

Matematik B-niveau HF

1. juni 2018

Dette er minimale løsningsskitser til HF B-niveau eksamen d. 01/06/18. Af CAS kræves: Maple 2020.

NB: Dette er **ikke** en elevbesvarelse. E-mail: matematikuniverset@hotmail.com

Delprøve 1.

Opgave 1.

- (a) Lad andengradsligningen være givet ved

$$x^2 - 8x + 15 = 0. \quad (1)$$

Aflæs koefficienterne, $a = 1$, $b = -8$ og $c = 15$. Diskriminanten bestemmes

$$d = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 15 = 64 - 60 = 4. \quad (2)$$

Da $d > 0$ eksisterer der to reelle løsninger til ligningen.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 2}{2} = 4 \pm 1 = \begin{cases} 4 + 1 = 5 \\ 4 - 1 = 3 \end{cases} \quad (3)$$

Dvs. $x = 3 \vee x = 5$.

Opgave 2.

- (a) Funktionsværdien $f(2)$ bestemmes.

$$f(2) = 2^4 - 5 \cdot 2 = 6. \quad (4)$$

- (b) Funktionen differentieres.

$$f'(x) = (x^4 - 5x)' = 4x^3 - 5. \quad (5)$$

Opgave 3.

- (a) Man kan udvælge på $K(8, 2)$ måder, dvs.

$$K(8, 2) = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2 \cdot 6!} = \frac{56}{2} = 28. \quad (6)$$

Dvs. oprydningssholdet kan udvælges på 28 forskellige måder.

- (b) Antal gunstige delt antal mulige, så sandsynligheden for, at oprydningsholdet består af 2 drenge er

$$P(2 \text{ drenge}) = \frac{K(6,2)}{K(8,2)} = \frac{15}{28}. \quad (7)$$

Alternativt kan man udregne, hvor man udtrækker en dreng af gruppen på 6 drenge og trækker en fra den totale mængde af personer.

$$P(2 \text{ drenge}) = \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{28}. \quad (8)$$

Opgave 4.

- (a) Tallet $a < 0$, da parablens grene vender nedad, dvs. grafen er konkav.
Tallet $c > 0$, da grafen for f skærer den positive del af y -aksen.
- (b) Tallet $b > 0$, da hældningen for tangenten til grafen for f i punktet $(0, c)$ er positiv.
Alternativt: Da toppunktet for f ligger i første kvadrant, dvs. til højre for y -aksen og $a < 0$, så følger det at $b > 0$.
Tallet $d > 0$ kan ses direkte, da grafen for f har skæring med førsteaksen i netop to steder.

Konklusion: $a < 0$, $b > 0$, $c > 0$ og $d > 0$.

Opgave 5.

- (a) Ressourceskemaet kan ses nedenfor.

Ressourceskema	Mysli A	Mysli B	Maksimum
Havregryn i kg	0.50kg	0.25kg	2000kg
Mandler i kg	0.20kg	0.15kg	1000kg

OBS: Denne type opgave indgår ikke til din skriftlige eksamen.

Opgave 6.

- (a) Af punktet $P(0, 4)$ følger det, at $b = 4$, da $x = 0$. Tallet a bestemmes ved at løse en ligning.

$$36 = 4 \cdot a^2 \Leftrightarrow 9 = a^2 \Leftrightarrow a = \pm 3. \quad (9)$$

Da fremskrivningsfaktoren skal være større end 0, følger det så at $a = 3$ og $a = -3$ forkastes, dermed har man $a = 3$ og $b = 4$, dvs. $f(x) = 4 \cdot 3^x$.

Opgave 7.

- (a) Da linjen m står vinkelret på l , så kan hældningskoefficienten for m findes ud fra hældningskoefficienten for l . Med $a = 3$ og ligningen $a \cdot c = -1$ kan c findes, hvor c er hældningskoefficienten for m .

$$3 \cdot c = -1 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{3}. \quad (10)$$

Hældningskoefficienten for m er $c = -\frac{1}{3}$.

Opgave 8.

(a) Arealet af rektanglet:

$$A_{\text{rektangel}} = 10 \cdot 6 = 60. \quad (11)$$

Arealet af hvid trekant:

$$T_{\text{hvid trekant}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 = 6. \quad (12)$$

Arealet af rødt område:

$$A_{\text{rødt område}} = A_{\text{rektangel}} - T_{\text{hvid trekant}} = 60 - 6 = 54. \quad (13)$$

(b) Man opstiller en formel for det røde område som funktion af x . Arealet af rektanglet:

$$A_{\text{rektangel}} = 10 \cdot 6 = 60. \quad (14)$$

Arealet af hvid trekant:

$$T_{\text{hvid trekant}} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot x = 3x. \quad (15)$$

Arealet af rødt område:

$$A_{\text{rødt område}} = A_{\text{rektangel}} - T_{\text{hvid trekant}} = 60 - 3x, \quad 0 < x < 10. \quad (16)$$

Delprøve 2.

