرات:

x	-2		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3)

لدينا $f'(x)=\ln(x+2)+\frac{x}{x+2}$ و $f'(\alpha)=0$ أي $\ln(\alpha+2)+\frac{\alpha}{\alpha+2}=0$ ومنه

$\ln(\alpha+2)=-\frac{\alpha}{\alpha+2}$ هذا من جهة ولدينا من جهة أخرى $f(x)=1+x\ln(x+2)$ وبالتالي

$$f(\alpha)=1+\alpha\ln(\alpha+2)=1+\alpha\left[-\frac{\alpha}{\alpha+2}\right]=\frac{-\alpha^2+\alpha+2}{\alpha+2}$$

حصر $f(\alpha)$: نجد $0,8<f(\alpha)<0,7$

4) أ) معادلة المماس (T) عند x_0 : $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ أي

$y=f'(x_0)x-x_0f'(x_0)+f(x_0)$. (T) يشمل المبدأ $O(0,0)$ إذا وفقط إذا كانت هذه المعادلة تكتب على الشكل $y=f'(x_0)x$ أي $-x_0f'(x_0)+f(x_0)=0$ ومنه

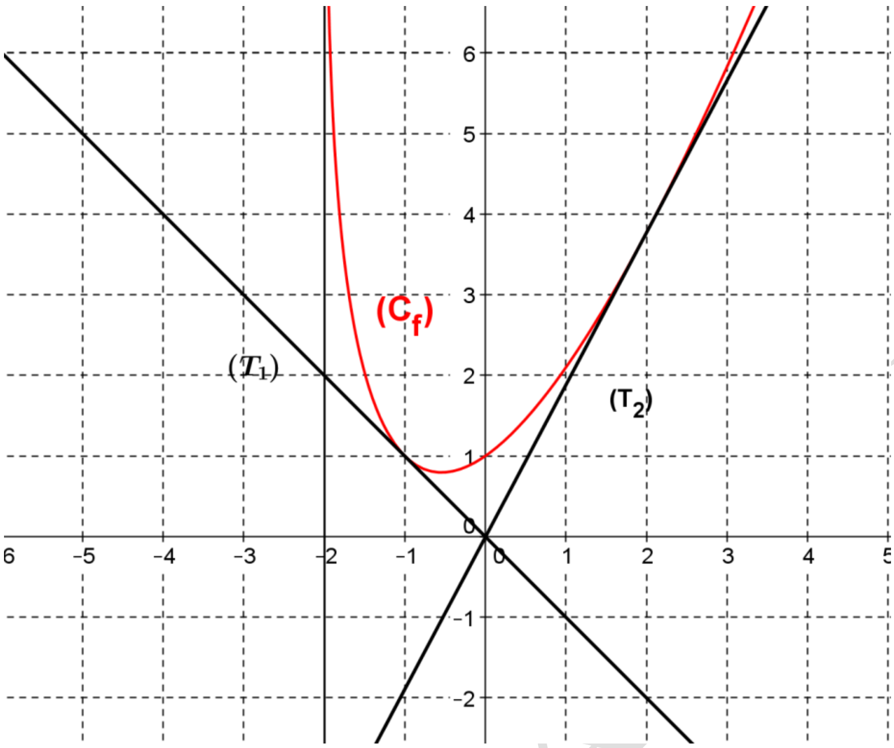
$f(x_0)=x_0f'(x_0)$

ب) $f(x_0)=x_0f'(x_0)$ تكافئ $1+x_0\ln(x_0+2)=x_0\ln(x_0+2)+\frac{x_0^2}{x_0+2}$

ومنه $x_0^2-x_0-2=0$ أي $x_0=2$ أو $x_0=-1$

ومنه معادلتا المماسين: $(T_1): y=\left(\ln 4+\frac{1}{2}\right)x$ و $(T_2): y=-x$

5) الرسم



التمرين رقم 10

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n + 2}$

1) عين عددين حقيقيين a و b بحيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = a + \dfrac{b}{u_n + 2}$

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leq 4$.

3) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 = \dfrac{2(u_n - 1)}{u_n + 2}$

4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - 1 < \dfrac{2}{3}(u_n - 1)$

5) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 1 \leq 3\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

6) استنتج نهاية المتتالية (u_n)

حل التمرين رقم 10 :

1) من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n + 2} = \dfrac{3u_n + 6 - 6}{u_n + 2} = \dfrac{3u_n + 6}{u_n + 2} - \dfrac{6}{u_n + 2} = 3 - \dfrac{6}{u_n + 2}$

أي $a = 3$ و $b = -6$.

2) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $1 < u_n \leq 4$.

- الخاصية $1 < u_n \leq 4$ صحيحة من أجل $n = 0$ لأن $u_0 = 4$ و $1 < u_0 \leq 4$

- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $1 < u_n \leq 4$ ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ أي نبرهن أن $1 < u_{n+1} \leq 4$
- لدينا $1 < u_n \leq 4$ ومنه $3 < u_n + 2 \leq 6$ وكذلك نأخذ المقلوب $\frac{1}{6} < \frac{1}{u_n+2} \leq \frac{1}{3}$

بضرب في (-6) نحصل على $\frac{-6}{6} \leq \frac{-6}{u_n+2} < \frac{-6}{3}$ أي $-2 < \frac{-6}{u_n+2} \leq -1$

نضيف العدد 3 نحصل على : $1 < 3 - \frac{6}{u_n+2} \leq 2$ فهي كذلك تحقق $1 < 3 - \frac{6}{u_n+2} \leq 4$

أي

$1 < u_{n+1} \leq 4$ وهو المطلوب إذن الخاصية $1 < u_n \leq 4$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n

.

3) $u_{n+1} - 1 = \frac{3u_n}{u_n+2} - 1 = \frac{3u_n - u_n - 2}{u_n+2} = \frac{2(u_n-1)}{u_n+2}$

4) من أجل كل عدد طبيعي n : لدينا : $1 < u_n \leq 4$ ومنه $3 < u_n + 2 \leq 6$ وبالتالي :

$\frac{2}{3} < \frac{2}{u_n+2} \leq \frac{2}{6}$ نضرب في $(u_n - 1)$ الذي هو موجب تماما $(1 < u_n \leq 4)$ نحصل على

$\frac{2(u_n-1)}{3} < \frac{2(u_n-1)}{u_n+2} \leq \frac{1}{3}(u_n-1)$ ولكن وجدنا سابقا $u_{n+1} - 1 = \frac{2(u_n-1)}{u_n+2}$ إذن :

$u_{n+1} - 1 < \frac{2(u_n-1)}{3}$

5) نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 1 \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

الخاصية $u_n - 1 \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ صحيحة من أجل $n=0$ لأن $u_0 = 4$ و $3 = 3\times1 = u_0 - 1 = 3\left(\frac{2}{3}\right)^0$

أي $u_0 - 1 \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^0$

- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $u_n - 1 \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ ونبرهن على صحتها من

أجل $n+1$ أي نبرهن أن $u_{n+1} - 1 \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

لدينا : $u_n - 1 \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ نضرب في $\frac{2}{3}$ نحصل على $\frac{2}{3}(u_n-1) \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

و بما أن $u_{n+1} - 1 < \frac{2(u_n-1)}{3}$ (حسب السؤال الرابع) فإن: $(u_{n+1} - 1) \leq 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

وأخيرا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n - 1 \le 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

1) استنتاج نهاية المتتالية (u_n) : نعلم مما سبق أن $u_n > 1$ ومنه $u_n - 1 > 0$ وحسب السؤال الخامس

$u_n - 1 \le 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$ إذن $0 < u_n - 1 \le 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

بما أن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - 1) = 0$ وبالتالي $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

التمرين رقم 11

f الدالة المعرفة كما يلي : $f(x) = (x+1)\ln|x-3|$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1) عين مجموعة التعريف D_f للدالة f

2) بين أنه من أجل كل x من D_f : $f'(x) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$

3) أحسب $f''(x)$ واستنتج تغيرات f' .

