الوحـــدة الثالثـــة

المتتاليـــات

تعريف: المتتالية هي تطبيق مجاله ط^{H} أو جزء منها ومجالها المقابل أي مجموعة .

مثال: هل التطبيق ط^{H} ⟵ س الذي قاعدته ح$_{ن}$ = $\frac{1}{ن}$, ن ∈ ط^{H} يمثل متتالية. الجواب: نعم لأن مجاله ط^{H} .

مثال: ح$_{ن}$ = $\frac{1}{1+ن}$ هل يمثل حد عام لمتتالية حيث ن ∈ ط ؟

الجواب: كلا لأن مجاله ط ⊄ ط^{H} .

هل التطبيق {1, 2, 3} ⟵ص يمثل متتالية ؟

نعم لأن مجال التطبيق {1, 2, 3 ⊂ ط^{H} } .

التعبير عن المتتالية: (1) أن نذكر عناصر المتتالية بينها فواصل

بالشكل <1, 3, 5,0000>

(2)بالصورة التالية < ح$_{ن}$ > فإذا كان عدد عناصرها (محدود) قلنا متتالية (منتهية) و إذا كان غير محدود قلنا غير منتهية.

بملاحظة هذه الحدود قد نحكم على المتتالية بأنها تزايدية أو تناقصية .

- **<u>قاعدة</u>** < ح$_{ن}$ > تزايدية إذا كان ح$_{ن+1}$ > ح$_{ن}$.
- < ح$_{ن}$ > تناقصية إذا كان ح$_{ن+1}$ < ح$_{ن}$.

مثال: < $\frac{1}{ن}$ > = < 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, ... $\frac{1}{ن}$ > واضح أنها تناقصية أو بشكل آخر ح$_{ن+1}$ = $\frac{1}{ن+1}$ =, ح$_{ن}$ = $\frac{1}{ن}$ بما ان $\frac{1}{ن+1}$ < $\frac{1}{ن}$

⟸ ح$_{ن+1}$ < ح$_{ن}$ ∴ تناقصية.

<u>تمارين و مسائل (1, 3)</u>

[1] بين أيا من الدوال التالية تمثل متتالية – أذكر السبب.

أ) ح$_{ن}$ = $2^{ن}$, ن ∈ ص . الحل: ليست متتالية لأن ص ⊄ ط^{H} .

ب) ح (ن) = $ن^{2} - 3ن$, ن ∈ { 1 , 3 , 4 , 5 , 6 } .

الجواب: نعم متتالية لأن { 1 , 3 , 4 , 5 , 6 } ⊂ ط^{H} .

ج) ح (ن) = $\frac{3}{2ن}$, ن ∈ ط , الجواب: ليست متتالية لأن ط ⊄ ط^{H} .

د) ح (ن) = $\sqrt{ن+3}$, ن ∈ ط^{H}, الجواب: متتالية .

هـ) ح (ن) = $\frac{1}{(ن+1)^{2}}$, ن ∈ ح , الجواب: ليست متتالية لأن ح ⊄ ط^{H} .

[2] أكتب كلا من المتتاليات التالية مكتفيا بحدودها الخمسة الأولى.

أ) < هـ$_{ن}$ > حيث هـ$_{ن}$ = $2^{ن} - 2ن$.

الحل: $هـ_1 = 2^1 - 2 = 0$, $هـ_2 = 2^2 - 2 \times 2 = 0$

$هـ_3 = 2^3 - 2 \times 3 = 8 - 6 = 2$, $هـ_4 = 2^4 - 2 \times 4 = 16 - 8 = 8$

$هـ_5 = 2^5 - 2 \times 5 = 32 - 10 = 22$.

ب) $< د_ن >$ حيث $د_ن = (-1)^{ن+1} \times ن^2$

الحل: $د_1 = (-1)^2 \times (1)^2 = 1 \times 1 = 1$, $د_2 = (-1)^3 \times (2)^2 = -4$

$د_3 = (-1)^4 \times (3)^2 = 9$. , $د_4 = (-1)^5 \times (4)^2 = -16$

$د_5 = (-1)^6 \times (5)^2 = 25$.

