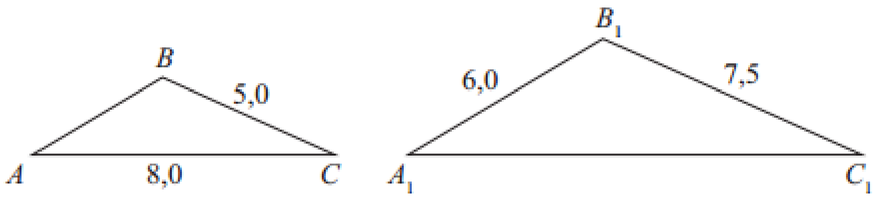
De første 6 opgaver løses uden hjælpemidler.

Opgave 1



Figuren viser to ensvinklede trekanter ABC og $A_1B_1C_1$. Nogle af målene fremgår af figuren.

a) Bestem længden af hver af siderne A_1C_1 og AB.

a) Vi løser og anvender forstørrelsesfaktoren for trekanterne idet de begge er ensvinklede. Så vi har:

$$k = \frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{7.5}{5} = \frac{15}{10} = 1.5 \qquad (*)$$

Så kan vi bestemme:

$$|A_1C_1| = k \cdot |AC|$$
$$|AB| = \frac{|A_1B_1|}{k}$$

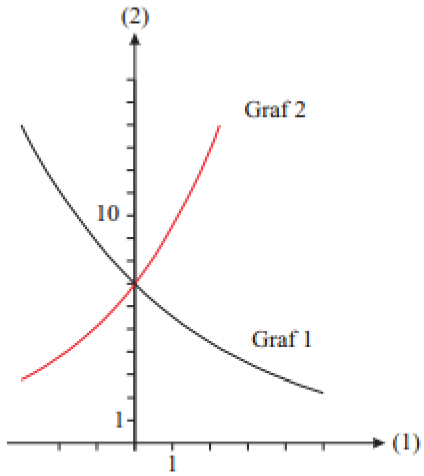
Med tallene indsat er:

$$|A_1C_1| = 1.5 \cdot 8 = 12$$
$$|AB| = \frac{6}{1.5} = 4$$

Hvilket var det ønskede.

$(*)$: Jeg gangede med 2 for at få nogle nemmere brøker at arbejde med, idet 7.5/5 kan virke uoverskueligt for de fleste.

Opgave 2



Figuren viser graferne for to funktioner af typen

$$f(x) = b \cdot a^x \ ,$$

hvor a og b er positive tal. Tallet b har samme værdi for de to funktioner.

a) Bestem tallet b.
Gør for hver af de to grafer rede for, om tallet a er større eller mindre end 1.

a) Vi kigger på grafen og noterer os, at b-værdien er $b = 7$ i eksponentielfunktionen.
For den sorte graf er a-værdien aftagende idet a ligger mellem 0 og 1, dvs. $0 < a < 1$.
For den røde graf er a-værdien voksende idet a er større end 1, dvs. $a > 1$.

Opgave 3 En pige har drukket øl og har fået målt en promille på 1,2.
Promillen falder derefter med 0,10 pr. time.

a) Indfør passende variable, og opstil en formel, der beskriver udviklingen i pigens promille som funktion af den tid, der er gået, siden hun fik målt sin promille.

a) Modellen er $P(t) = -0.10x + 1.2$
Hvor $a = -0.10$ og $b = 1.2$ hvilket fortæller os, at i begyndelsen er promillen 1.2 hvor vi så ved, at den aftager med 0.10 pr. time. Her er $P(t)$ pigens promille og t er tiden, målt i timer.

Opgave 4 Der er givet andengradsligningen $x^2 - 6x + 9 = 0$.

a) Bestem diskriminanten.
Løs ligningen.

a) Vi bestemmer diskriminanten vha. den velkendte formel, som burde kendes af de fleste.

$$d = b^2 - 4ac$$

Her er $a = 1, b = -6$ og $c = 9$ så vi har:

$$d = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0, \qquad d = 0$$

Derved anvendes formlen for x, når der kun findes een rod.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2 \cdot 1} = 3$$

Hvilket er løsningen.