4) أنجز جدول تتغيرات f'

5) بين أن f' تنعدم عند قيمة واحدة α على $]-\infty, 3[$

6) أدرس إشارة f' حسب قيم x

7) أنجز جدول تغيرات الدالة f ثم بين أن $f(\alpha) = -\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha+3}$

8) عين معادلة للمستقيم المقارب للمنحني (C_f) ثم انشئ (C_f) نأخذ $\alpha \approx 0,78$ و $f(\alpha) = 1,42$

حل التمرين رقم 11 :

1) الدالة f معرفة من أجل $x \ne 3$ أي $D_f =]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$

2) f قابلة الإشتقاق على كل من $]-\infty, 3[$ و $]3, +\infty[$ ودالتها المشتقة f' حيث :

$$f'(x) = 1\ln(x+1) + \frac{1}{x-3} \times (x+1) = \frac{x+1}{x-3} + \ln|x-3|$$

3) f' قابلة الإشتقاق على كل من $]-\infty,3[$ و $]3,+\infty[$ ودالتها المشتقة f'' حيث :

$$f''(x)=\frac{x-7}{(x-3)^2}$$

4) جدول تغيرات f'

لدينا $f(7)=2+\ln 2$

x	$-\infty$		3		7		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘		↗	$+\infty$

5) الدالة f' مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $]-\infty,3[$ وتأخذ قيمها على $]-\infty,+\infty[$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيد α في المجال $]-\infty,3[$ بحيث $f'(\alpha)=0$

6) إشارة f'

نلخصها في الجدول التالي :

x	$-\infty$		α		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	

7) جدول تغيرات f

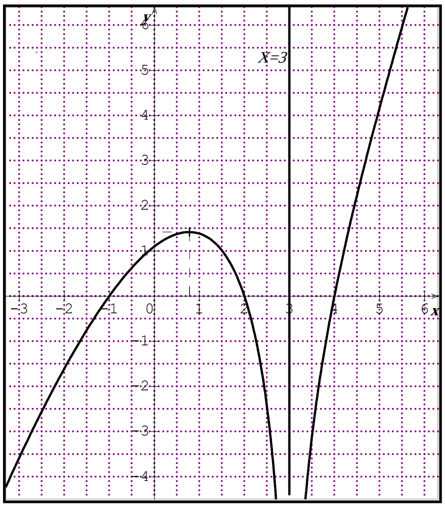
سلطان

x	$-\infty$		α		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$

لدينا $f'(\alpha)=\dfrac{\alpha+1}{\alpha-3}+\ln|\alpha-3|=0$ ومنه $\ln|\alpha-3|=-\dfrac{\alpha+1}{\alpha-3}$

لدينا $f(\alpha)=(\alpha+1)\ln|\alpha-3|=(\alpha+1)\left(-\dfrac{\alpha+1}{\alpha-3}\right)=-\dfrac{(\alpha+1)^2}{\alpha-3}$

المستقيم الذي معادلته $x=3$ مستقيم مقارب للمنحني



التمرين رقم 12 : إختيار من متعدد

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط $A(3,1,-5)$ ، $B(0,4,-5)$ ، $C(-1,2,-5)$ ، $D(2,3,4)$

أجب بصحيح أو خطأ مع التعليل

1) النقط A , B , C , D على استقامة واحدة .

2) المستقيم (AB) محتوى في المستوي حيث $x+y=4$ معادلة له.

3) معادلة ديكارتية للمستوي (BCD) هي : $18x-9y-5z+11=0$.

4) النقطة A تنتمي إلى المستوي (BCD) .

5) الكرة التي مركزها النقطة A ونصف قطرها $R=9$ هي مماسة للمستوي (BCD) .

6) أحد التمثيلات الوسيطية للمستقيم (BD) هي : $\begin{cases} x=1-2k \\ y=\dfrac{7}{2}+k \\ z=-\dfrac{1}{2}-9k \end{cases}$ حيث $k\in\mathbb{R}$.

