Delprøve 1

Opgave 1: Tre vektorer er givet. Hvis de skal være ortogonale, så skal $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 4 \cdot (-3) + 2 \cdot 6 = -12 + 12 = 0$$

Hvis de skal være parallelle ($\vec{b} \parallel \vec{c} = 0$), så skal determinanten være 0.

$$\vec{b} \parallel \vec{c} = \det\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = (-3 \cdot (-4) - 6 \cdot 2) = 12 - 12 = 0$$

Opgave 2: Vi bestemmer $f'(x)$.

$$f'(x) = -2x + 10$$

Tangenten bestemmes.

$$f'(2) = -2 \cdot 2 + 10 = 6$$

Så er

$$y = 6 \cdot (x - 2) + 16 = 6x - 12 + 16 = 6x + 4$$

Opgave 3: Integralet bestemmes.

$$\int (3x^2 + 2 - 1/x)\, dx = x^3 + 2x - \ln(x) + k$$

Under antagelse af, at $x > 0$.

Opgave 4: Længden a er

$$20 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow 80 = 8a \Leftrightarrow a = 10$$

Opgave 5: Vi bestemmer en forskrift.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{300 - 100}{100 - 200} = -2$$
$$b = y_1 - ax_1 = 100 - (-2) \cdot 200 = 500$$

Så er $f(x) = -2x + 500$

Delprøve 2

Opgave 1: To vektorer er givet

a) Vinklen mellem vektorer udregnes

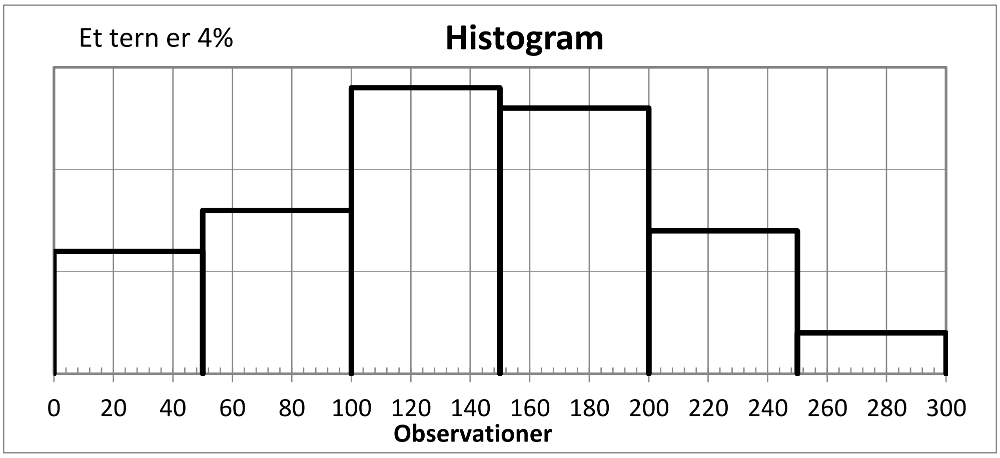
$$v = \arccos\left(\frac{4\cdot(-2)+1\cdot 2}{\sqrt{1^2+4^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2}}\right) = 120.964^o$$

b) Arealet er determinanten, og i opgave 1 brugte vi determinanten.

$$\vec{a} \parallel \vec{b} = \det\begin{pmatrix}4 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix} = 4\cdot 2 - 1\cdot(-2) = 10$$

Opgave 2:

a) Man kan tegne et histogram over oplysningerne. Dette kan laves vha. WordMat's statistik Excel ark.



b) Vi anvender varians og standardafvigelse.

Varians, men for at bestemme den, skal vi kende middeltallet (gennemsnittet). Dette udregnes således:

$$\overline{x} = 25\cdot 0.12 + 75\cdot 0.16 + 125\cdot 0.28 + 175\cdot 0.26 + 225\cdot 0.14 + 275 \cdot 0.04 = 138$$

Variansen er så

$$Var(x) = 0.12\cdot(25-138)^2 + 0.16\cdot(75-138)^2 + 0.28\cdot(125-138)^2 + 0.26 \cdot(175-138)^2 + 0.14\cdot(225-138)^2 + 0.04 \cdot(275-138)^2 = 4381$$

