Interpretation und Diskussion

Meine Interpretation der Kaplan-Yorke-Vermutung

Ausgehend von meinen experimentellen und numerischen Ergebnissen:

Umschlagpunkt

sensitive Abhängigkeit

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{|\lambda_{i+1}|}$$

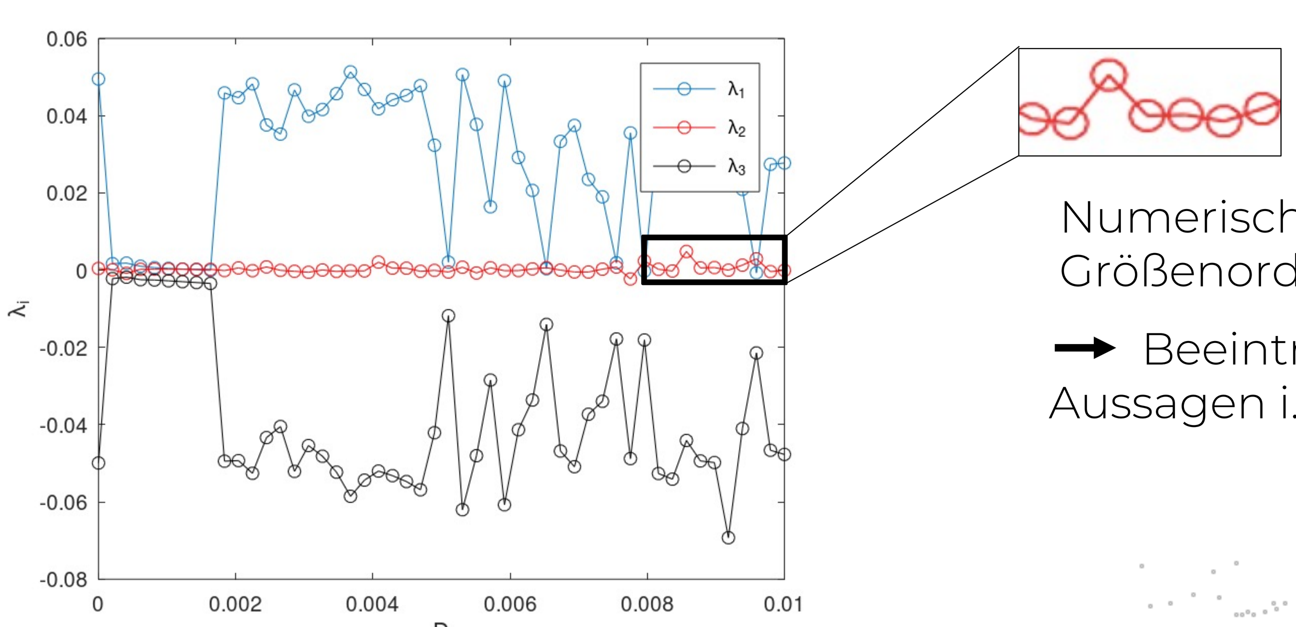
Attraktoreigenschaft

$j + \cdots$	**Ganzzahlige Komponente:** Relikt des Torus-Attraktors
$\sum_{i=1}^{j} \lambda_i$	**Divergente Phasenraum-Komponente:** Eigenschaft benachbarter Trajektorien zu divergieren ➞ Chaos
$\lvert\lambda_{i+1}\rvert$	**Konvergente Phasenraum-Komponente:** Ausdruck der Dissipation ➞ Attraktivität

Sonderfälle:

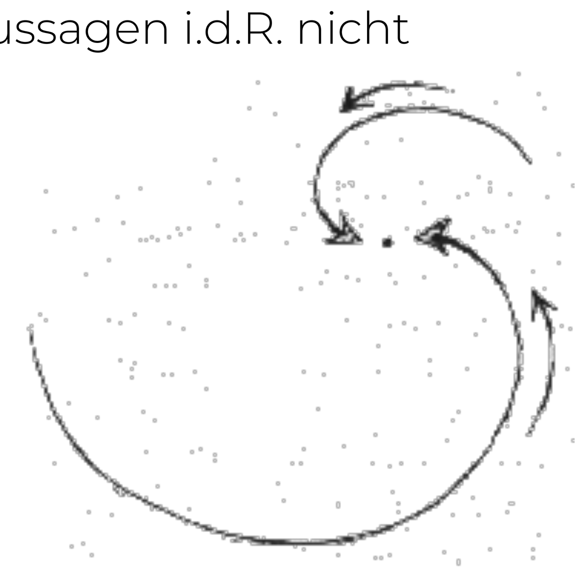
- Ist $|\lambda_{i+1}| = 0$, sind also alle Ljapunow-Exponenten positiv, so existiert kein Attraktor, da Schwingungen in keiner Komponente abklingen ($D_{KY} = nl$).
- Ist $\sum_{i=1}^{j} \lambda_i = 0$, sind also alle Ljapunow-Exponenten negativ, so ist der Bruch null und $j = 0$, ein streng periodischer Punktattraktor.