حل التمرين رقم 12 :

1) الإختيار الأول : خطأ

لأن $\overrightarrow{AB}(-3,3,0)$ و $\overrightarrow{AD}(-1,2,9)$ ولا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\overrightarrow{AD}=k\,\overrightarrow{AB}$ وبالتالي النقط A , B , C , D ليست على استقامة واحدة .

2) الإختيار الثاني : صحيح

- لأن بالنسبة إلى النقطة A لدينا : $x_A+y_A=3+1=4$

ومنه النقطة A تنتمي إلى المستوي الذي معادلته $x+y=4$

- لأن بالنسبة إلى النقطة B لدينا : $x_B+y_B=0+4=4$

ومنه النقطة B تنتمي إلى المستوي الذي معادلته $x+y=4$

- إذن المستقيم (AB) محتوى في المستوي حيث $x+y=4$ معادلة له.

3) الإختيار الثالث : صحيح

لأن : ليكن (P) المستوي الذي معادلته الديكارتية $18x-9y-5z+11=0$.

بسهولة نتحقق من أن النقط B , C , D تنتمي إلى (P) أي إحداثيات كلا منها تحقق معادلة (P)

وبما أنه لا يوجد إلا مستوي واحد يشمل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة والنقط B , C , D ليست على استقامة واحدة ومنه المستوي (P) هو المستوي (BCD) .

4) الإختيار الرابع :خطأ

لأن : إحداثيات النقطة A لا تحقق معادلة المستوي (BCD)

5) الإختيار الخامس : خطأ

معادلة ديكارتية للمستوي (BCD) هي : $18x-9y-5z+11=0$.

(S) الكرة التي مركزها النقطة A ونصف قطرها $R=9$

نحسب المسافة d بين النقطة A والمستوي (BCD)

$$d=\frac{|18x_A-9y_A-5z_A+11|}{\sqrt{18^2+(-9)^2+(-5)^2}}=\frac{|18(3)-9(1)-5(-5)+11|}{\sqrt{430}}=\frac{81}{\sqrt{430}}$$

$9\neq\frac{81}{\sqrt{430}}$ وهذا يعني الكرة (S) ليست مماسة للمستوي . (BCD)

6) الإختيار السادس : صحيح

ليكن (Δ) المستقيم الذي تمثيله الوسيطي $\begin{cases} x=1-2k \\ y=\frac{7}{2}+k \\ z=-\frac{1}{2}-9k \end{cases}$ حيث $k\in\mathbb{R}$.

B تنتمي إلى المستقيم (Δ) إذا وجد عدد حقيقي k بحيث $\begin{cases} x_B=1-2k \\ y_B=\frac{7}{2}+k \\ z_B=-\frac{1}{2}-9k \end{cases}$ وفعلا نجد

$k=\frac{1}{2}$

ومنه B تنتمي إلى المستقيم (Δ) .

D تنتمي إلى المستقيم (Δ) إذا وجد عدد حقيقي t بحيث $\begin{cases} x_D = 1-2t \\ y_D = \dfrac{7}{2}+t \\ z_D = -\dfrac{1}{2}-9t \end{cases}$ وفعلا نجد

$t = -\dfrac{1}{2}$

ومنه D تنتمي كذلك إلى المستقيم (Δ).

المستقيم (Δ) إذن هو نفسه المستقيم (BD) والتمثيل الوسيطي المعطى هو تمثيل وسيطي للمستقيم (BD).

التمرين رقم 13:

الفضاء منسوب على معلم متعامد متجانس $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ ، يُعطى المستوي P معادلته $x+2y-3z-1=0$

و $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2-t \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = -3-t \end{cases}$ تمثيل وسيطي للمستقيم D

في كل سطر من الجدول الموالي توجد تأكيدة واحدة فقط صحيحة.

