

V Krakowska Konferencja Matematyki Finansowej

FRAKTALE W POMIARZE RYZYKA INWESTYCJI FINANSOWYCH

Rafał Buła

Kraków, 15.04.2016 r.



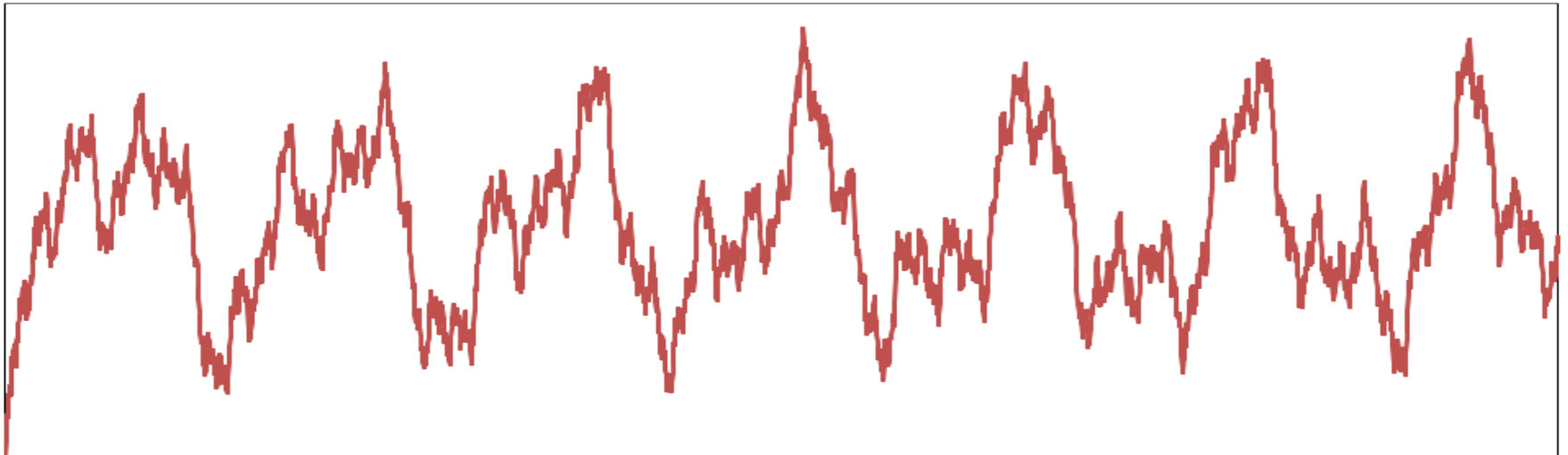
Czym są fraktale?

Funkcja Weierstrassa

„Es sei x eine reelle Veränderliche, a eine ungerade ganze Zahl, b eine positive Constante, kleiner als Eins, und

$$f(x) = \sum_0^{\infty} (b^n \cos(a^n x) \pi);$$

so ist $f(x)$ eine stetige Function, von der sich zeigen lässt, dass sie, sobald der Werth des Products ab eine gewisse Grenze übersteigt, *an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten hat.*