Se næste side. Løsninger er lavet i Maple 2020.

Pdf-fil eksporteret til LaTeX.

Matematik B delprøve 2, 1. juni 2018.

Vi forventer folk har opgavesættet ved hånden.

Opgave 9:

restart : with(Gym) :

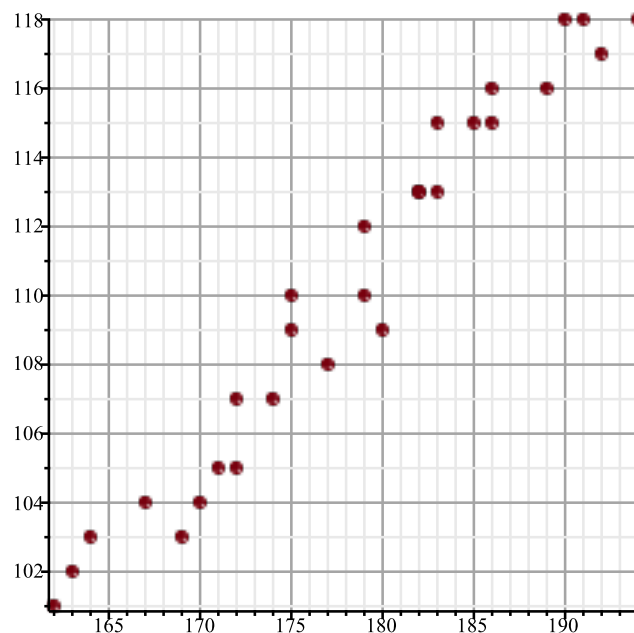
Alt data indlæses i Maple.

Legemshoejde := [162, 163, 164, 169, 167, 170, 171, 172, 172, 174, 177, 175, 180, 175, 179, 179, 182, 183, 182, 186, 185, 183, 186, 189, 192, 190, 191, 194] :

Navlehoejde := [101, 102, 103, 103, 104, 104, 105, 105, 107, 107, 108, 109, 109, 110, 110, 112, 113, 113, 113, 115, 115, 115, 116, 116, 117, 118, 118, 118] :

(a) Et punktplot laves vha. kommandoen nedenfor.

punktPlot(Legemshoejde, Navlehoejde)



(b) Tallene a og b kan bestemmes vha. lineær regression.

f(x) := evalf[5](LinReg(Legemshoejde, Navlehoejde, x)) :

f(x)

$$0.58561 x + 5.8082$$

(1)

Dvs. $a = 0.58561$ og $b = 5.8082$.

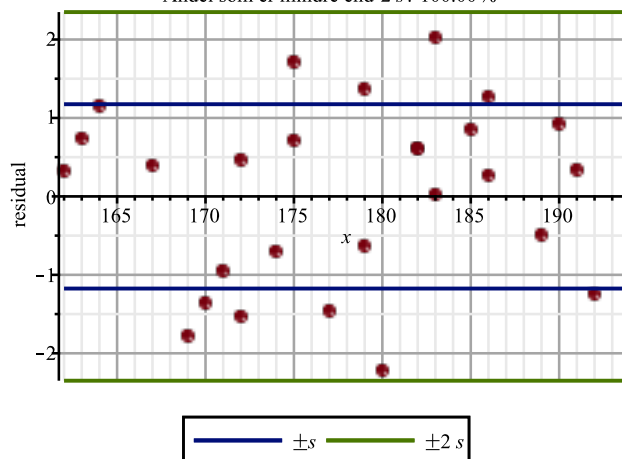
(c) Residualplottet samt residualspredningen plottes og bestemmes.

`plotResidualer(Legemshoejde, Navlehoejde, LinReg)`

Residualspredning $s = 1.17478611663797$

Andel som er mindre end s : 60.71 %

Andel som er mindre end $2s$: 100.00 %



Residualspredningen er $s = 1.175$. Ud fra plottet ser man, at residualerne er godt spredt, hvorfor modellen er meget anvendelig. Residualspredningen ser umiddelbart ud til at være god, da denne er lille trods stigningen af y -værdierne.