رقم السطر	التأكيدة (أ)	التأكيدة (ب)	التأكيدة (ج)
1	النقطة $M(-1,3,2)$ تنتمي إلى D	النقطة $N(2,-1,-1)$ تنتمي إلى D	النقطة $H(3,1,-4)$ تنتمي إلى D
2	الشعاع $\vec{u}(1,2,-3)$ هو شعاع توجيه لـ D	الشعاع $\vec{v}(-2,1,1)$ هو شعاع توجيه لـ D	الشعاع $\vec{w}(3,1,-4)$ هو شعاع توجيه لـ D
3	D محتوي في P	D و P متوازيان تماما	D و P متقاطعان
4	النقطة $G(1,3,-2)$ تنتمي إلى P	النقطة $I(1,3,2)$ تنتمي إلى P	النقطة $F(1,3,-1)$ تنتمي إلى P
5	المسافة بين النقطة $A(-1,-3,2)$ والمستوي P هي $\sqrt{14}$	المسافة بين النقطة $A(-1,-3,2)$ والمستوي P هي 14	المسافة بين النقطة $A(-1,-3,2)$ والمستوي P هي $2\sqrt{3}$

حل التمرين رقم 13:

1) من أجل $t=1$ نحصل على الثلاثية $(3,1,-4)$ **ومنه التأكيدة الصحيحة هي (ج)**

2) الشعاع $\vec{u}(2,-1,-1)$ هو شعاع توجيه للمستقيم D وبالتالي الشعاع $\vec{v}(-2,1,1)$ هو شعاع توجيه لـ D كذلك **ومنه التأكيدة الصحيحة هي (ب)**

1) $M \in P \cap D$ **معناه** $1+2t+4-2t+9+3t=0$ **تكافئ** $t=\dfrac{14}{3}$ **إذن** P و D يتقاطعان في نقطة واحدة **ومنه التأكيدة الصحيحة هي (ج).**

2) الثلاثية $(1,3,2)$ تحقق المعادلة $x+2y-3z-1=0$ **ومنه التأكيدة الصحيحة هي (ب).**

3) المسافة بين النقطة $A(-1,-3,2)$ والمستوي P هي: $\dfrac{|-1-6-6-1|}{\sqrt{1+4+9}}=\dfrac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$ $\sqrt{14}$ **ومنه التأكيدة الصحيحة هي (أ).**

التمرين رقم 14:

أولا : نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أحسب $f'(x)$ وانجز جدول تغيرات الدالة f

3) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-1+x]=0$ وفسر هذه النتيجة هندسيا

4) أنشئ (C_f)

ثانيا : نعتبر g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=e^{-x}\ln(1+e^x)$ وليكن (C_g) تمثيلها البياني في نفس معلم متعامد متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x)=e^{-x}f(x)$

2) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

3) انجز جدول تغيرات الدالة g ثم أنشئ (C_g)

4) ليكن α عدد حقيقي ، نضع $I(\alpha)=\int_0^{\alpha} g(x)dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب $I(\alpha)$

5) نعتبر المعادلة التفاضلية $E : y' + y = \frac{1}{1+e^{x}}$ بين أن g حل للمعادلة E .

حل التمرين رقم 14:

أولا :

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{e^{x}}{1+e^{x}} - \ln(1+e^{x}) \right] = -\infty$ لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+e^{x}) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{1+e^{x}} = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[\frac{e^{x}}{1+e^{x}} - \ln(1+e^{x}) \right] = 0$ لأن : $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(1+e^{x}) = \ln 1 = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^{x}}{1+e^{x}} = 0$

2) f قابلة الإشتقاق على $\mathbb{R}$ و $f'(x) = \frac{-e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}$ وهي سالبة تماما

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	0	$-\infty$

3) $\left[f(x) - 1 + x\right] = \frac{e^{x}}{1+e^{x}} - \ln(1+e^{x}) - 1 + x = \frac{e^{x}}{1+e^{x}} - \ln e^{x}(1+\frac{1}{e^{x}}) - 1 + x$