Numerische Aspekte



Numerische Fehler in der Größenordnung von $\pm 10^{-4}$

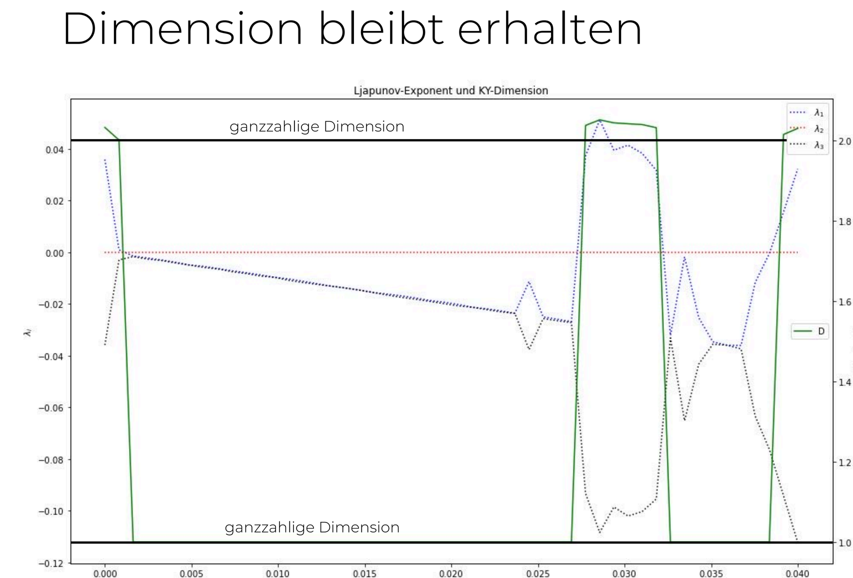
➞ Beeinträchtigt qualitative Aussagen i.d.R. nicht

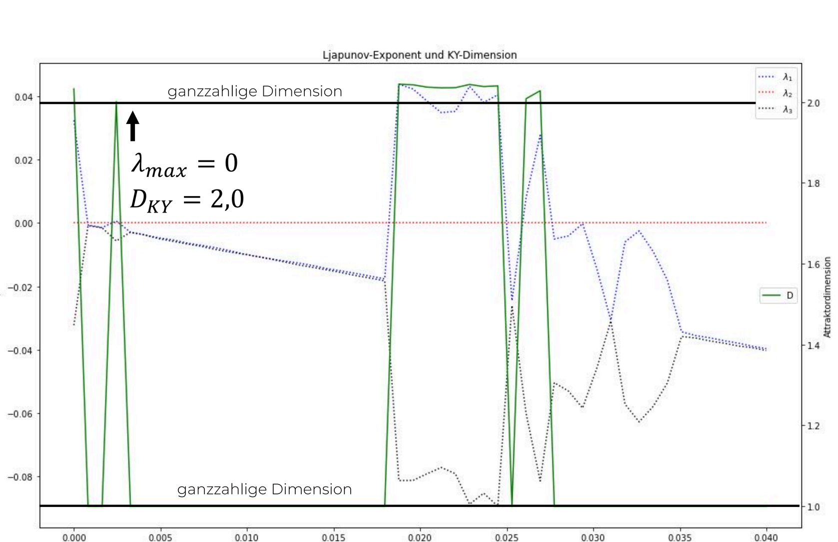


Ausnahme: λ_2 wird durch Fehler negativ.

$$\lambda = \{-,-,-\}$$

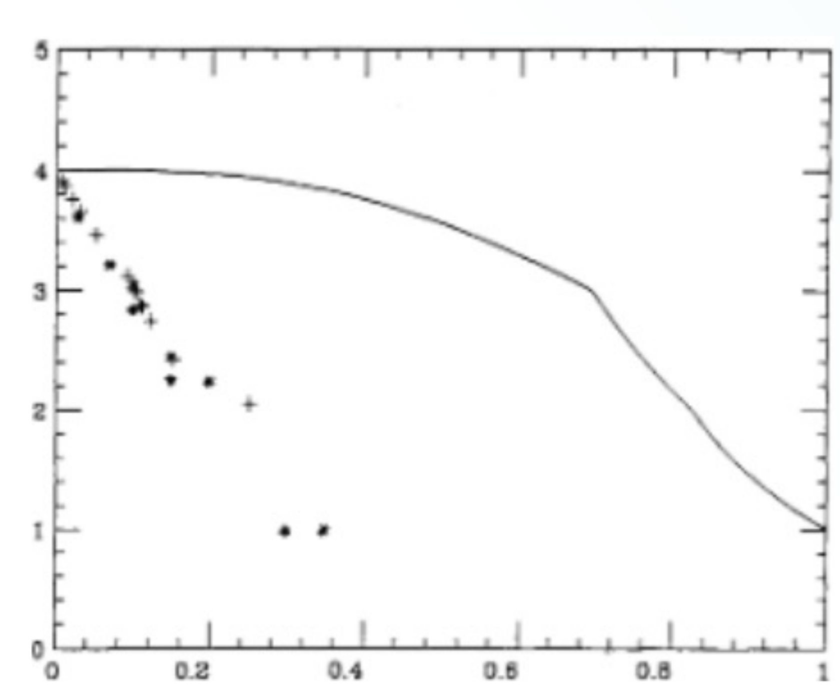
Bei $\lambda_2 \stackrel{!}{=} 0$: Punktattraktor löst sich auf, fraktale Dimension bleibt erhalten