Opgave 10:

`restart : with(Gym) :`

Funktionen defineres.

$$f(x) := \frac{1834}{1 + 5.733 \cdot \exp(-0.041 \cdot x)} :$$

(a) År 2010 svarer til $x = 60$, da $2010 - 1950 = 60$. Dermed er $f(60) = 1231.038901$, dvs. i år 2010 var befolkningstallet i Indien 1231 mio. ifølge modellen.

(b) Man udregner $f'(60) = 16.59379024$, dette tal fortæller, at i år 2010 forøgede Indiens befolkningstal hvert år med 16.6mio. ifølge modellen.

Opgave 11:*restart : with(Gym) :*Fra teksten har man $X \sim b(50, 0.25)$.**(a)** Sandsynligheden for at der blandt de 50 er netop 10 'langtidssingler'.

$$P(X=10) = \binom{50}{10} \cdot 0.25^{10} \cdot (1 - 0.25)^{50-10}$$

$$P(X=10) = 0.09851840993 \quad (2)$$

Maple kan også.

$$P(X=10) = \text{binpdf}(50, 0.25, 10)$$

$$P(X=10) = 0.09851840993 \quad (3)$$

Dvs. sandsynligheden er ca. 9.85%

(b) Det mest sandsynlige er ikke nødvendigvis altid μ . Men, det vil være en god idé at regne den.

$$\mu = 50 \cdot 0.25$$

$$\mu = 12.50 \quad (4)$$

Man udregner $P(X=11)$, $P(X=12)$ og $P(X=13)$.

$$P(X=11) = \text{binpdf}(50, 0.25, 11)$$

$$P(X=11) = 0.1194162545 \quad (5)$$

$$P(X=12) = \text{binpdf}(50, 0.25, 12)$$

$$P(X=12) = 0.1293676090 \quad (6)$$

$$P(X=13) = \text{binpdf}(50, 0.25, 13)$$

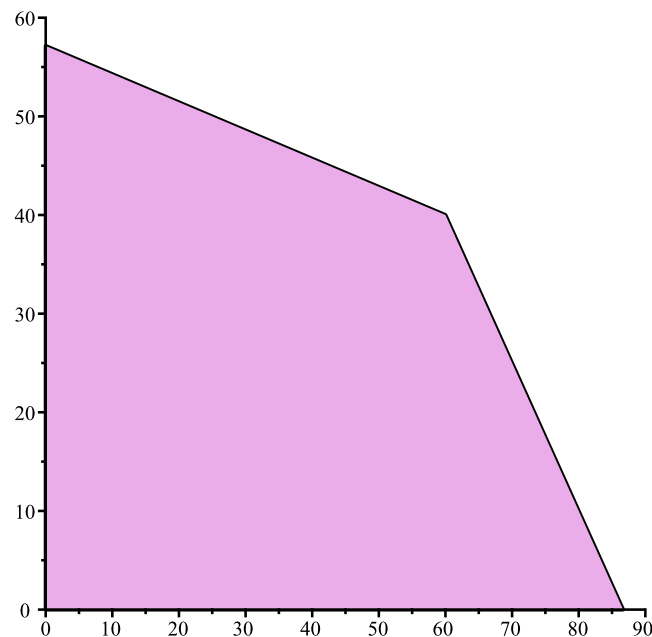
$$P(X=13) = 0.1260504908 \quad (7)$$

Opgave 12:

restart : with(Gym) : with(plottools) : with(plots) :

(a) Polygonet laves nedenfor.

display(polygon([[0, 0], [0, $\frac{400}{7}$], [60, 40], [$\frac{260}{3}$, 0]]), color=plum, thickness=1, view=[0 ..90, 0 ..60])



(b) Koordinatsættene til hvert af hjørnepunkterne bestemmes.

Man kan på forhånd vide, at $(0, 0)$ er et punkt. Skæring med y-aksen er et punkt samt skæring med x-aksen er et punkt. Man benytter de mindste hhv. y- og x-værdier.

$$y = \text{solve}(2x + 7y = 400, y) \Big|_{x=0}.$$

$$y = 57.14285714 \quad (8)$$

$$x = \text{solve}(2x + 7y = 400, x) \Big|_{y=0}.$$

$$x = 200. \quad (9)$$

$$y = \text{solve}(3x + 2y = 260, y) \Big|_{x=0}.$$

$$y = 130. \quad (10)$$

$$x = \text{solve}(3x + 2y = 260, x) \Big|_{y=0}.$$

$$x = 86.66666667 \quad (11)$$

$$\text{solve}(\{3x + 2y = 260, 2x + 7y = 400\})$$

$$\{x = 60, y = 40\} \quad (12)$$

Dermed er hjørnepunkterne

$A(0, 0)$, $B(0, 57.1)$, $C(60, 40)$, $D(86.7, 0)$.