Opgave 5 Der er givet en funktion $f(x) = x^3 + 2 \cdot \sqrt{x}, \quad x > 0$.

a) Bestem $f(1)$ og $f'(1)$.

a) Vi bestemmer følgende:

$$f(1) = 1^3 + 2 \cdot \sqrt{1} = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

Vi differentierer funktionen:

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}\right) = 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Med indsat $f'(1)$ har man:

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + \frac{1}{\sqrt{1}} = 3 \cdot 1 + \frac{1}{1} = 4$$

Opgave 6 Der er givet en funktion

$$f(x) = \frac{b}{x} - x^2 .$$

Grafen for f går igennem punktet $P(2,1)$.

a) Bestem tallet b.

a) Vi skal mere eller mindre bare løse en ligning.

$$1 = \frac{b}{2} - 2^2 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 = 2 \cdot \left(\frac{b}{2} - 4\right) \Leftrightarrow 2 = b - 8 \Leftrightarrow b = 10$$

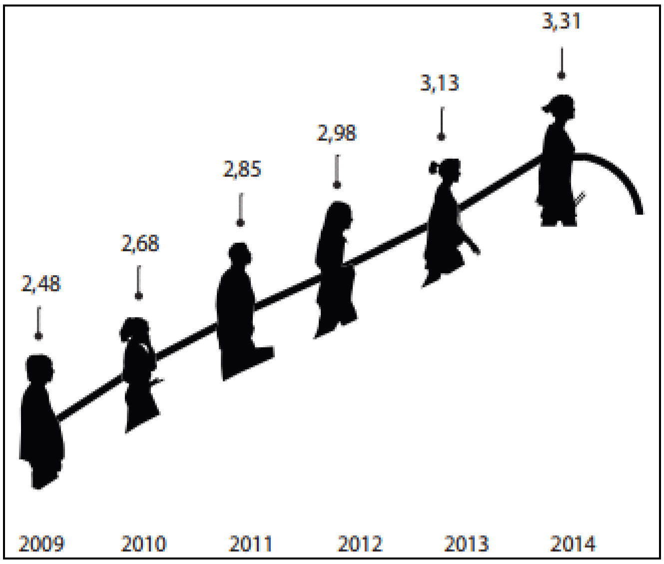
Vi tester om det passer.

$$f(2) = \frac{10}{2} - 2^2 = 5 - 4 = 1$$

Det passer.

De resterende opgaver løses inkl. hjælpemidler.

Opgave 7



Kilde: Scandinavian Traveler, February 2015

Figuren viser antallet af flypassagerer (målt i milliarder) i verden i perioden 2009-2014. Antallet af flypassagerer i verden i denne periode kan med god tilnærmelse beskrives ved modellen

$$y = a \cdot x + b\,,$$

hvor y er antallet af flypassagerer, målt i milliarder, og x er antal år efter 2009.

a) Bestem tallene a og b ved at bruge alle figurens oplysninger.

b) Hvad fortæller tallet a om udviklingen i antallet af flypassagerer?

c) Hvilket år vil antallet af flypassagerer komme over 4 milliarder, hvis udviklingen fortsætter?

a) I denne type opgave skal man lave lineær regression. Der vises hvordan man gør i Maple og i WordMat. Jeg er ikke indehaver af N-Spire.

0	2.48
1	2.68
2	2.85
3	2.98
4	3.13
5	3.31

Lineær regression udført vha. CAS-værktøjet WordMat: $R^2 = 0.9961783$

$$y = 0.1608571x + 2.502857$$

I Maple forholder det sig således:

```
with(Gym) :
L1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5] :; L2 := [2.48, 2.68, 2.85, 2.98, 3.13, 3.31] :
f(x) := LinReg(L1, L2, x) :
f(x)
                    0.160857142857143 x + 2.50285714285714
```

Hermed er modellen fundet og tallene er hermed:

$$a = 0.16085$$
$$b = 2.50285$$

b) Tallet a fortæller, at for hvert år der går fra første observation, stiger antallet af flypassagerer med 0.16085 mia. om året.

c) Hvis antallet af flypassagerer skal passere 4 mia., løses ligningen:

$$4 = 0.16085x + 2.50285$$

Dette kan nemt gøres i hånden:

$$4 = 0.16085x + 2.50285 \Leftrightarrow$$
$$1.49715 = 0.16085x \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{1.49715}{0.16085} \approx 9.307$$

Dvs. i år 2018 vil antallet af flypassagerer passere 4 mia.