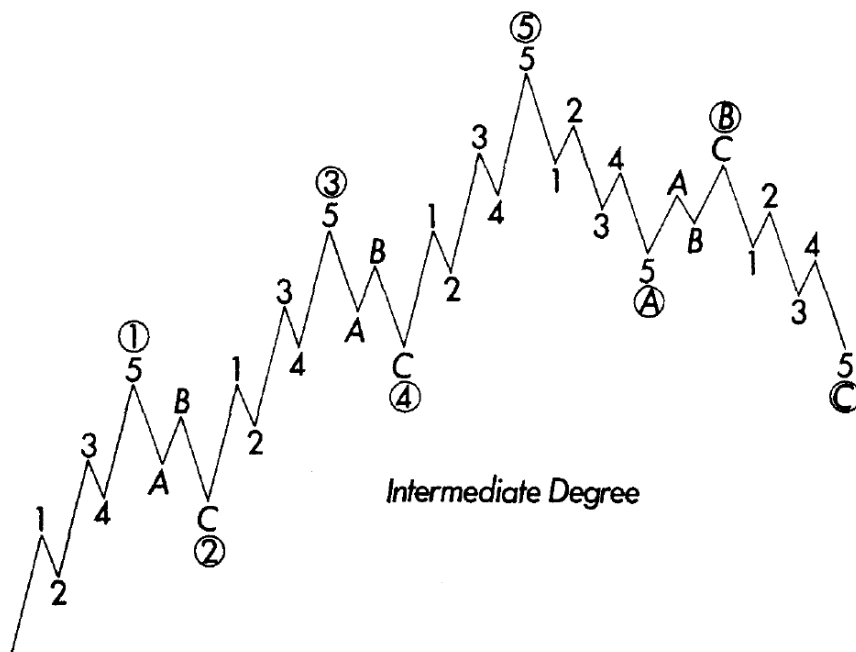
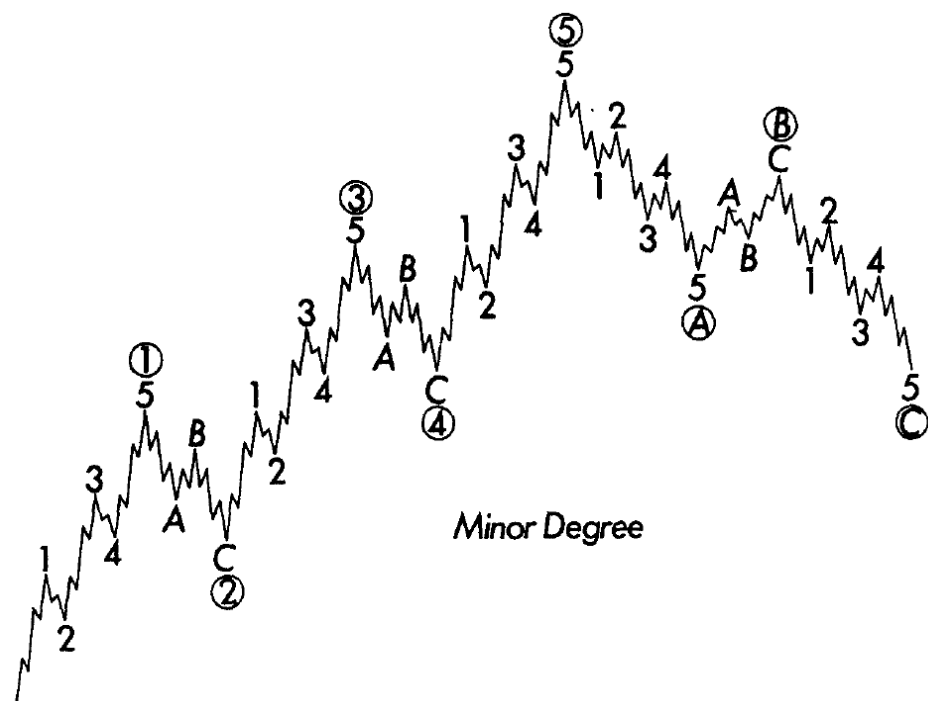
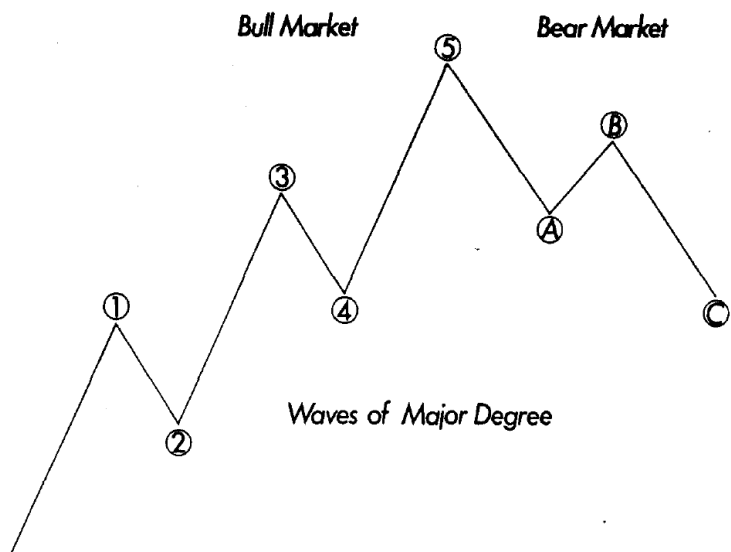
Czym są fraktale?

Fale Elliotta

practically all developments which result from our social-economic processes follow a law that causes them to repeat themselves in similar and constantly recurring serials of waves or impulses of definite number and pattern.