(c) Niveaukurven er $f(x, y) := 30x + 40y$:

Indsæt hjørnepunkterne.

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, 57.1) = 2284.0$$

$$f(60, 40) = 3400$$

$$f(86.7, 0) = 2601.0$$

Den største fortjeneste kan fås, hvis man får solgt 60 Pind og 40 Kævlé.

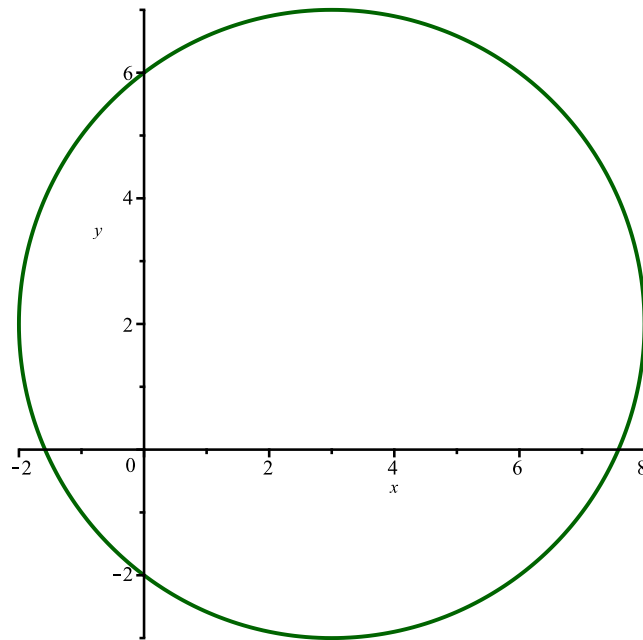
OBS: Denne type opgave indgår ikke til din skriftlige eksamen.

Opgave 13: En rigtig GeoGebra opgave...

restart : with(Gym) : with(plots) : with(plottools) :

(a) Cirklen tegnes vha. Maple.

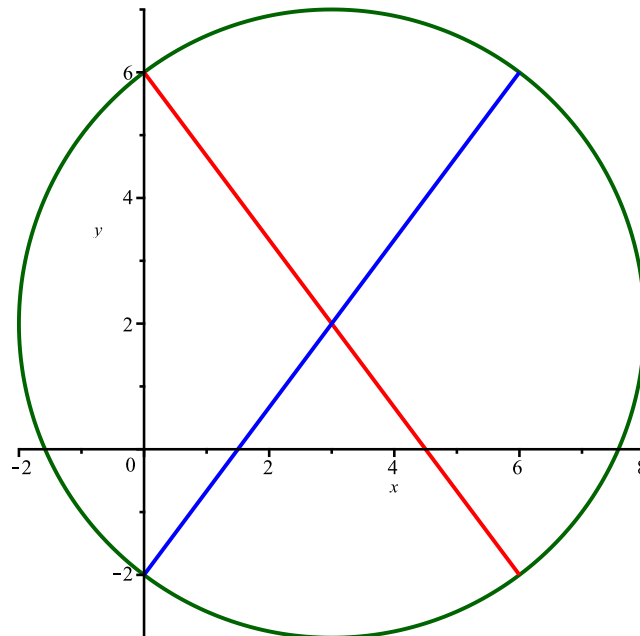
implicitplot((x - 3)² + (y - 2)² = 25, x = -2 .. 8, y = -3 .. 7, color = "DarkGreen")



Ligningen er på formen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, hvor $C(a, b)$ er centrum og r er radius. Man aflæser, at $C(3, 2)$ og $r = 5$.

(b) Man tegner cirklen og de to linjestykker.

$$\text{display}(\text{implicitplot}((x-3)^2 + (y-2)^2 = 25, x=-2..8, y=-3..7, \text{color} = \text{"DarkGreen"}), \text{line}([0, 6], [6, -2], \text{color} = \text{red}), \text{line}([0, -2], [6, 6], \text{color} = \text{blue}))$$



Koordinatsættene er $A(0, 6)$ og $B(6, -2)$ eller $A(0, -2)$ og $B(6, 6)$.