WordMat kan også regne denne type ligning:

$$4 = 0.16085x + 2.50285$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 9.30774$$

Maple kan også:

```
0.160857142857143 x + 2.50285714285714 = 4
          0.160857142857143 x + 2.50285714285714 = 4
 solve for x
 ---------->
                    [[x = 9.307282416]]
```

Opgave 8 Grundvandet er flere steder i Danmark forurenet med stoffet BAM.
En bestemt type ufarlige bakterier kan nedbryde BAM.
I et forsøg tilsætter man disse bakterier til en grundvandsprøve.
Koncentrationen af BAM i prøven kan herefter beskrives ved modellen

$$f(x) = 1{,}60 \cdot e^{-0{,}0758 \cdot x} \ ,$$

hvor x er tiden efter forsøgets start (målt i timer), og $f(x)$ er koncentrationen af BAM i prøven (målt i µg/L).

Koncentrationen af BAM i vandet må højst være 0,1 µg/L, hvis det skal bruges til at drikke.

a) Bestem koncentrationen af BAM i grundvandsprøven efter 48 timer, og vurdér, om grundvandet i prøven må drikkes efter de 48 timer.

b) Bestem $f'(10)$, og forklar betydningen af dette tal.

a) Modellen er givet: $f(x) = 1.60 \cdot \mathrm{e}^{-0.0758x}$ og indsætter man 48 på t's plads fås:

$$f(48) = 1.60 \cdot \mathrm{e}^{-0.0758 \cdot 48} = 0.04207$$

Dvs. efter 48 timer, er mængden af BAM ca. $0.04207 \mu g/L$. Eftersom at $0.04207 < 0.1$ må grundvandet gerne drikkes efter de 48 timer.

b) Modellen differentieres. Denne type kan differentieres i hånden idet $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \ln(a)$ så man har:

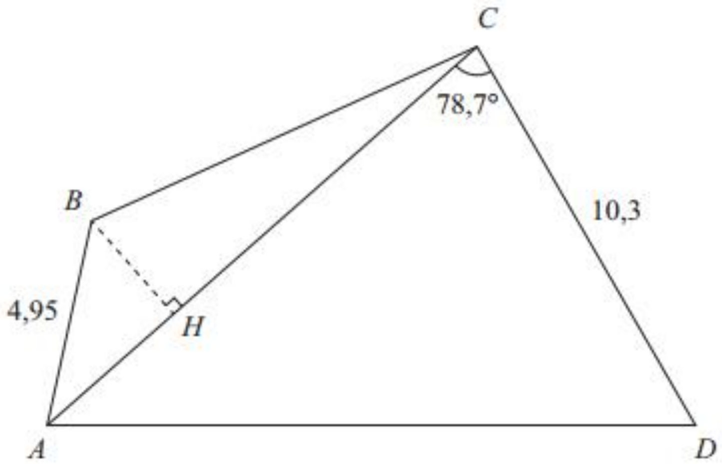
$$f'(x) = 1.60 \cdot \mathrm{e}^{-0.0758x} \cdot \ln(\mathrm{e}^{-0.0758}) = -0.0758 \cdot 1.60 \cdot \mathrm{e}^{-0.0758x}$$
$$= -0.121280 \cdot \mathrm{e}^{-0.0758x}$$

Indsættes 10 i $f'(x)$ fås:

$$f'(10) = -0.0568$$

Dvs. efter 10 timer, er væksthastigheden faldende med $0.0568 \mu g/L$ pr. time.

