الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني لامتحانات والمسابقات

امتحان شهادة بكالوريا التعليم الثانوي دورة 2008

الشعبة : رياضيات

اختبار في مادة : الرياضيات

المدة : 04 ساعات و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

تمرين 1: (5 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B اللتين

لاحقتيهما $\sqrt{3}-i$ و $\sqrt{3}+3i$ على الترتيب.

1. أكتب العبارة المركبة للتشابه المباشر S الذي مركزه O و يحول A إلى B ثمّ عيّن زاويته ونسبته.

2. نعرف متتالية النقط من المستوي المركب كما يأتي: $A_0=A$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $A_{n+1}=S(A_n)$. نرمز إلى لاحقة A_n بالرمز z_n.

أ) أنشئ في المستوي المركب النقط A_0 و A_1 و A_2.

ب) برهن أنّ: $z_n=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$

ج) عيّن مجموعة الأعداد الطبيعية n التي تنتمي من أجلها النقطة A_n إلى المستقيم (OA_1).

3. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة كما يلي $u_0=A_0A_1$ و $u_n=A_nA_{n+1}$ من أجل كل عدد طبيعي n.

أ) بيّن أنّ المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد حدّها الأول u_0 وأساسها q.

ب) استنتج عبارة u_n بدلالة n.

ج) احسب، بدلالة n، المجموع S_n حيث: $S_n=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

تمرين 2: (4 نقاط)

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

لتكن النقط $A(0,2,1)$، $B(-1,1,-3)$، $C(1,0,-1)$.

1. أكتب المعادلة الديكارتية لسطح الكرة S التي مركزها C وتشمل النقطة A.

2. ليكن المستقيم (D) المعرف بالتمثيل الوسيطي:

$$\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-3+2\lambda \end{cases}$$

حيث λ عدد حقيقي.

أ) اكتب معادلة للمستوي (P) الذي يشمل النقطة C ويعامد المستقيم (D)

ب) أحسب المسافة بين النقطة C والمستقيم (D).

ج) ماذا تستنتج فيما يتعلق بالوضع النسبي لكل من المستقيم (D) وسطح الكرة S؟

تمرين 3:(5 نقاط)

نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $3x-21y=78$

1) أ- بيّن أنّ (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- أثبت أنّه إذا كانت الثنائية (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإنّ $x\equiv 5[7]$

استنتج حلول المعادلة(E).

2) أ- ادرس، حسب قيم العدد الطبيعي n ، بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .

ب- عيّن الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^2$ التي هي حلول للمعادلة (E) وتحقق $5^x+5^y\equiv 3[7]$

تمرين 4:(6 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]1;+\infty[$ بالعبارة : $f(x)=3+\sqrt{x-1}$

يرمز (C) إلى منحنى f في المستوي المزود بالمعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

(الوحدة على المحورين $2cm$).

1) احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ وفسّر النتيجة هندسيا.

- ادرس تغيّرات الدالة f .
- باستعمال منحنى دالة " الجذر التربيعي " ، أنشئ المنحنى (C).
- ارسم في نفس المعلم المستقيم (D) الذي معادلته : $y=x$.

2) نعرّف المتتالية (U_n) على المجموعة $\mathbb{N}$ كالآتي:

$$\begin{cases} U_0=2 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$$

أ - باستعمال (D) و (C)، مثّل الحدود U_0، U_1، U_2 على محور الفواصل.

ب- ضع تخمينا حول اتجاه تغيّر المتتالية (U_n) وتقاربها.

3) أ- برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $2\leqslant U_n\leqslant 5$ و $U_{n+1}>U_n$.

ب- استنتج أنّ (U_n) متقاربة. احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

تمرين 1: (5 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كثير الحدود $P(z)$ المعرف كما يلي :

$$P(z) = 2z^4 - 2iz^3 - z^2 - 2iz + 2$$

1) بين أنه إذا كان a جذرا لكثير الحدود $P(z)$ فإن $\frac{1}{a}$ جذر له أيضا.

2) تحقق أن $1+i$ جذر لكثير الحدود $P(z)$.

3) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z) = 0$.

4) اكتب الحلول على الشكل الأسي.

5) لتكن A و B و C و D النقط من المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد متجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ والتي لاحقاتها على الترتيب: $1+i$ و $-1+i$ و $\frac{-m}{2}-\frac{m}{2}i$ و $\frac{m}{2}-\frac{m}{2}i$

حيث m عدد حقيقي. عيّن m حتى يكون الرباعي $ABCD$ مربعا.

تمرين 2: (4 نقاط)

(U_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول $U_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1$

1 – احسب U_1 و U_2 و U_3 .

2 – (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ : $V_n = U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

– برهن بالتراجع أن (V_n) متتالية ثابتة .

– استنتج عبارة U_n بدلالة n .

– احسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

3 – (W_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـــ : $W_n = \frac{2}{3}n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

– احسب المجموع S حيث : $S = W_0 + W_1 + W_2 + ... + W_n$.

تمرين 3: (4 نقاط)

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستقيمين (Δ) و (Δ')

المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين:

$$\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=2+\frac{1}{2}\lambda \ ; \ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=-2-2\lambda \end{cases}$$ و $$\begin{cases} x=6+\alpha \\ y=1-2\alpha \ ; \ \alpha\in\mathbb{R} \\ z=5+\alpha \end{cases}$$ على الترتيب .

1 – بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي.

2 – M نقطة كيفية من (Δ) و N نقطة كيفية من (Δ') .

أ) عين إحداثيات النقطتين M و N بحيث يكون المستقيم (MN) عموديا على كل من (Δ) و (Δ') .

ب) احسب الطول MN .

3– عين معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ') .

4– احسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) . ماذا تلاحظ ؟

تمرين 4: (7 نقاط)

I) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=x-1+\frac{4}{e^x+1}$ و C_f تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1 – ادرس تغيرات الدالة f .

2 – بين أن C_f يقبل نقطة انعطاف ω و اكتب معادلة لمماس C_f عند النقطة ω .

– اثبت أن ω مركز تناظر للمنحنى C_f .

3– احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)]$.

– استنتج أن C_f يقبل مستقيمين مقاربين يطلب إعطاء معادلة لكل منهما .

4– بين أن C_f يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها x_0 من المجال $]-2{,}77\,;-2{,}76[$.

– احسب $f(1)$ و $f(-1)$ (تدور النتائج إلى 10^{-2}) ثم ارسم C_f ومستقيميه المقاربين.

II) g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $g(x)=-x+3-\frac{4}{e^x+1}$. C_g منحنى الدالة g .

1– بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $g(x)=f(-x)$.

– استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول C_f إلى C_g .

2– أنشئ في نفس المعلم السابق C_g (دون دراسة الدالة g) .

الإجابة النموذجية لموضوع لامتحان :.البكالوريا .. دورة :2008
اختبار مادة : ..الرياضيات الشعبة/ الرياضيات المدة : .04 ساعات و 30 د

الإجابة النموذجية وسلم التنقيط

الموضوع الأول

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
	تمرين 1:(5 نقاط)		
أعداد مركبة	1. المعادلة المركبة للتشابه S هي : $z'=\sqrt{3}iz$	0.5	
	عناصر S: المركز O، النسبة $k=\sqrt{3}$، الزاوية $\theta\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$	0.25×2	
تحويلات نقطية	2 - أ)إنشاء النقط A_0 و A_1 و A_2	0.25×3	
	ب) إثبات أن : $z_n=2\left(\sqrt{3}\right)^n e^{i\left(n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}$	0.5	
	نستعمل البرهان بالتراجع أو العلاقة $z_{n+1}=\sqrt{3}iz_n$ $n\in\mathbb{N}$		
	ج) تعيين الأعداد الطبيعية n حتى تكون النقطة A_n من المستقيم (OA_1)		
	نجد $n=2k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$	0.5	
	3. أ) (U_n)متتالية هندسية حدّها الأوّل $U_0=4$ وأساسها $q=\sqrt{3}$	0.25×2+0.5	
	ب) عبارة (U_n) بدلالة n هي $U_n=4\left(\sqrt{3}\right)^n$	0.5	
	ج) حساب المجموع : $S_n=\frac{4}{\sqrt{3}-1}\left[\left(\sqrt{3}\right)^{n+1}-1\right]$	0.5	
	$\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=+\infty$	0.25	05
	تمرين 2: (4 نقاط)		
هندسة فضائية	1. معادلة سطح الكرة S هي $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=9$	0.75	
	2. أ) معادلة المستوي (P) هي $x-2y-2z-3=0$	0.75	

