Matematik A niveau

Matematik Universet
Skriftlig eksamen i matematik A
gammel version

7. december 2018

Delprøve 1

Opgave 1. Vi reducerer følgende udtryk

$$\begin{aligned}(a+b)^2 - b(a+b) &= a^2 + b^2 + 2ab - ab - b^2 \\ &= a^2 + ab \\ &= a(a+b)\end{aligned}$$

Her anvendte vi første kvadratsætning. Både sidste og andensidste linje kan accepteres som facit.

Opgave 2. Størrelsesforholdet mellem trekanterne betegnes med k og forholdet beregnes.

$$k = \frac{|DE|}{|BC|} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Længden $|AC|$ kan bestemmes vha. Pythagoras.

$$|AC| = \sqrt{|BC|^2 - |AB|^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$$

Længden AD bestemmes.

$$|AD| = k \cdot |AB| = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12$$

Endelig er længden $|BD|$ beregnet ved

$$|BD| = |AD| - |AB| = 12 - 8 = 4$$

Opgave 3. Hvis vektorerne skal være parallelle, så gælder der at $det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0$. Det giver anledning til ligningen

$$det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ t & 2-t \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 2 \cdot (2-t) - t \cdot (-3) \Longleftrightarrow 4 + t = 0 \Longleftrightarrow t = -4$$

Dvs. $t = -4$ does the trick!

Opgave 4. Først bestemmes $f'(x)$ i den angivende funktion.

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3}x^{3-1} + 2 \cdot 2x^{2-1} - 12x^{1-1} + 0 = x^2 + 4x - 12$$

Dernæst løses ligningen $f'(x) = 0$.

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \iff (x+6)(x-2) = 0 \iff x = -6 \vee x = 2$$

Du kan med fordel verificere vha. determinantmetoden. Vi bestemmer nu den anden afledede, dvs. $f''(x)$.

$$f''(x) = (f'(x))' = 2 \cdot x^{2-1} + 4x^{1-1} = 2x + 4$$

Vi indsætter $x = -6$ og $x = 2$ i $f''(x)$ og får

$$f''(-6) = 2 \cdot (-6) + 4 = -8 \quad -8 < 0, \text{lok. maks.}$$
$$f''(2) = 2 \cdot 2 + 4 = 8, \quad 8 > 0, \text{lok. min.}$$

Dvs. funktionen $f(x)$ er:
- voksende i intervallet $]-\infty;-6]$
- aftagende i intervallet $[-6;2]$
- voksende i intervallet $[2;\infty[$

Du kan med fordel lave fortegnsvariation, lave monotonilinje etc. Du skulle gerne få samme resultat.

Opgave 5. Det ses at alle tre grafer er eksponentielle funktioner af formen $y = ba^x$. En eksponentiel voksende funktion kræver $a > 0$ og en aftagende eksponentiel funktion kræver $0 < a < 1$.

Det ses, at $f(x)$ har en a-værdi der ligger mellem 0 og 1, det betyder, at $f(x)$ er aftagende. Derudover har $h(x)$ også samme a-værdi, så den er også aftagende. Da $h(x)$ har værdien -1, så er $h(x)$ forskudt med 1 ned af y-aksen. Det betyder, at $f(x)$ er graf for C, $h(x)$ er graf for B og ved udelukkelsesmetoden er $g(x)$ graf for A, men kan også ses fordi $g(x)$ har en a-værdi større end 1. Kort opsummeret.
- $f(x)$ for C
- $g(x)$ for A
- $h(x)$ for B

Opgave 6. Den angivende funktion f differentieres. Her anvendes reglen for sammensatte funktioner. Her er den indre funktion x^2 som differentieret er $2x$. Den ydre funktion er $3e^x + 4$ som differentieret er $3e^x$.

$$f'(x) = 2x \cdot 3e^{x^2} = 6xe^{x^2}$$

Indsættes $f'(x)$ i y' og $f(x)$ i y kan vi undersøge om begge sider passer. Altså med andre ord kan vi afgøre, om f er en løsning til differentialligningen.

$$y' = 2x(y-4) \iff 6xe^{x^2} = 2x(3e^{x^2} + 4 - 4) \iff 6xe^{x^2} = 6xe^{x^2}$$

Så f er en løsning til differentialligningen.