Opgave 9



Figuren viser en firkant $ABCD$, hvor diagonalen AC er tegnet. Desuden er højden BH i trekant ABC tegnet.
Diagonalen AC har længden 13,6, og AH har længden 4,00.
Nogle af de øvrige mål fremgår af figuren.

a) Bestem længden af siden AD.

b) Bestem arealet af firkant $ABCD$.

a) Ved at nærstudere geometrifiguren kan man bestemme $|AD|$ vha. $|AC| = 13.6$ og $|CD| = 10.3$ samt vinkel $\angle C = 78.7^o$. Dermed anvendes cosinusrelationerne:

$$|AD| = \sqrt{|CD|^2 + |AC|^2 - 2 \cdot |CD| \cdot |AC| \cdot \cos(C)}$$
$$= \sqrt{10.3^2 + 13.6^2 - 2 \cdot 10.3 \cdot 13.6 \cdot \cos(78.7)} = 15.36729$$

b) Her ønskes arealet af hele firkanten. Det vil være en god idé at finde højden $|BH|$, så dette gøres. Her har man allerede $|AB| = 4.95$ og $|AH| = 4$ så anvendes Pythagoras:

$$|AH|^2 + |BH|^2 = |AB|^2$$

Med indsatte værdier er:

$$4^2 + |BH|^2 = 4.95^2 \Leftrightarrow |BH| = \sqrt{4.95^2 - 4^2} \approx 2.9159$$

Arealet af firkanten bestemmes således:

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD}$$

Hvor:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g = \frac{1}{2} \cdot 2.9159 \cdot 13.6 = 19.8281$$
$$A_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |CD| \cdot \sin(C) = \frac{1}{2} \cdot 13.6 \cdot 10.3 \cdot \sin(78.7) = 68.6822$$

Hermed er:

$$A_{ABCD} = A_{ABC} + A_{ACD} = 19.8281 + 68.6822 = 88.5103$$

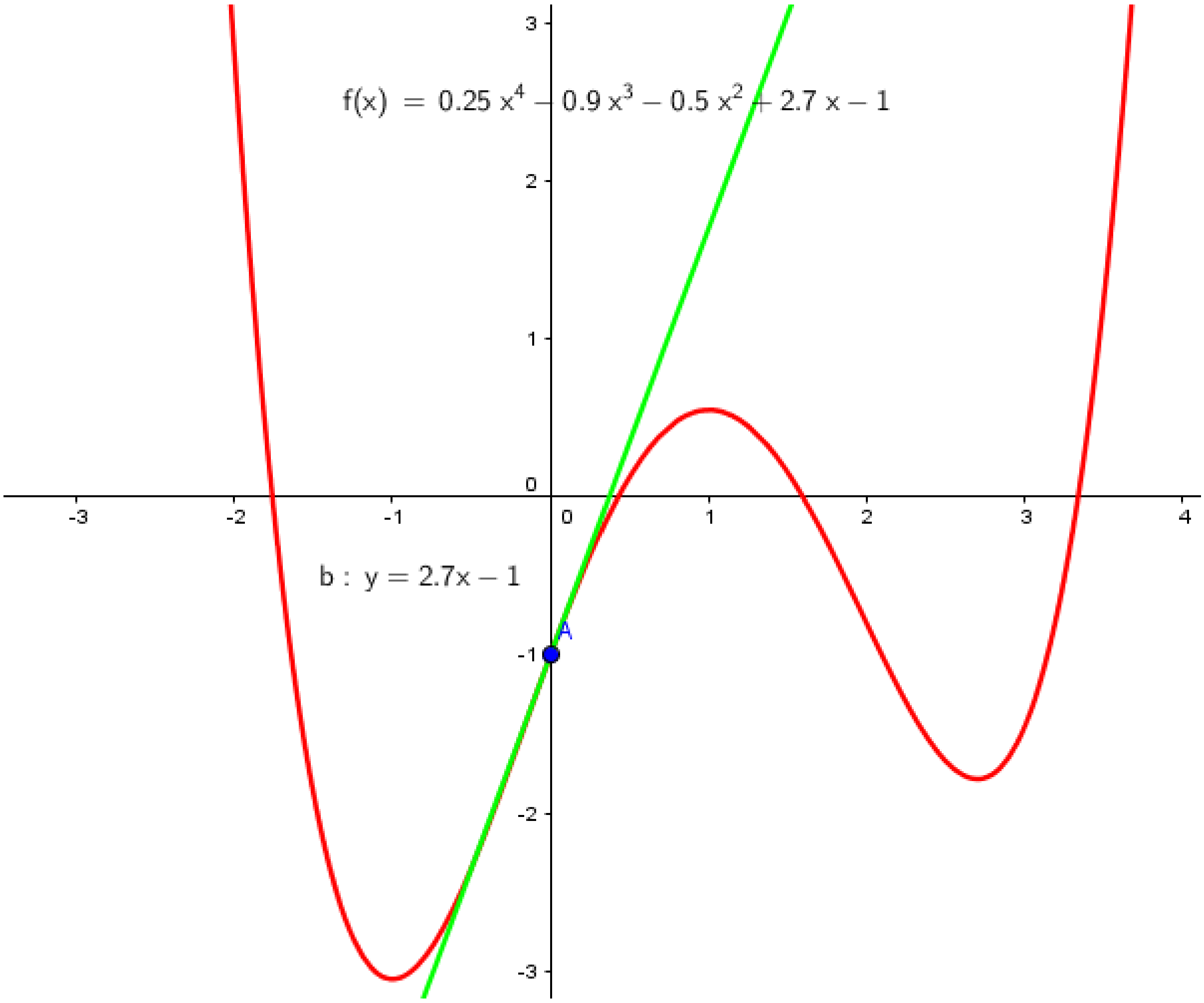
Opgave 10 En funktion f er givet ved

$$f(x) = 0,25x^4 - 0,9x^3 - 0,5x^2 + 2,7x - 1.$$

a) Tegn grafen for f, og bestem en ligning for tangenten til grafen i punktet med førstekoordinaten 0.

b) Løs ligningen $f'(x) = 0$, og bestem funktionens monotoniforhold.

a) Grafen tegnes i GeoGebra.



Ligningen for tangenten bestemmes i punktet med førstekoordinaten 0. (Kig evt. på grafen). Vi har at $f(0) = -1$ så vi bestemmer tangenten i dette punkt for $f(x)$. Først differentieres funktionen.

$$f'(x) = x^3 - 2.7x^2 - x + 2.7$$

Indsættes 0 i $f'(x)$ fås:

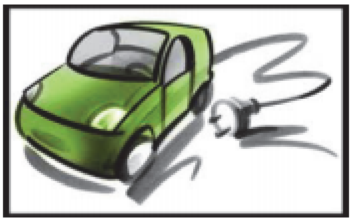
$$f'(0) = 2.7$$

Så tangentligningen er hermed:

$$y = 2.7x - 1$$

b) Ligningen $f'(x) = 0$ løses. (Kan løses i alle CAS programmer).
$$x^3 - 2.7x^2 - x + 2.7 = 0$$
$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*
$$x = -1 \quad \vee \quad x = 1 \quad \vee \quad x = 2.7$$
Hermed kan man så bestemme monotoniforhold på to måder.

Opgave 11



For en bestemt køretur i en elbil kan hastigheden de første 10 sekunder efter start beskrives med følgende sammenhæng

$$v(t) = -0{,}51\,t^2 + 14{,}81\,t \quad , \quad 0 \le t \le 10 \ ,$$

hvor $v(t)$ angiver hastigheden af bilen, målt i km/t, og t angiver tiden, målt i sekunder.

a) Hvor hurtigt kører bilen efter 8,0 sekunder?
Hvornår kommer bilens hastighed op på 40 km/t?

Den strækning s (målt i meter), som bilen kører de første K sekunder, kan beregnes ved formlen

$$s = 0{,}278 \cdot \int_0^K v(t)\,dt \ .$$

b) Hvor mange meter kører bilen de første 8,0 sekunder?

a) Her indsættes 8 på t's plads i funktionen $v(t)$, dette gøres:
$$v(8) = -0.51 \cdot 8^2 + 14.81 \cdot 8 = 85.84$$
Dvs. efter 8 sekunder er hastigheden i elbilen ca. $85.84 km/t$.