جـ) $< ل_ن >$ حيث $ل_ن = (-1)^ن (2ن + 1)$

الحل: $ل_1 = (-1)^1 (2\times1+1) = -3$, $ل_2 = (-1)^2 (2\times1+1) = 5$

$ل_3 = (-1)^3 (2\times1+1) = -7$, $ل_4 = (-1)^4 (2\times1+1) = 9$

$ل_5 = (-1)^5 (2\times1+1) = -11$.

د) $< \frac{3ن-1}{4ن+5} >$ الحل: $ح_ن = \frac{3ن-1}{4ن+5} \Rightarrow ح_1 = \frac{3-1}{4+5} = \frac{2}{9}$

$ح_2 = \frac{6-1}{8+5} = \frac{5}{13}$, $ح_3 = \frac{9-1}{12+5} = \frac{8}{17}$

$ح_4 = \frac{12-1}{16+5} = \frac{11}{21}$, $ح_5 = \frac{15-1}{20+5} = \frac{14}{25}$

هـ) $< \frac{\text{ن}}{2^{\text{ن}}} >$ الحل: $\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}}{2^{\text{ن}}} \Leftarrow \text{ح}_1 = \frac{1}{2}$, $\text{ح}_2 = \frac{2}{4}$,

$\text{ح}_3 = \frac{3}{8}$, $\text{ح}_4 = \frac{4}{16}$, $\text{ح}_5 = \frac{5}{32}$.

[3] أكتب الحدود الأربعة الأولى للمتتاليات التي حدها العام معطى , ثم أوجد الحد العاشر .

أ) د (ن) $= 2^{\text{ن}}$ الحل: * د(1) $= 2^1 = 2$, * د (2) $= 2^2 = 4$,

* د (3) $= 2^3 = 8$, * د (4) $= 2^4 = 16$

الحد العاشر * د (10) $= 2^{10} = 1024$.

ب) د (ن) $= \frac{2\text{ن}}{1+\text{ن}^2}$ الحل:* د (1) $= \frac{1\times2}{1+(1)^2} = \frac{2}{1+1} = \frac{2}{2} = 1$.

* د (2) $= \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5}$, * د (3) $= \frac{6}{1+9} = \frac{6}{10}$

* د (4) $= \frac{4\times2}{1+16} = \frac{8}{17}$, * د (5) $= \frac{20}{1+100} = \frac{20}{101}$.

جـ) د(ن) $= (-1)^{\text{ن}}(2\text{ن}+1)$ الحل: د(1)$=(-1)^1(1+2)=-3$.

د(2) $= (-1)^2(4+1) = 1\times5 = 5$. , د(3) $= (-1)^3(6+1) = -7$.

د(4) $= (-1)^4(8+1) = 9$,

الحد العاشر د(10) $= (-1)^{10}(2\times1+10) =$ 1(21)=21 # .

د) د (ن) $= -1^{\frac{2}{\text{ن}}}$ الحل: د (1) $= -1^{\frac{2}{1}} = -1$

د (2) = −1 = $\frac{2}{2}$ − 1 = 0 ، د (3) = −1 = $\frac{2}{3}$ = $\frac{1}{3}$

د (4) = −1 = $\frac{2}{4}$ − 1 = $\frac{1}{2}$ ،

الحد العاشر د (10) = −1 = $\frac{2}{10}$ − 1 = $\frac{1}{5}$ = $\frac{4}{5}$.

هـ) د(ن) = جتا $\frac{\pi}{2}$ ن الحل: د(1) = جتا $\frac{\pi}{2}$ × 1 = جتا 90 = 0

د(2) = جتا $\frac{\pi}{2}$ × 2 = جتا π = −1

د(3) = جتا $\frac{3\pi}{2}$ = جتا 270 = 0

د(4) = جتا $\frac{\pi}{2}$ × 4 = جتا (2π) = جتا 0 = 1

الحد العاشر د(10) = جتا $\frac{\pi}{2}$ × 10 = جتا (5π)

جتا $(\pi + 2\pi + 2\pi)$ = جتا π = −1

ز) د (ن) = $\frac{2}{5}$ الحل: د (1) = $\frac{2}{5}$ ، د (2) = $\frac{2}{5}$

د (3) = $\frac{2}{5}$ ، د (4) = $\frac{2}{5}$ ، الحد العاشر د (10) = $\frac{2}{5}$

[4] أوجد الحدين العاشر والرابع والخمسون للمتتاليات التالية :

أ) $\frac{\text{ن}}{\text{ن}+1}$ < الحل: $ح_{10}$ = $\frac{10}{10+1}$ = $\frac{10}{11}$.