121

العلامة المجموع	العلامة مجزأة	عناصر الإجابة	محاور الموضوع
	0.75	ب) $B(-1,1,-3)$ هي نقطة تقاطع (D) و (P)	
	0.75	منه $d(C;(D)) = BC = 3$	
04	0.5+0.5	ج) نستنتج أنّ (D) مماس لسطح الكرة S	
05		**تمرين 3:** (5 نقاط)	الموافقات
	0.25	1. أ) المعادلة (E) تقبل حلا في $\mathbb{Z}^2$ لأن $PGCD(3,21)=3$ والعدد 78 يقبل القسمة على 3	
	0.75	ب) إثبات أنه إذا كانت الثنائية (x,y) من $\mathbb{Z}^2$ حلا للمعادلة (E) فإن $x \equiv 5[7]$	
	0.75	استنتاج حلول (E): $(x,y)=(5+7k,-3+k)$ مع $k \in \mathbb{Z}$	
	0.25×6	2 . أ) دراسة بواقي قسمة العدد 5^n على 7 $5^{6m} \equiv 1[7]$ ، $5^{6m+1} \equiv 5[7]$ ، $5^{6m+2} \equiv 4[7]$ ، $5^{6m+3} \equiv 6[7]$ $5^{6m+4} \equiv 2[7]$ ، $5^{6m+5} \equiv 3[7]$ ، $m \in \mathbb{N}$	
	0.5+0.25	ب) تعيين الثنائيات (x,y) من $\mathbb{N}^2$ * نعلم أنّ حلول (E) هي : $(x,y)=(5+7k,-3+k)$ وحيث أنّ $(x,y) \in \mathbb{N}^2$ فإنّ $k \geqslant 3$ بوضع $k'=k-3$ مع $k \geqslant 3$ نجد $k=k'+3$ مع $k' \in \mathbb{N}$ ومنه $(x,y)=(26+7k',k')$ نعوض x و y في $5^x+5^y \equiv 3[7]$ فنجد $5^{k'+1} \equiv 3[7]$	
	0.5+0.5	* وباستخدام بواقي قسمة 5^n على 7 نجد $k'=6m+4$ مع $m \in \mathbb{N}$ منه $(x,y)=(42m+54,6m+4)$	
		تمرين 4: (6 نقاط)	الدوال العددية المتتاليات العددية
	0.25	1) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$	
	0.25	تفسير النتيجة: يوجد نصف مماس يوازي محور التراتيب	
	2×0.25+0.5	* دراسة تغيرات الدالة f حيث: * $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$ - إشارة $f'(x)$ واتجاه التغيّر - جدول التغيرات	
	0.25+0.5	* إنشاء المنحنى (C) والمستقيم (D)	
	0.25×4	2.أ- تمثيل الحدود U_0 ،U_1 ،U_2 على محور الفواصل باستعمال المستقيم (D) والمنحنى (C)	

122

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	مجزأة	المجموع
	ب- التخمين:	0.5	
	المتتالية (U_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى وبالتالي فهي متقاربة		
	3. أ- البرهان بالتراجع على العدد الطبيعي n أنّ : $2 \leqslant U_n \leqslant 5$	0.75	
	البرهان بالتراجع أنّ : $U_{n+1} > U_n$	0.75	
	(يمكن استعمال العلاقة $U_{n+1} = f(U_n)$)		
	ب- استنتاج أن (U_n)متقاربة:	0.25	
	حسب جوابي السؤالين أ و ب من 3 فإنّ (U_n) محدودة من الأعلى ومتزايدة تماما وبالتالي فهي متقاربة وهو ما يؤكد صحّة المخمّنة السابقة		
	* حساب $\lim_{n\to+\infty} U_n = 5$	0.5	06
	انتهى		