Delprøve 2

Opgave 7. Denne opgave besvares vha. Maple.

(a) Bemærk, at når man skal lave eksponentiel regression, så skal man starte årstallene med $x = 0, 1, 2, \ldots$ alt efter hvor mange årstal der er angivet. Så i denne delopgave er $x = 0$ år 2011

```
restart :; with(Gym) :
E1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5] :; E2 := [5202, 23023, 53734, 69277, 125379,
    226639] :
f(x) := ExpReg(E1, E2, x) :
f(x)
                8565.70912981435 1.99714685706667^x                (1)
```

Dvs. tallene a og b er hhv.

$$a \approx 1.997 \quad \text{og} \quad b \approx 8565.709$$

(b) Her løses ligningen $f(x) = 600000$. I Maple fås svaret.

```
f(x) = 600000
          8565.70912981435 1.99714685706667^x = 600000            (2)
  solve for x
  ---------->
                    [[x = 6.142897774]]                           (3)
```

Dvs. i løbet af år 2017 var antallet af daglige transaktioner med Bitcoin oversteget 600000. Hvis man skal være sikker på, at det er oversteget, så er det i begyndelsen af år 2018, da $f(7) > 600000$.

(c) Fordoblingstiden beregnes ved formlen $T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$, så vi får

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.99715)} \approx 1$$

Så for hvert år der går, fordobles antallet af daglige transaktioner med Bitcoins ifølge modellen.

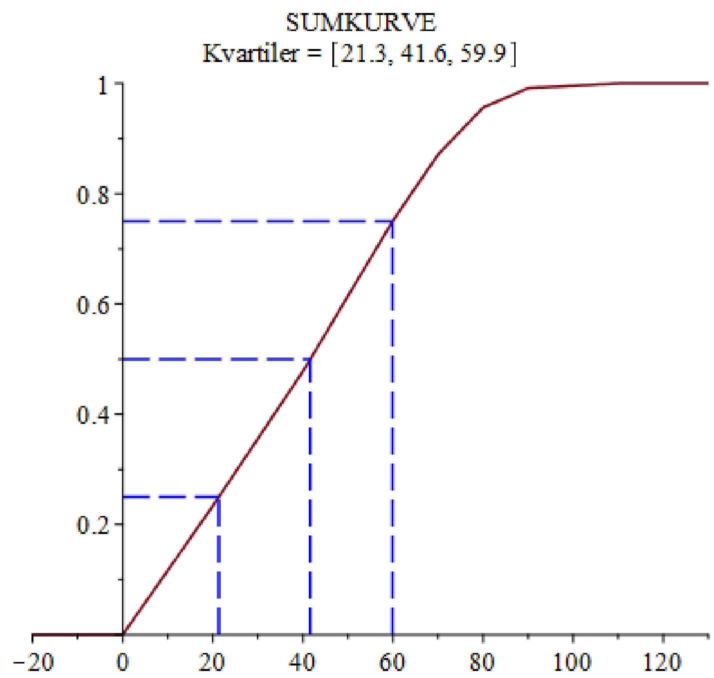
Opgave 8. Denne opgave besvares vha. Maple.

(a) I Maple opstilles en matrix, hvori de observerende værdier indtastes.

restart :; *with*(*Gym*) :; *with*(*LinearAlgebra*) :

$$OBS := \begin{bmatrix} 0..20 & 20..40 & 40..60 & 60..70 & 70..80 & 80..90 & 90..110 \\ 23.36 & 24.42 & 27.37 & 11.97 & 8.53 & 3.51 & 0.84 \end{bmatrix} :$$

plotSumkurve(*Transpose*(*OBS*))