Standardafvigelsen (eller spredningen) bestemmes vha. variansen

$$\sigma(x) = \sqrt{Var(x)} = \sqrt{4381} = 66.189$$

I Maple vil alle de statistiske deskriptorer se ud sådan:

$$A := \begin{bmatrix} 0..50 & 12 \\ 50..100 & 16 \\ 100..150 & 28 \\ 150..200 & 26 \\ 200..250 & 14 \\ 250..300 & 4 \end{bmatrix}:$$

typeinterval(*A*)

$$[100..150] \quad (1)$$

median(*A*)

$$139.29 \quad (2)$$

kvartiler(*A*)

$$[90.625, 139.29, 186.54] \quad (3)$$

gennemsnit(*A*)

$$138.000000000000 \quad (4)$$

varians(*A*)

$$4381.00000000000 \quad (5)$$

spredning(*A*)

$$66.1891229734916 \quad (6)$$

Opgave 3: Her er givet en stribe af funktioner.

$$\begin{aligned} p(x) &= -0.4x + 20, \qquad 0 < x < 50 \\ q(y) &= -0.1y + 10, \qquad 0 < y < 100 \end{aligned}$$

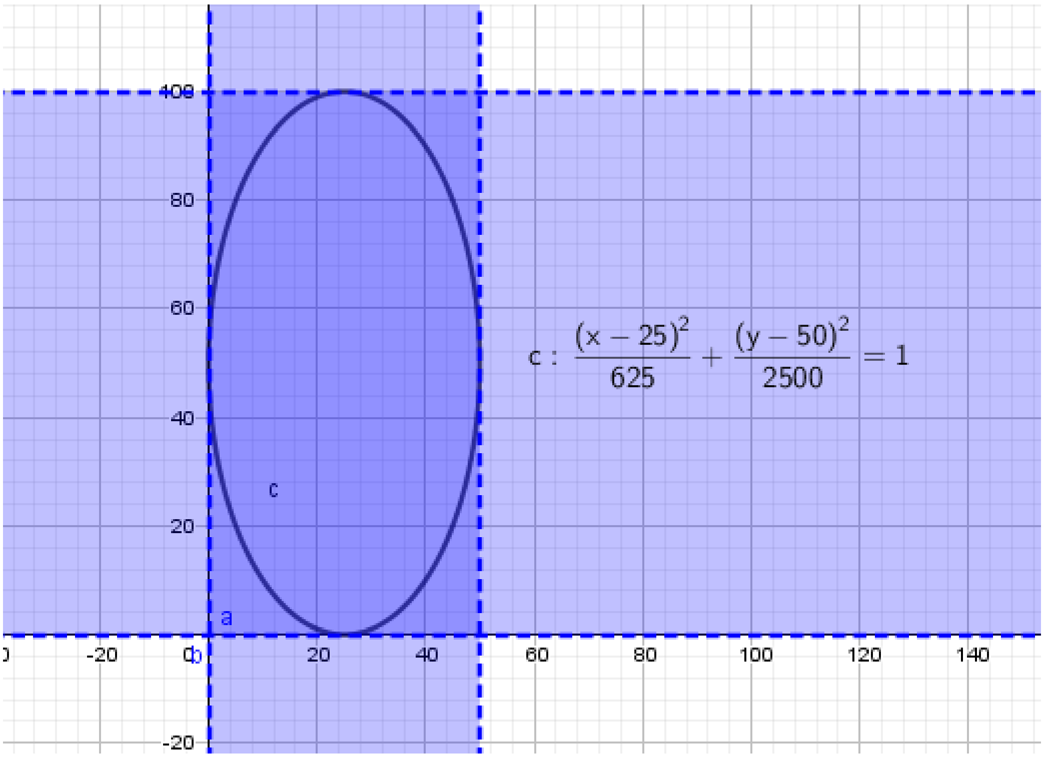
a) De samlede omkostninger er så

$$\begin{aligned} O(x,y) &= x \cdot p(x) + y \cdot q(y) \\ &= x \cdot (-0.4x + 20) + y \cdot (-0.1y + 10) \\ &= -0.4x^2 + 20x - 0.1y^2 + 10y \end{aligned}$$