123

الموضوع الثاني

محاور الموضوع	عناصر الإجابة	العلامة مجزأة	العلامة المجموع
الأعداد المركبة	**تمرين 1:** (5 نقاط)		
	1) بيان أنه إذا كان $P(a)=0$ فإن $P\left(\frac{1}{a}\right)=0$ (0 ليس جذرا لـ $P(z)$)...............	0.5	0.5
	2) $P(1+i)=0$	0.5	0.5
	3) حلول المعادلة : $1+i$ حل إذا مقلوبه $\frac{1-i}{2}$ حل كذلك	0.25	2
	الحلان الآخران هما حلا المعادلة : $2z^2+(3-i)z+2=0$	0.75	
	$\Delta=-8-6i=(1-3i)^2$ ، $z=\frac{-1-i}{2}$ أو $z=-1+i$	1	
	4) الشكل الأسي للحلول	0.25×2 0.5×2+	1.5
	5) $ABCD$ مربع من أجل $m=2$	0.5	0.5
المتتاليات العددية	**تمرين 2:** (4 نقاط)		
	1) $U_1=\frac{7}{3}$ و $U_2=\frac{23}{9}$ و $U_3=\frac{73}{27}$	0.75	0.75
	2) - البرهان بالتراجع	1+0.25	2.25
	$U_n=3-\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0.5	
	$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=3$	0.5	
	3) المجموع $S=\frac{n(n+1)}{3}+3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-3$	2×0.5	1

المجموع	مجزأة	عناصر الإجابة	ور وضوع
العلامة			
		تمرين 3: (4 نقاط)	الهندسة الفضائية
0.5	0.5	1- (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي	
1.5	0.25	**2- أ)** $(MN)\perp(\Delta)$ يكافئ $3\alpha+\lambda+6=0$	
	0.25	$(MN)\perp(\Delta')$ يكافئ $8\alpha+21\lambda+46=0$	
	2×0.25	$\lambda=-\frac{18}{11}$ و $\alpha=-\frac{16}{11}$	
	2×0.25	$M\left(\frac{15}{11},\frac{13}{11},\frac{14}{11}\right)$ و $N\left(\frac{50}{11},\frac{43}{11},\frac{39}{11}\right)$	
0.25	0.25	ب) $MN=\frac{5\sqrt{110}}{11}$	
1.75	1	3- معادلة المستوي (P) هي $7x+6y+5z-23=0$	
	0.5	4- المسافة : $d=\frac{\lvert 42+7\alpha+6-12\alpha+25+5\alpha-23\rvert}{\sqrt{49+36+25}}=5\frac{\sqrt{110}}{11}$	
	0.25	نلاحظ أن : $d=MN$	
		تمرين 4: (7 نقاط)	دراسة الدوال العددية (الأسية)
		-I	
	0.25×2	1)- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	
2	0.5+0.5	- المشتق و إشارته	
	0.5	- جدول التغيرات	
1	0.25×2	2)- $\omega(0,1)$ نقطة إنعطاف و معادلة المماس $y=1$	
	0.5	- إثبات أن ω مركز تناظر للمنحني	
1	0.25×2	3) - $\lim_{x\to-\infty}(f(x)-(x+3))=0$; $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-(x-1))=0$	
	0.25×2	- استنتاج معادلتي المستقيمين المقاربين	
2	0.5+0.5	4) - للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد x_0 من المجال $]-2.77;-2.76[$	
	0.25×2	$f(-1)\simeq 0.92$; $f(1)\simeq 1.08$	
1	0.5	- رسم C_f	
	0.25+0.25	**II- 1)** $g(x)=f(-x)$ و C_g هو نظير C_f بالنسبة لحامل محور التراتيب	
	0.5	2) إنشاء C_g	