De kumulerede frekvenser kan findes ved

frekvensTabel(*Transpose*(*OBS*))

observation	hyppighed	frekvens (%)	kumuleret (%)
0 .. 20	23.36	23.36	23.4
20 .. 40	24.42	24.42	47.8
40 .. 60	27.37	27.37	75.1
60 .. 70	11.97	11.97	87.1
70 .. 80	8.53	8.53	95.6
80 .. 90	3.51	3.51	99.2
90 .. 110	0.84	0.84	100

En lille bemærkning. I begge screenshots er der blevet anvendt with(LinearAlgebra): og dette er ikke nødvendigt. Pakken er indlæst, da matricen OBS ikke er en lang lodret matrix, dvs. matricen er ikke på formen 7×2 men 2×7 og det kan gym-pakken ikke lide. Derfor ordet "Transpose".

(b) Denne delopgave skal vi finde en ændring i antallet af danskere over pensionsalderen. Det gøres i Maple.

$$f(t) := sumkurve(Transpose(OBS), t)$$

$$f := t \mapsto sumkurve(OBS^{+}, t)$$

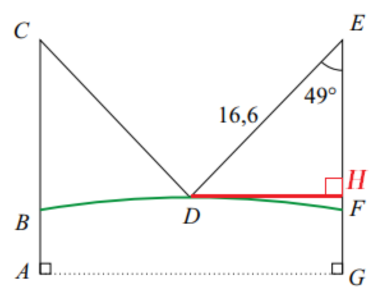
$$(f(67) - f(65)) \cdot 5700000$$

$$136458.000000000$$

Så det drejer sig omkring 136458 danskere.

Opgave 9. Denne opgave besvares vha. GeoGebra.

(a) Først tegnes trekanten så forklaringerne bliver lettere.



Længden $|DH|$ bestemmes vha. formlen $|DH| = |DE| \cdot \sin(E)$, så

$$|DH| = 16.6 \cdot \sin(49) \approx 12.52817903$$

Da skitsen er symmetrisk, så er

$$|AG| = 2 \cdot 12.52817903 = 25.05635806$$

Og det kan det sluttes, at vejen $|AG|$ har længden 25.06m

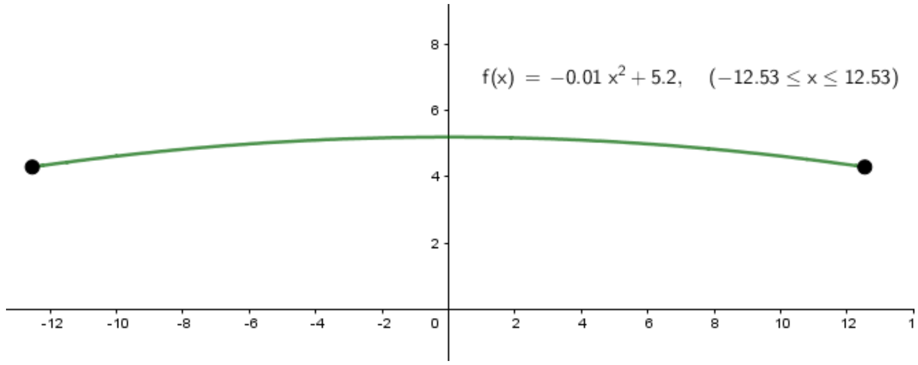
(b) Her anvendes formlen $y = a(x - r_1)(x - r_2)$. Denne opgave kan laves på mange måder. Bare parablen er korrekt! Det vides, at D er midten, dvs. punktet D kan svare til toppunktet i et koordinatsystem, hvorfor der er symmetri på begge sider af den lodrette linje. Højden er også kendt ved B og F. Dermed er

$$5.2 = a(0 - (-12.52817903))(0 - 12.52817903) + 4.3 \iff -0.0057341$$

Benyttes ligningen ovenfor igen uden toppunktet fås

$$y = -0.0057341(x - (-12.52817903))(x - 12.52817903) + 4.3 = -0.0057341x^2 + 5.2$$

Parablen er skitseret på næste side.



Bemærk, at GeoGebra afrunder. Det ER parablen.