Bezug zu weiteren Dimensionsbegriffen

Hausdorff-Dimension:



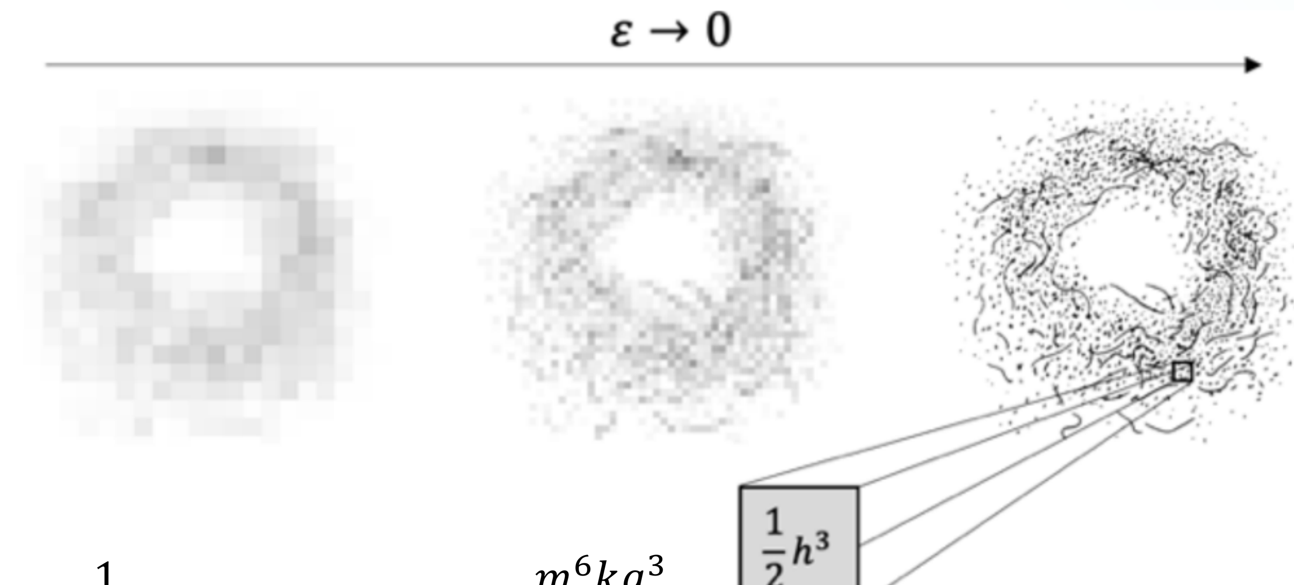
Kaplan-Yorke-Dimension ist **Obergrenze** für Hausdorff-Dimension des Attraktors!

Schlussfolgerung: Meine modellierte Bifurkation physikalisch möglich.

Analytische Grenze und numerische Werte der Hausdorff-Dimension des Attraktors einer erzwungenen Schwingung bei Veränderung der Dämpfung (vgl. Hattori et al., 1993)

Minkowski-Dimension:

$\varepsilon \to 0$



$$\frac{1}{2}h^3 \approx 1{,}4546 \cdot 10^{-100} \frac{m^6 kg^3}{s^3}$$

Verpixeln des Attraktors für Minkowski-Dimension ähnelt minimalen Wirkungsvolumina des quantisierten Phasenraums (s. Poster 4).

Fazit

Das konnte ich herausfinden:

- Der Übergang von Ordnung zu Chaos ist am Attraktor einsehbar, bei chaotischen μ-Werten franst die Torus-Oberfläche aus. ✓
- Eine sprunghafte Veränderung der Attraktordimension bedarf keiner sprunghaften Veränderung der Systemparameter. ✓
- Die sich bei scheinbar willkürlichen μ-Werten ereignenden qualitativen Systemveränderungen geschehen an den Umschlagpunkten j des Ljapunow-Spektrums. ✓
- Numerisches Rauschen kann in Simulationen einen Punktattraktor imitieren, der sich durch Fixierung von λ_2 auflöst. ✓
- Die fraktalen Strukturen im Phasenraum erzeugen der Quantenunschärfe gleichende Effekte (s. Poster 4). ?

Bildquellen: (1) Dimension Estimate of the Global Attractor for Forced Oscillation Systems; (2) Die Chaos-Theorie oder warum das Apfelmännchen sich selbst ähnlich ist und Computer einfach anfangen, falsch zu rechnen, (3) Ordnung und Chaos – Attraktoren, https://www.lenne-schule.de/fachb/inf/index.asp?wahl=3, (4) https://www.pngwing.com/de/free-png-ybjqa