$\left[f(x) - 1 + x\right] = \frac{e^{x}}{1+e^{x}} - \ln e^{x} - \ln(1+\frac{1}{e^{x}}) - 1 + x = \frac{e^{x}}{1+e^{x}} - x - \ln(1+\frac{1}{e^{x}}) - 1 + x$

$\left[f(x) - 1 + x\right] = \frac{e^{x}}{1+e^{x}} - \ln(1+\frac{1}{e^{x}}) - 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - 1 + x\right] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{e^{x}}{1+e^{x}} - \ln(1+\frac{1}{e^{x}}) - 1 \right] = 0$

لأن $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(1+\frac{1}{e^{x}}) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{1+e^{x}} = 1$

ونستنتج أن المستقيم الذي معادلته $y = -x + 1$ مستقيم مقارب للمنحني عند $+\infty$

ثانيا : $g(x) = e^{-x} \ln(1+e^{x})$

$$g'(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \frac{e^{-x}.e^x}{1+e^x} = -e^{-x}\left[\ln(1+e^x) + \frac{e^x}{1+e^x}\right]$$ (1

$$g'(x) = e^{-x} f(x)$$

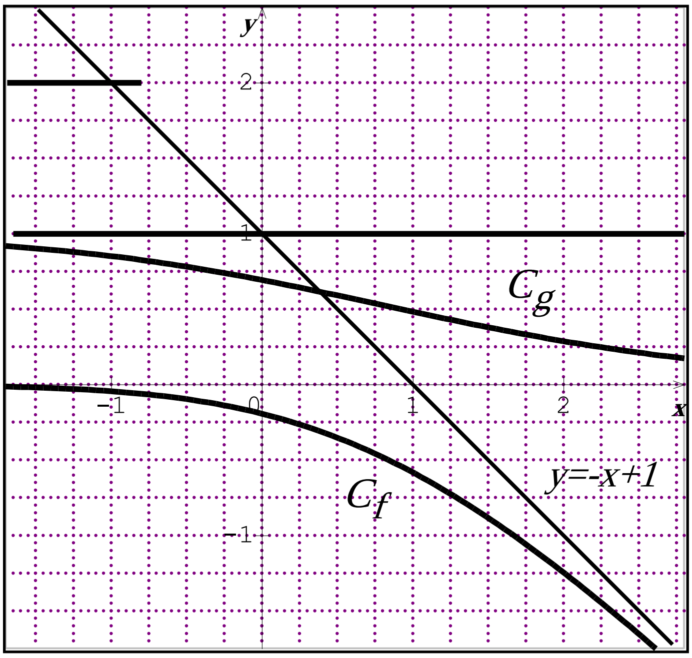
من جدول التغيرات السابق نستنتج أن f سالبة وبالتالي g' سالبة

2) حسب $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x}\ln(1+e^x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x}\ln(1+e^x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{1+e^x} \times \frac{1+e^x}{e^x} = 0 \times 1 = 0$$

(3

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$1 \searrow 0$



$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha} g(x)dx = \int_0^{\alpha} e^{-x}\ln(1+e^x)dx$$ (4

نضع $u(x) = \ln(1+e^x)$ ومنه $u'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

نضع $v'(x) = e^{-x}$ ومنه $v(x) = -e^{-x}$

باستعمال قانون المكاملة بالتجزئة

$$\int_0^{\alpha} u(x).v'(x)dx = \left[u(x).v(x)\right]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} u'(x).v(x)dx$$

$$I(\alpha) = \left[\frac{xe^x - \ln(1+e^x) - e^x\ln(1+e^x)}{e^x}\right]_0^{\alpha} = \alpha e^{\alpha} - \left(1+e^{\alpha}\right)\ln\left(1+e^{\alpha}\right) - 2\ln 2$$

5) $E : y' + y = \dfrac{1}{1+e^x}$

$$g'(x) + g(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} + e^{-x}\ln(1+e^x) = \frac{1}{1+e^x}$$

ومنه g حل للمعادلة E .

التمرين رقم 15:

I) الهدف من هذا السؤال هو إثبات أن . $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$

علما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = 0$ ، استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x}$ ، ثم بوضع $x = -t$ بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$.