Nu vises anden mulighed, hvor man ikke gør brug af symmetrien om D. Vi kender afstanden mellem A og G, som svarer til afstanden mellem r_1 og r_2. Vi kender toppunktet som er halvdelen afstanden mellem r_1 og r_2. Derudover kendes et par højder. Det giver ligningen

$5.2 = a(12.52817903 - 0)(12.52817903 - 25.05635806) + 4.3 \iff a = -0.005734117759$

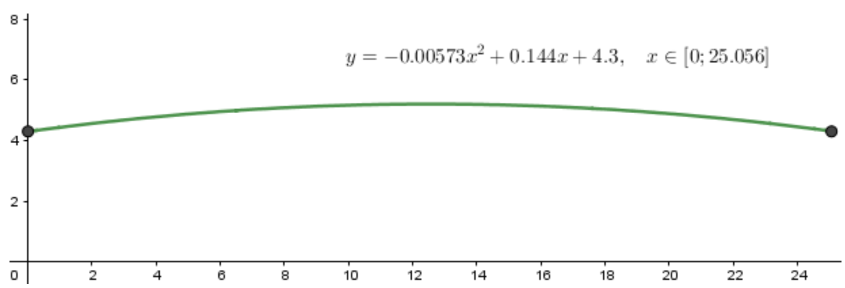
Så er den ønskede parabel fundet ved

$$y = -0.005734117759(x - 0)(x - 25.05635806) + 4.3$$

Afrundet er parablen ca.

$$y = -0.00573x^2 + 0.144x + 4.3, \qquad x \in [0; 25.056]$$

Parablen er skitseret nedenfor.



Opgave 10. Denne opgave handler om vektorer.

(a) Af de angivende punkter kan der opstilles en parameterfremstilling. Med A som fast punkt og en retningsvektor

$$\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} 0 - 17.3 \\ 20 - (-10) \\ 45 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17.3 \\ 30 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Og parameterfremstillingen som vi betegner l er

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 45 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -17.3 \\ 30 \\ 45 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(b) xy-planen svarer til $\alpha : z = 1$ Parameterfremstillingens retningsvektor betegnes med $\overrightarrow{r}$ og normalvektoren til xy-planen betenes med $\overrightarrow{n_\alpha}$, og man anvender følgende formel (vinkel mellem linje og plan)

$$v = 90^o - \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n_\alpha}}{|\overrightarrow{r}| \cdot |\overrightarrow{n_\alpha}|}\right)$$

Vi indsætter vektorerne og får

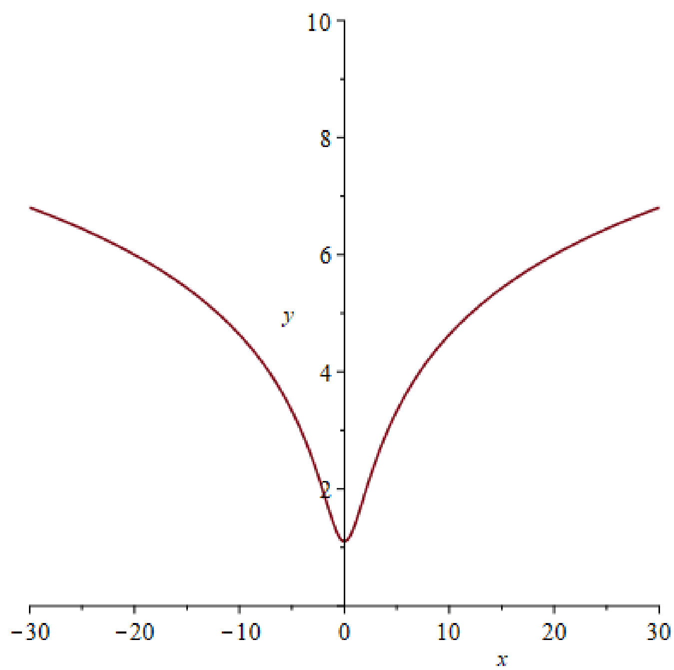
$$v = 90^o - \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix}-17.3\\30\\45\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{(-17.3)^2 + 30^2 + 45^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}\right) \approx 52.42^o$$

Dvs. vinklen mellem linjen l og xy-planen er 52.42^o.