$ح_{54}$ = $\frac{54}{54+1}$ = $\frac{54}{55}$.

ب) <12> الحل: $ح_{10} = 12$, $ح_{54} = 12$

جـ) $(-1)^{ن} (3ن+2)$ الحل: $ح_{10} = (-1)^{10} (2+30) = 32$

$ح_{54} = (-1)^{54} (3\times1+54) = +163$

[5] أكتب الخمسة الأولى لكل متتالية مما يأتي ثم مثلها بيانياً .

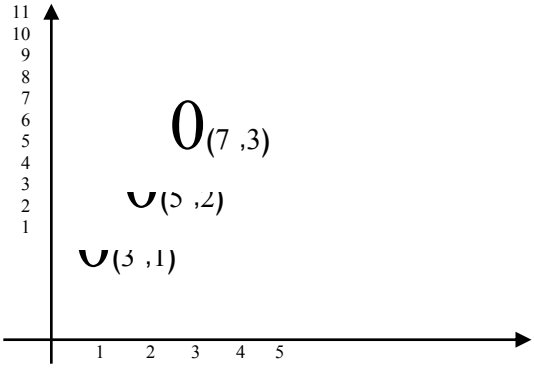
أ) <2ن+1> الحل: $ح_1 = 2\times1+1=3$ (1, 3)

$ح_2 = 2\times2+1=5$ (2, 5)

$ح_3 = 2\times3+1=7$ (3, 7)

$ح_4 = 2\times4+1=9$ (4, 9)

$ح_5 = 2\times5+1=11$ (5, 11)



ب) <$ن^2-1$> الحل: $ح_ن = ن^2-1$

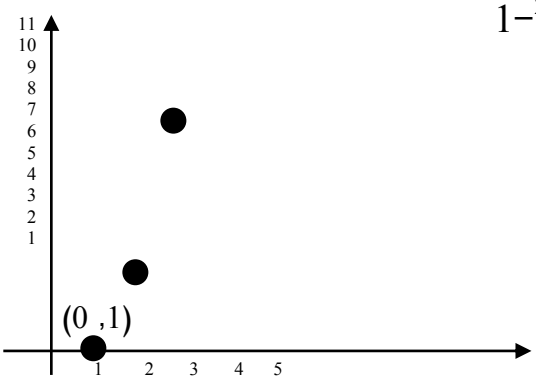
$ح_1 = (1)^2-1 = 0$ (1, 0)

$ح_2 = (2)^2-1 = 3$ (2, 3)

$ح_3 = (3)^2-1 = 8$ (3, 8)

$ح_4 = (4)^2-1 = 15$ (4, 15)

$ح_5 = (5)^2-1 = 25-1 = 24$ (5, 24)



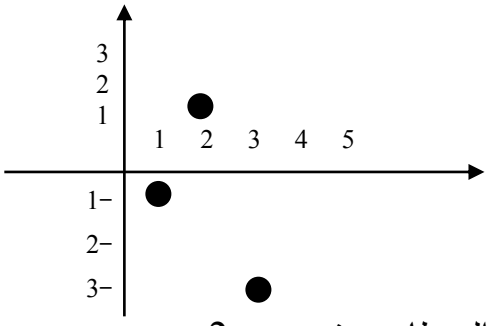
ج) $<(-1)^{ن}$ ن> الحل: $ح_1 = (-1)^1 \times 1 = -1$ $(-1, 1)$