Her løses ligningen $40 = v(t)$, og man har
$$40 = -0.51 \cdot t^2 + 14.81 \cdot t \Leftrightarrow$$
$$-0.51 \cdot t^2 + 14.81 \cdot t - 40 = 0$$
Vi løser den som en andengradsligning.
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-14.81 \pm \sqrt{14.81^2 - 4 \cdot (-0.51) \cdot (-40)}}{2 \cdot (-0.51)} = \begin{cases} 3.0136 \\ 26.0255 \end{cases}$$
Men eftersom vi arbejder i intervallet $0 \le t \le 10$ så er
$$t = 3.0136$$
Dvs. bilen skal køre i ca. 3 sekunder for, at hastigheden er $40 km/t$.

b) Der er givet integralet, som skal angive den længde, bilen har kørt. Dette gøres for $K = 8$, så man har:

$$s = 0.278 \cdot \int_0^8 -0.51 \cdot t^2 + 14.81 \cdot t\, dt = 0.278 \cdot [-0.17 \cdot t^3 + 7.405 \cdot t^2]_0^8$$
$$= 0.278 \cdot (-0.17 \cdot 8^3 + 7.405 \cdot 8^2) - 0.278 \cdot (-0.17 \cdot 0^3 + 7.405 \cdot 0^2)$$
$$= 107.55264$$

Dvs. efter 8 sekunder, har bilen tilbagelagt ca. 107.55264 meter. I Maple kan det også regnes, og det ser så galt ud:

$$s = 0.278 \cdot \int_0^8 v(t)\, dt$$
$$s = 107.5526400$$

Opgave 12 Funktionen f er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + 3 \cdot \sqrt{x}, \quad x > 0 .$$

Funktionen F er en stamfunktion til f.
Grafen for F går gennem punktet $(1, 5)$.

a) Bestem $F(x)$.

a) Stamfunktionen bestemmes. NB: Ændre $3 \cdot \sqrt{x}$ til $3 \cdot x^{0.5}$

$$F(x) = \int f(x)\, dx = \int \frac{1}{x^2} + 3 \cdot x^{0.5}\, dx = -\frac{1}{x} + 2 \cdot x^{1.5} + k$$

Hermed er stamfunktionen generelt følgende:

$$F(x) = -\frac{1}{x} + 2x^{1.5} + k$$

Derved er der givet et punkt. Dette anvendes så man får k, dvs.:

$$5 = -\frac{1}{1} + 2 \cdot 1^{1.5} + k \Leftrightarrow 5 = -1 + 2 + k \Leftrightarrow k = 4$$

Så stamfunktionen til $f(x)$ i punktet $(1; 5)$ er

$$F(x) = -\frac{1}{x} + 2x^{1.5} + 4$$

Opgave 13 En undersøgelse har vist, at sammenhængen mellem det totale kvælstofindhold i vand og klorofylkoncentrationen i vandet kan beskrives ved

$$\ln(y) = 1{,}574 \cdot \ln(x) - 7{,}948 \ ,$$

hvor x er det totale kvælstofindhold, og y er klorofylkoncentrationen.
Både x og y måles i µg/L.

a) Bestem klorofylkoncentrationen i vandet, når det totale kvælstofindhold er 1000 µg/L.

Sammenhængen mellem x og y kan også skrives på formen $y = b \cdot x^a$.

b) Bestem tallene a og b.

a) Vi indsætter $1000\mu g/L$ i x, så har man:

$$\ln(y) = 1.574 \cdot \ln(1000) - 7.948 \Leftrightarrow$$
$$e^{\ln(y)} = e^{2.925} \Leftrightarrow$$
$$y = 18.63422605$$

Dvs. når kvælstofindholdet er $1000\mu g/L$ så er klorofylkoncentrationen i vandet ca. $18.634\mu g/L$

b) Vi omskriver $\ln(y) = 1.574 \cdot \ln(x) - 7.948$ til formen for en potensfunktion. Vi har da:

$$\ln(y) = 1.574 \cdot \ln(x) - 7.948 \Leftrightarrow$$
$$\ln(y) = \ln(x^{1.574}) - 7.948 \ (*) \Leftrightarrow$$
$$\mathrm{e}^{\ln(y)} = \mathrm{e}^{\ln(x^{1.574}) - 7.948} \Leftrightarrow$$
$$y = x^{1.574} \cdot \mathrm{e}^{-7.948} \Leftrightarrow$$
$$y = 0.0003533681948 \cdot x^{1.574}$$

Hermed er modellen skrevet på formen

$$y = b \cdot x^a$$

Hvor $a = 1.574$ og $b = 0.0003533681948$

$(*)$: her anvendte jeg regnereglen $\ln(n) \cdot x = \ln(n^x)$