Opgave 11. Denne opgave løses vha. Maple.

(a) I Maple defineres funktionen og den indtegnes i et koordinatsystem.

```
restart :; with(Gym) :
f(x) := ln(x^2 + 3) :
plot(f(x), x=-30 ..30, y=0 ..10)
```



Tangentligningen i punktet $P = (1, f(1))$

$$y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$$

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + 2\ln(2) \qquad \textbf{(29)}$$

Men kan også regnes pr. håndkraft. Den indre funktion er x^2+3 og den ydre funktion er $\ln(x)$, så er den afledede lig med

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+3} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2+3}$$

Og så fås $f(1)$ og $f'(1)$:

$$\begin{aligned} f(1) &= \ln(1^2+3) = \ln(4) = 2\ln(2) \\ f'(1) &= \frac{2\cdot 1}{1^2+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Og tangentligningen er:

$$y = f'(1)(x-1) + (1) = \frac{1}{2}(x-1) + 2\ln(2)$$

(b) Da $g(x)$ ligger over $f(x)$ så er ligningen for k givet ved

$$solve\left(40 = \int_{-5}^{5} k - \ln\left(x^2+3\right)\,dx\right) \xrightarrow{\text{at 10 digits}} 6.189447138$$

(c) Volumen af rumfanget når M drejes 360^o om førsteaksen er givet ved formlen

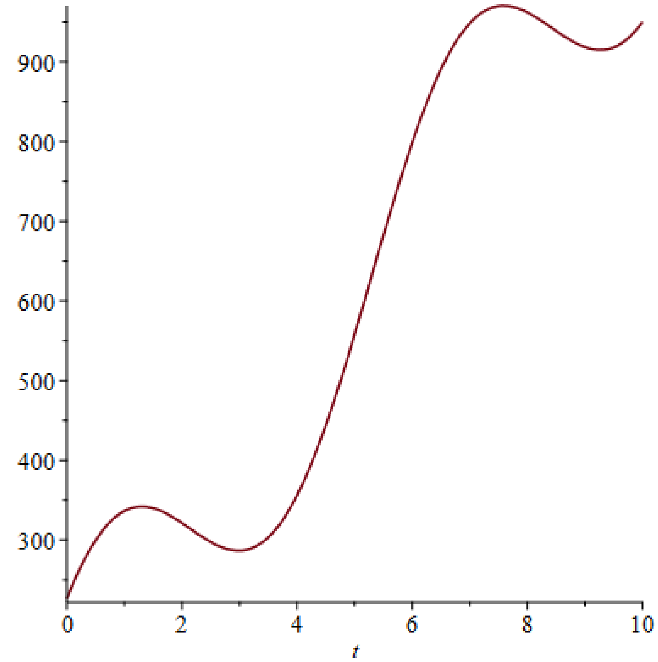
$$V_M = \pi \int_{-5}^{5} (5^2 - \ln(x^2+1)^2)dx \approx 618.83$$

Som blev beregnet i Maple.

Opgave 12. Denne opgave løses vha. Maple.

(a) I Maple tegnes grafen for $K(t)$.

restart :; *with*(*Gym*) :
$K(t) := 100 \cdot t + 150 \cdot \sin(t+1) + 100$:
plot($K(t)$, $t = 0..10$)



og $K(3)$ beregnes.

$$K(3) = 100 \cdot 3 + 150 \cdot \sin(3+1) + 100 \approx 286.48$$

Så i år 2010 var aktiekursen 286.48, målt i kurspoint.

(b) i Maple beregnes $K'(8)$

$K'(8)$

$$100 + 150\cos(9) \qquad \textbf{(35)}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$-36.67 \qquad \textbf{(36)}$$

Tallet fortæller, at i år 2015 faldt aktiekursen om året med 36.67 kurspoint.