(c)

Man bestemmer hældningstallet for begge linjestykker. Den røde benævnes med a og den blå benævnes med c .

$$a = \frac{6 - (-2)}{0 - 6}$$

$$a = -\frac{4}{3} \quad (13)$$

$$b = \frac{6 - (-2)}{6 - 0}$$

$$b = \frac{4}{3} \quad (14)$$

Vinklen mellem disse linjer bestemmes.

$$v = \text{evalf}[6] \left(180 - \left(\text{invTan} \left(\frac{4}{3} \right) - \text{invTan} \left(-\frac{4}{3} \right) \right) \right)$$

$$v = 73.7399 \quad (15)$$

Dvs. $v = 73.7399^\circ$ er den spidse vinkel mellem linjestykkerne

Man kan anvende vektorer, men det er ikke pensum. Men, det skader ikke at vise, hvis du alligevel skal på matematik A.

$$\overrightarrow{AB_1} := \langle 6 - 0, -2 - 6 \rangle :: \overrightarrow{AB_2} := \langle 6 - 0, 6 - (-2) \rangle :$$

Vinklen mellem vektorerne bestemmes.

$$v = \text{evalf}[7] \left(180 - \text{vinkel}(\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}) \right)$$

$$v = 73.7398 \quad (16)$$

Opgave 14:*restart : with(Gym) :*

$$f(x) := x^3 + 6x^2 + 9x + 6 :$$

(a) Monotoniforholdene for f bestemmes. Først løses ligningen

$$\text{solve}(f'(x) = 0)$$

$$-1, -3$$

(17)Man får $x = -3 \vee x = -1$ som nulpunkter. Man foretager fortegnsvariation. Vælg -4, -2 og 0.

$$f'(-4); f'(-2); f'(0)$$

$$9$$

$$-3$$

$$9$$

(18)

Et monotoniskema konstrueres.

$$\left[\begin{array}{cccccc} x & & -3 & & -1 & \\ f'(x) & + & 0 & - & 0 & + \\ f(x) & \nearrow & \rightarrow & \searrow & \rightarrow & \nearrow \end{array} \right]$$

Man kan derfor slutte, at $f(x)$ er voksende i intervallet $]-\infty; -3]$ og $[-1; \infty[$ samt at $f(x)$ er aftagende i intervallet $[-3; -1]$.

En anden metode er at bruge anden afledede. På matematik A lærer man om anden afledede test.

Anvend nulpunkterne i anden afledede. Hvis $f''(x_0) < 0$ er der lokalt maksimum og hvis $f''(x_0) > 0$ er der lokalt minimum.

$$f''(-3) = -6$$

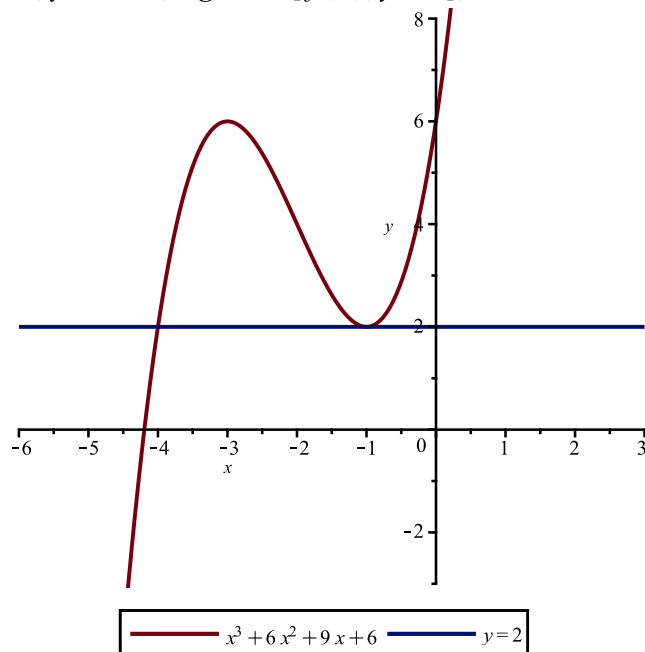
Dvs. der er lokalt maksimum i $x = -3$.

$$f''(-1) = 6$$

Dvs. der er lokalt minimum i $x = -1$.

(b) Grafen for f og $y=2$ tegnes.

`plot([f(x), 2], x=-6..3, y=-3..8, legend=[f(x), y=2])`



(c)

Man benytter resultaterne fra (a), dvs. fra maksimum til minimum. Man kan finde de respektive y-værdier.

$$f(-3) = 6$$

$$f(-1) = 2$$

Mellem disse y-værdier har man, at $y = k$ kan have tre skæringspunkter med grafen. Hvis $y = 1.9$ eller $y = 6.1$ vil denne kun have et skæringspunkt med grafen. Hvis $y = 2$ eller $y = 6$ vil denne have to skæringspunkter med y-aksen, hvor man vil have et dobbelt punkt. Endelig, hvis man har y-værdier mindre end 6 og større end 2 vil man få præcis tre skæringspunkter, så $k \in]2; 6[$.