b) Vi beregner $O(x,y) = t$, så

$$-0.4x^2 + 20x - 0.1y^2 + 10y = 250 \Leftrightarrow$$
$$-0.4 \cdot (x^2 - 50x) - 0.1 \cdot (y^2 - 100y) = 250 \Leftrightarrow$$
$$-0.4 \cdot ((x-25)^2 - 25^2) - 0.1 \cdot ((y-50)^2 - 50^2) = 250 \Leftrightarrow$$
$$-0.4 \cdot (x-25)^2 - 0.1 \cdot (y-50)^2 = 250 - 0.4 \cdot 25^2 - 0.1 \cdot 50^2 \Leftrightarrow$$
$$-0.4 \cdot (x-25)^2 - 0.1 \cdot (y-50)^2 = -250 \Leftrightarrow$$
$$\frac{-0.4 \cdot (x-25)^2 - 0.1 \cdot (y-50)^2}{-250} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\frac{(x-25)^2}{625} + \frac{(y-50)^2}{2500} = 1$$

Tegningen ses næste side.



c) Her bruges hjørnemetoden. Man tester følgende punkter:

$$P(0{,}50), \quad Q(25{,}0), \quad R(50{,}50), \quad S(25{,}100), \quad T(25{,}50)$$

Vi ser, at kun T giver det maksimale, så

$$O(25{,}50) = 500$$

Hvor de andre vil give 250.

d) Her anvendes $x + y \leq 50$, så $y \leq 50 - x$ og denne indsættes i $O(x, y)$, sådan så $O(x, 50 - x)$. Vi får

$$K(x) = O(x, 50 - x) = -0.5x^2 + 20x + 250$$

Løses $K'(x) = 0$ fås

$$-x + 20 \Leftrightarrow x = 20$$

Som indsættes i $K(x)$ for at finde ud af, hvor meget A der skal produceres.

$$K(20) = -0.5 \cdot 20^2 + 20 \cdot 20 + 250 = 450$$

Og for y har man

$$y \leq 50 - 20$$
$$y \leq 30$$

Så kort opsummeret, man skal bruge 20 A og 30 B for at få det maksimale, hvis man medtager begrænsningen $y + x \leq 50$.

Opgave 4:

a) Hovedstolen er $24000kr$.
Lånets ydelse bestemmes vha. formlen
$$Afdrag = Ydelse - Rente$$
Og man har
$$987.76 = Y - 480 \Leftrightarrow Y = 1467.76$$
Renten r på 2% bestemmes vha. formlen
$$Rente = Primo\ Restgæld \cdot r$$
Så
$$480 = 24000 \cdot r \Leftrightarrow r = 0.02$$
Og i procent er det: 2%.

b) Vi anvender formlen for restgælden, så vi får restgælden efter 8 ydelse:
$$24000 \cdot (1 + 0.02)^8 - \frac{(1 + 0.02)^8 - 1}{0.02} \cdot 1467.76 = 15522.086$$
Så efter 8. ydelse er restgælden på $15522.086kr$.

Opgave 5: Givet funktionen $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

a) Først findes $f'(x)$ og ligningen $f'(x) = 0$ løses.
$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x - 1)(x - 3) = 0$$
Så er løsningerne $x = 1 \vee x = 3$. Vi anvender den dobbelte afledede til at afgøre om hvornår der er maksimum og minimum.
$$f''(x) = 6x - 12$$
Så er
$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = -6, \qquad lokalt\ maks$$
$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 6, \qquad lokalt\ min$$
Dermed er funktionen:
- Voksende i intervallet $(-\infty; 1]$ og $[3; \infty)$
- Aftagende i intervallet $[1; 3]$.

b) Her anvendes den anden afledede, og ligningen $f''(x) = 0$ løses.
$$6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$
Så den er konkav i intervallet $(-\infty; 2)$ og konveks i intervallet $(2; \infty)$.

c) Funktionen integreres.

$$A=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (x^3-6x^2+9x+2)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{9x^2}{2}+2x\right]_0^1$$
$$=\frac{1^4}{4}-2\cdot 1^3+\frac{9\cdot 1^2}{2}+2\cdot 1-\left(\frac{0^4}{4}-2\cdot 0^3+\frac{9\cdot 0^2}{2}+2\cdot 0\right)$$
$$=\frac{1^4}{4}-2\cdot 1^3+\frac{9\cdot 1^2}{2}+2\cdot 1$$
$$=\frac{19}{4}$$

Opgave 6: Ligningen løses.

$e^{x^2-4x}-1=0$	Funktionen sættes lig med nul.
$e^{x^2-4x}=1$	Der subtraheres 1 på begge sider.
$x^2-4x=0$	Den naturlige logaritme anvendes begge sider.
$x\cdot(x-4)=0$	Der faktoriseres, da x indgår i begge led.
$x=0 \vee x=4$	Nulreglen anvendes.