(c) Det tidspunkt hvor aktiekursen vokser hurtigst beregnes i Maple.

```
intervalsolve(K''(t) = 0, t = 0 ..10)
                    [-1 + π, 2 π - 1, 3 π - 1]          (39)
evalf[5](%)
                    [2.1416, 5.2832, 8.4248]            (40)
is(K'''(2.1416) < 0)
                    false                               (41)
is(K'''(5.2832) < 0)
                    true                                (42)
is(K'''(8.4248) < 0)
                    false                               (43)
```

For at finde ud af hvor henne funktionen vokser hurtigst kræves der, at man løser ligningen $K''(t) = 0$, som i dette tilfælde giver tre t-værdier. En af disse jf. grafen fra (a) viser det sted, hvor funktionen vokser hurtigst. Ved hjælp af $K^{(3)}(t)$ eller tredje afledede kan vi afgøre, at det er $t = 5.2832$ som angiver det tidspunkt, hvor funktionen vokser hurtigst. Konklusionen er, at i løbet af år 2012 voksede aktiekursen hurtigst. Det er altså ikke en opgave, hvor du skal finde $K'(t) = 0$ og lave monotoniforhold.

Opgave 13. Denne opgave omhandler differentialligninger.

(a) Man har proportionalitetsfaktoren $k = -0.000121$. Da væksthastigheden $y'(t)$ er proportional med $y(t)$, så er den søgte differentialligning

$$y'(t) = -0.000121y(t)$$

Ovenstående ODE beskriver udviklingen i andelen af kulstof-14 i dødt organisk materiale.

(b) 250år før vor tidsregning betegnes med $t = 0$. Derfra er $y(0) = 100$ hvor enheden er i procent. Den fuldstændige løsning til differentialligningen er

$$y(t) = ce^{-0.000121t}$$

og den partikulære løsning bestemmes ved betingelsen som angivet i opgavesættet.

$$100 = ce^{-0.000121\cdot 0} \iff c = 100$$

Så den søgte partikulære løsning er

$$y(t) = 100e^{-0.000121t}$$

Da $t = 0$ er 250år før vor tidsregning, så er år 2018 lig med $t = 2018 + 250 = 2268$ og dermed er

$$y(t) = 100e^{-0.000121\cdot 2268} \approx 76$$

Så andelen af kulstof-14 i Grauballemanden i 2018 er 76% i år 2018.

Opgave 14.

(a) Tangentligningen i punktet $P = (a, f(a))$ bestemmes. Først beregnes $f'(x)$, og man får $f'(x) = 2x - 10$. Indsættes a i $f(x)$ og $f'(x)$ fås

$$f(a) = a^2 - 10a + 29$$
$$f'(a) = 2a - 10$$

Tangentligningen er

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = (2a-10)(x-a) + a^2 - 10a + 29 = -a^2 + 2ax - 10x + 29$$

Koordinatsættet til Q har førstekoordinaten $x = 0$, og andenkoordinaten er $-a^2 + 29$ så koordinatsættet Q udtrykt ved a er

$$Q = (0, -a^2 + 29)$$

Afstanden mellem R og P er a, svarende til grundlinjen. Højden er afstanden mellem Q og R, svarende til $-a^2 + 29 - f(a) = -2a^2 + 10a$ Arealformlen generelt er $T = \frac{1}{2}hg$, så vi får

$$T(a) = \frac{1}{2}a \cdot (-a^2 + 29 - f(a)) = \frac{1}{2}a(-a^2 + 10a) = 5a^2 - a^3$$

Hvor $T(a)$ har en a-værdi liggende mellem 0 og 5.

(b) Den største værdi af a bestemmes vha. $T'(a) = 0$. Her er $T'(a) = -3a^2 + 10a$, så ligningen er

$$-3a^2 + 10a = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \vee a = \frac{10}{3}$$

Da $a = 0$ ikke er med i intervallet, så er $a = \frac{10}{3}$ den værdi, der giver det største areal. Dette kan nemt verificeres ved fortegnsvariation.