Czym są fraktale?

Fale Elliotta



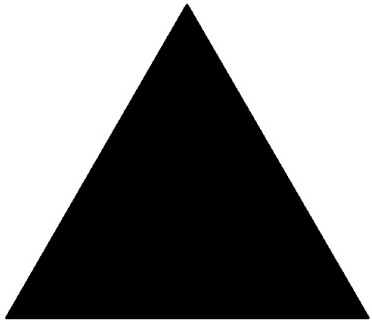
Pojęcie obiektu fraktalnego

Pojęcie obiektu fraktalnego

- Obiekt samopodobny (samoafiniczny) – także w sensie statystycznym;

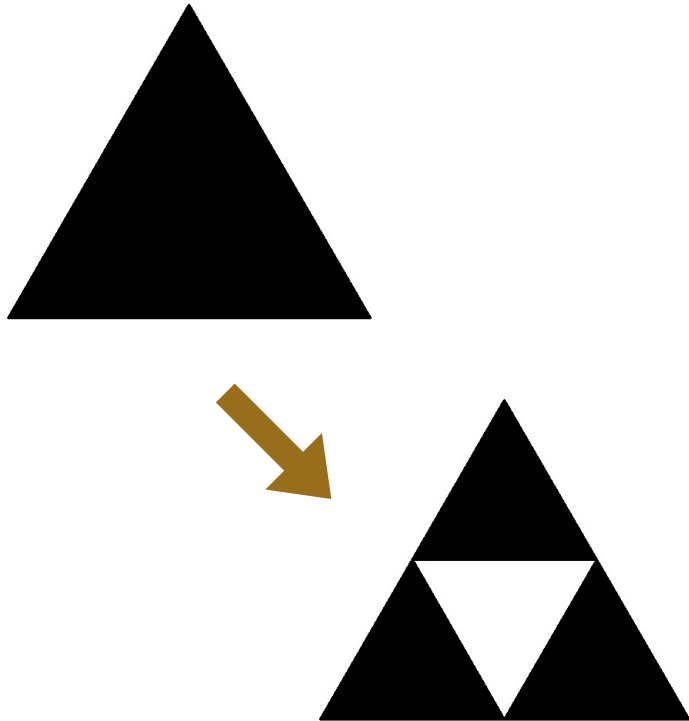
Pojęcie obiektu fraktalnego

- Obiekt samopodobny (samoafiniczny) – także w sensie statystycznym;