II) g دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^x + 1$

أ) احسب $g'(x)$ وادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات g (لا يطلب حساب نهايتي g عند $+\infty$ وعند $-\infty$.)

ب) استنتج إشارة $g(x)$.

III) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = (x-2)e^x + x$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. الوحدة: $2cm$

1) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = g(x)$

2) احسب نهايتي f عند $+\infty$ وعند $-\infty$.

3) استنتج باستعمال السؤال 1) ب) اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\dfrac{3}{2} < \alpha < 2$.

5) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$ مستقيم مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

- ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ).

6) بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) ثم عين معادلة له.

7) ارسم المستقيم (Δ)، المماس (T) و المنحني (C_f).

8) m وسيط حقيقي.ناقش حسب قيم m عدد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلته

$$y = x + m$$

حل التمرين رقم 15:

1) إثبات $\lim_{x\to-\infty} xe^{x} = 0$ لدينا: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^{x}}{x}} = 0$ لأن $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty$

بوضع $x = -t$. إذا كان x يؤول إلى $-\infty$ فإن t يؤول إلى $+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} x\,e^{x} = \lim_{t\to+\infty} -t\,e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} -t\frac{1}{e^{t}} = \lim_{t\to+\infty} -\left(\frac{t}{e^{t}}\right) = 0$$

II) g دالة عددية للمتغير الحقيقي x معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = (x-1)e^{x} + 1$

أ) حساب $g'(x)$ وادرس إشارتها ثم تشكيل جدول تغيرات g .(لا يطلب حساب نهايتيg عند$+\infty$ وعند$-\infty$.)

الدالة g تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$g'(x) = 1\times e^{x} + (x-1)e^{x} = e^{x}(1+x-1) = xe^{x}$$

-من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{x} > 0$ و منه إشارة $g'(x)$ هي نفسها إشارة (x)

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$g'(x)$	- 0 +

جدول تغيرات الدالة g : $g(0) = (0-1)e^{0} + 1 = -1+1 = 0$

x	$-\infty$ 0 $+\infty$
$g'(x)$	- 0 +
$g(x)$	$+\infty$ ↘ 0 ↗ $+\infty$

ب) استنتاج إشارة $g(x)$:

نلاحظ أنه من اجل كل عدد حقيقي x : $g(x) \geq 0$ (0 قيمة حدية صغرى للدالة g).

III) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$كما يلي: $f(x) = (x-2)e^{x} + x$.

(C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.الوحدة: $2cm$

1) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=1\times e^{x}+(x-2)e^{x}+1=(1+x-2)e^{x}+1=(x-1)e^{x}+1=g(x)$$

2) حساب نهايتي f عند $+\infty$ وعند $-\infty$:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)e^{x}+x=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}-2e^{x}+x=-\infty$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)e^{x}+x=+\infty$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

3) استنتاج باستعمال السؤال 1) ب) اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

من اجل كل عدد حقيقي x : $g(x)\geq 0$ و منه من اجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)\geq 0$

$f'(x)=0$ يعني $(x=0)$. إذن الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

4) تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $\frac{3}{2}<\alpha<2$:

الدالة f مستمرة و رتيبة تماما على المجال $\left[\frac{3}{2};2\right]$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}-2\right)e^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\approx-0,7 \quad \text{و} \quad f(2)=(2-2)e^{2}+2=2$$

و منه $f\left(\frac{3}{2}\right)\times f(2)<0$.إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد حقيقي وحيد α من $\left]\frac{3}{2};2\right[$ بحيث

$f(\alpha)=0$

5) تبيان أن المستقيم (Δ)الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للمنحني(C) عند $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to-\infty}(x-2)e^{x}=\lim_{x\to-\infty}xe^{x}-2e^{x}=0$$

إذن المستقيم (Δ)الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب للمنحني(C) عند $-\infty$

- دراسة وضعية المنحني(C)بالنسبة للمستقيم(Δ):

$f(x)-x=(x-2)e^{x}$ ، إشارة $f(x)-x$ هي نفس إشارة $(x-2)$ لأن $e^{x}>0$

$f(x)-x=0$ يعني $(x-2=0)$ أي $x=2$

$f(x)-x>0$ يعني $x>2$ و $f(x)-x<0$ يعني $x<2$

إذن المنحني (C)يقطع المستقيم(Δ) في النقطة التي فاصلتها2 (إحداثياتها$(2;2)$).