$ح_2 = (-1)^2 (2) = 2$ $(2, 2)$

$ح_3 = (-1)^3 (3) = -3$ $(-3, 3)$

$ح_4 = (-1)^4 (4) = 4$ $(4, 4)$

$ح_5 = (-1)^5 (5) = -5$ $(-5, 5)$



[6] أكتب الحدود الستة الأولى للمتتالية المعطاة حيث ن ≤ 2

أ) $ح_1 = 1$, $ح_ن = 3\ ح_{ن-1} - 1$ ن ≤ 2

الحل: $ح_1 = 1$, $ح_2 = 3\ ح_{2-1} - 1 = 3ح_1 - 1 = 3 \times 1 - 1 = 2$

$ح_3 = 3\ ح_{3-1} - 1 = 3ح_2 - 1 = 3 \times 2 - 1 = 5$

$ح_4 = 3\ ح_{3} - 1 = 3 \times 5 - 1 = 15 - 1 = 14$

$ح_5 = 3\ ح_{4} - 1 = 3 \times 14 - 1 = 42 - 1 = 41$

$ح_6 = 3\ ح_{5} - 1 = 3 \times 41 - 1 = 123 - 1 = 122$

ب) $ح_1 = 1$, $ح_ن = 1 + \frac{4}{ح_{ن-1}}$ الحل: $ح_1 = 1$

أكمل .

$ح_2 = 1 + \frac{1}{ح} = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2$

$ح_3 = 1 + \frac{1}{ح_2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$

ج) $ح_1 = -2.24$, $ح_ن = 1.2\ ح_{ن-1} + 2.2$

الحل: $ح_2 = 1.2ح_1 + 2.2 = 1.2 \times - 2.24 + 2.2$

$= -2.688 + 2.2 = -0.488$

$ح_3 = 1.2ح_2 + 2.2 = 1.2 \times - 0.488 + 2.2 = - 0.5856 + 2.2 = 1.6144$

$ح_4 = 1.2ح_3 + 2.2 = 1.2 \times 1.6144 + 2.2 = 4.13728$.

$ح_5 = 1.2ح_4 + 2.2 = 1.2 \times 4.13728 + 2.2 = 7.164736$.

[7] أكتب الحد العام لكل متتالية من المتتاليات التالية:

أ) <1, 3, 5, 7, 00000> الحل: $ح_ن = 2ن - 1$.

ب) <(2×1) , (4×2) , (6×5) , 000> الحل: $ح_ن = (2ن-1) 2ن$.

جـ) <1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ 2 ,0000> الحل: $ح_ن = (-1)^{ن+1} \times \frac{1}{ن}$

د) < أ , أ ر, أ $ر^2$, 000000 > الحل: $ح_ن = أ ر^{ن-1}$.

هـ) < 0 , $\frac{1}{2}$, $1-\frac{1}{2}$,0000 > الحل: $ح_ن = \frac{1}{2}(2-ن)$.

و) < أ , أ + د , أ + 2د , 0000> الحل: $ح_ن = أ+(ن-1)$ د # .

[8] حدد أياً من المتتاليات الآتية تزايدية وأياً منها تناقصية أو غير ذلك .

أ) < $1+\frac{1}{ن}$ >

π

الحل: $ح_ن = 1 + \frac{1}{ن}$ | بما أن $\frac{1}{ن} > \frac{1}{ن+1}$

$ح_{ن+1} = 1 + \frac{1}{ن+1}$ | أضف 1 $\Leftarrow$ $1 + \frac{1}{ن} > 1 + \frac{1}{ن+1}$

$\Leftarrow ح_ن > ح_{ن+1} \Leftarrow$ المتتالية تناقصية .

ب) $< (-3)^ن >$ الحل: $ح_ن = (-3)^ن$

$ح_{ن+1} = (-3)^ن = (-3)^ن \times (-3)^1 = -3ح_ن$

إذا كان (ن) زوجي $\Leftarrow ح_ن > 0 \Leftarrow ح_{ن+1} < 0 \Leftarrow ح_ن > ح_{ن+1}$(تناقصية) .

إذا كان (ن) فردي $\Leftarrow ح_ن < 0 \Leftarrow ح_{ن+1} > 0 \Leftarrow ح_ن < ح_{ن+1}$(تزايدية) .

∴ لا يمكن أن نصفها بالتزايدية أو التناقصية .

جـ) $<(\frac{1}{2})^ن >$ الحل: $<(\frac{1}{2})^ن> = < \frac{1}{2^ن} > = < \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} ...>$

واضح أنها تناقصية .

د) $< جتا ن\pi >$ الحل: $< جتان\pi > = < جتا\pi , جتا 2\pi , جتا 3\pi , ... >$

$= < -1 , 1 , -1 , 1 , ... >$

لا تزايدية ولا تناقصية .