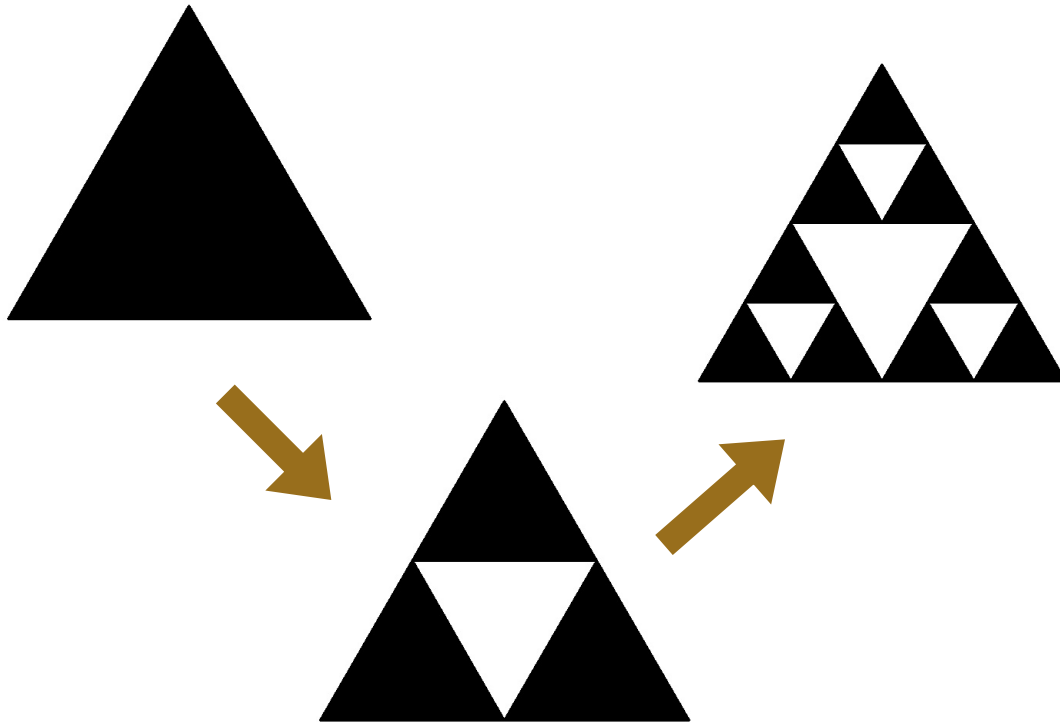
Pojęcie obiektu fraktalnego

- Obiekt samopodobny (samoafiniczny) – także w sensie statystycznym;



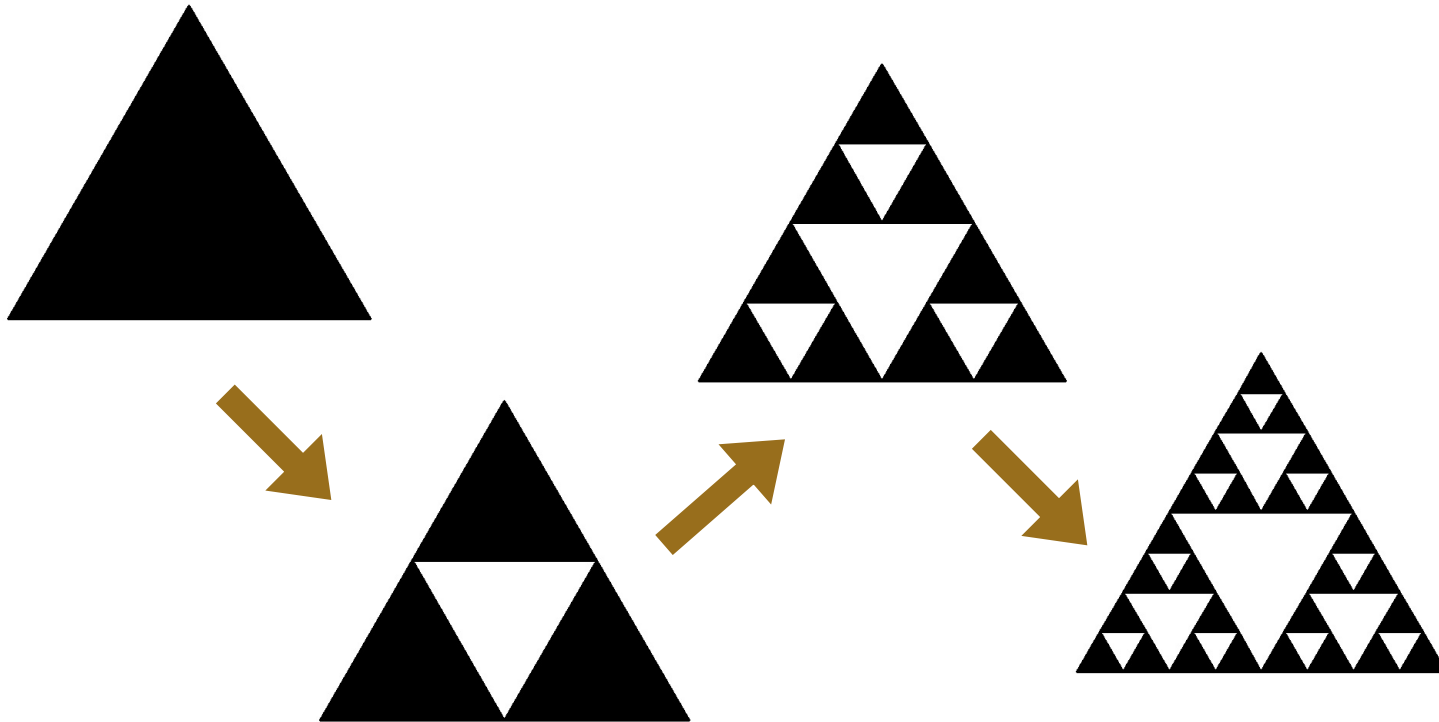
Pojęcie obiektu fraktalnego

- Obiekt samopodobny (samoafiniczny) – także w sensie statystycznym;