لمنحني (C) يكون أعلى المستقيم(Δ) في المجال $]2;+\infty[$.

لمنحني (C) يكون أسفل المستقيم(Δ) في المجال $]-\infty;2[$.

6) تبيان أن المنحني (C) يقبل مماسا T موازيا للمستقيم(Δ) ثم عين معادلة له:

المماس T يوازي المستقيم(Δ) معناه أن للمستقيمين نفس معامل التوجيه و معامل توجيه المستقيم(Δ) هو1 و

بيانيا معامل توجيه المماس للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها x_0هو العدد المشتق $f'(x_0)$

$f'(x_0)=1$ يعني $g(x_0)=1$ أي $(x_0-1)e^{x_0}+1=1$ و منه $(x_0-1)e^{x_0}=0$ أي $(x_0-1=0)$ و بالتالي $(x_0=1)$

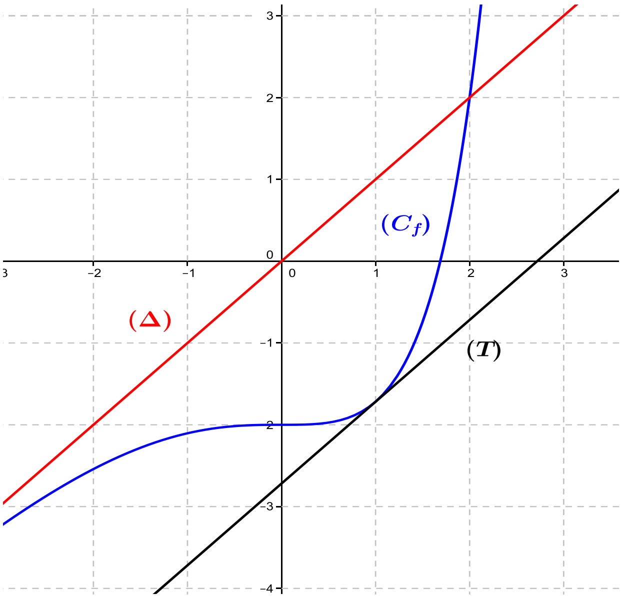
إذن المنحني(C) يقبل مماسا يوازي المستقيم(Δ) عند نقطته التي فاصلتها1.

معادلة المماس T : $y=f'(1)(x-1)+f(1)$

$f'(1)=1$ و $f(1)=(1-2)e^{1}+1=1-e$

إذن معادلة المماس T هي: $y=x-e$

7) رسم المستقيم(Δ)، المماس T و المنحني(C):



8)المناقشة حسب قيم m عدد نقط تقاطع المنحني (C) مع المستقيم (Δ_m) الذي معادلته $y = x + m$:

المستقيم (Δ_m) يوازي (Δ) و يوازي المماس T (مستقيمات لها نفس معامل التوجيه1)

من جهة أخرى العدد الحقيقي m يمثل ترتيب نقطة تقاطع المنحني (C) مع المستقيم (Δ_m).

- إذا كان $m < -e$ فإن المنحني (C) لا يقطع المستقيم (Δ_m).
- إذا كان $m = -e$ فإن المنحني (C) يقطع المستقيم (Δ_m) في نقطة واحدة.
- إذا كان $-e < m < 0$ فإن المنحني (C) يقطع المستقيم (Δ_m) في نقطتين.
- إذا كان $m \geq 0$ فإن المنحني (C) يقطع المستقيم (Δ_m) في نقطة واحدة.