Opgave 7: Givet funktionen $f(x)=3x^2-5x+4$ og linjen l, som er defineret ved $y=x+1$

a) Hvis l skal være tangent til $f(x)$, så skal $f(x)=y$ give en værdi.

$$3x^2-5x+4=x+1 \Leftrightarrow$$
$$3x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow$$
$$x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2=0 \Leftrightarrow$$
$$x=1$$

Røringspunktet er $y=1+1=2$, så $P(1,2)$ er det ønskede punkt.

Man kan eftervise, at l er tangent i $x=1$, hvis den afledede giver samme hældning som l.

$$f'(1)=6\cdot 1-5=1$$

Det stemmer.

b) Ligesom i opgave 6, anvendes integralregning.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (f(x) - y)\,dx = \int_0^1 \left(3x^2 - 5x + 4 - (x+1)\right) dx \\ &= [x^3 - 3x^2 + 3x]_0^1 \\ &= 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - (0^3 - 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0) \\ &= 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Opgave 8A:

a) Lad x være råvareprisen. Der er en fast løn på 500kr, så er de samlede omkostninger:

$$y_S = x + 500$$

Dermed skal vi huske en fortjeneste på 60%, så vores salgspris er

$$y_s = y_S + 0.6 \cdot y_S$$

Der skal medregnes moms på 25%, så

$$y_m = y_s + 0.25 \cdot y_s$$

Endelig er salgsprisen inkl. moms:

$$\begin{aligned} f(x) &= y_m \\ &= y_s + 0.25 \cdot y_s \\ &= (y_S + 0.6 \cdot y_S) + 0.25 \cdot (y_S + 0.6 \cdot y_S) \\ &= \left(x + 500 + 0.6 \cdot (x + 500)\right) + 0.25 \cdot \left(x + 500 + 0.6 \cdot (x + 500)\right) \\ &= x + 500 + 0.6x + 300 + 0.25x + 125 + 0.150x + 75 \\ &= 2x + 1000 \end{aligned}$$

b) Den inverse funktion bestemmes ved at løse ligningen

$$f(y) = x$$

Så

$$\begin{aligned} 2y + 1000 = x &\Leftrightarrow \\ 2y = x - 1000 &\Leftrightarrow \\ y = \frac{x}{2} - 500 &\Leftrightarrow \\ f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - 500 & \end{aligned}$$

Denne model beskriver den omvendte af spgm. a, så hvis man står med en salgspris på 1600kr, fås råvareprisen 300kr, hvis ovenstående funktion anvendes.

Opgave 8B:

a) Forskriften $f(x,y)$ bestemmes. Ved aflæsning af informationerne kan vi slutte, at forskriften er

$$f(x,y) = 30x + 20y$$

Niveaulinjen $N(200)$ ønskes bestemt. Ved anvendelse af hjørnemetoden, tester vi følgende punkter:

$$(0{,}17.5), \qquad (3{,}16), \qquad (12{,}4), \qquad (14{,}0)$$

Punkterne kan også fås ved beregning af ligninger ud fra de oplyste linjer. Så vi har:

$$f(0{,}17.5) = 350$$
$$f(3{,}16) = 410$$
$$f(12{,}4) = 440$$
$$f(14{,}0) = 420$$

Man kan se, at $f(12{,}4)$ giver det største mulige samlede dækningsbidrag pr. dag. Så der skal altså produceres 12 planglas og 4 spejle

b) Vi bestemmer intervallet, lad derfor d være dækningsbidraget, så er

$$f(x,y) = 30x + dy$$

Og tages punkterne $f(3{,}16)$, og $f(14{,}0)$ samt det maksimale $f(12{,}4)$ får vi at

$$f(12{,}4) \geq f(3{,}16) \Leftrightarrow 30 \cdot 12 + d \cdot 4 \geq 30 \cdot 3 + d \cdot 16 \Leftrightarrow d \leq 22.5$$
$$f(12{,}4) \geq f(14{,}0) \Leftrightarrow 30 \cdot 12 + d \cdot 4 \geq 30 \cdot 14 + d \cdot 0 \Leftrightarrow d \geq 15$$

Intervallet er så $15 \leq d \leq 22.5$.