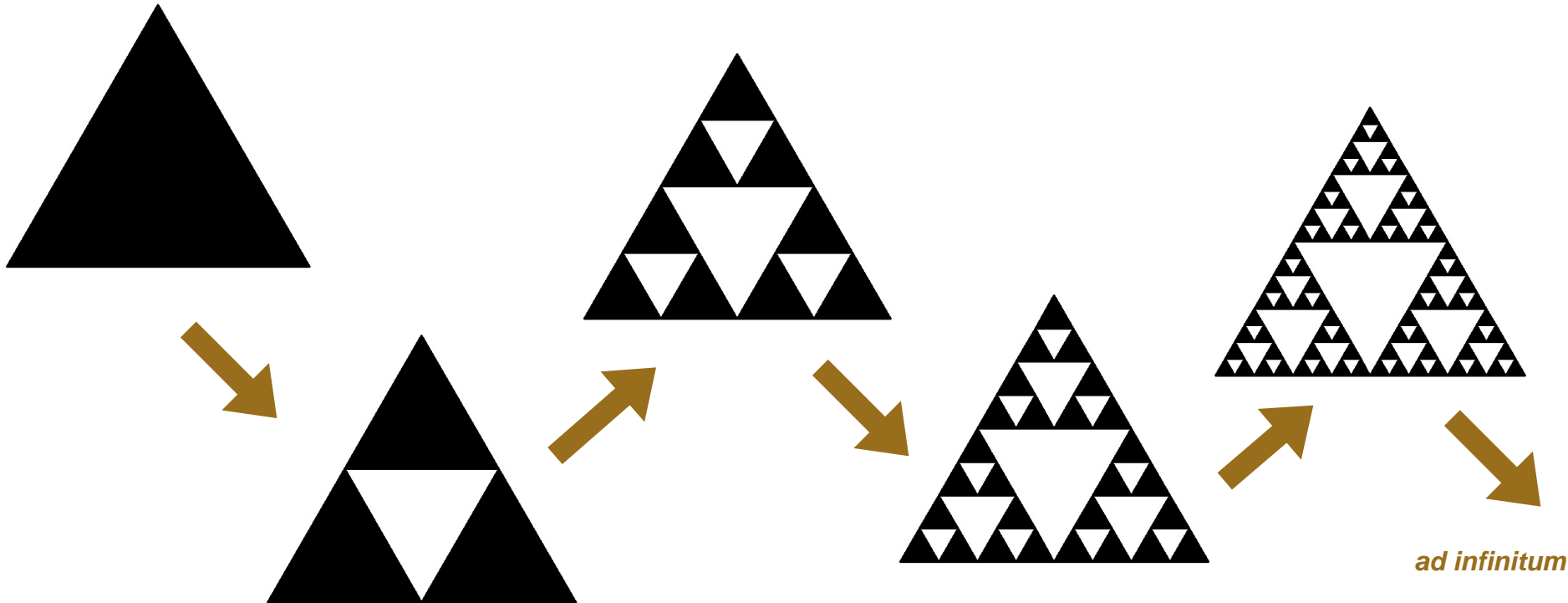
Pojęcie obiektu fraktalnego

- Obiekt samopodobny (samoafiniczny) – także w sensie statystycznym;

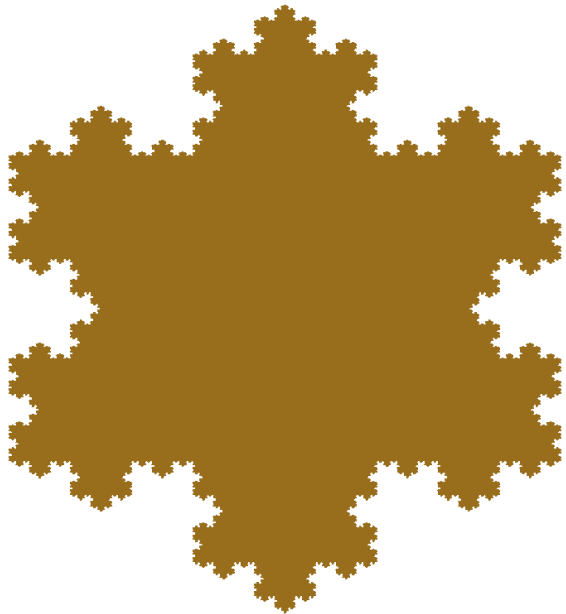


Pojęcie obiektu fraktalnego

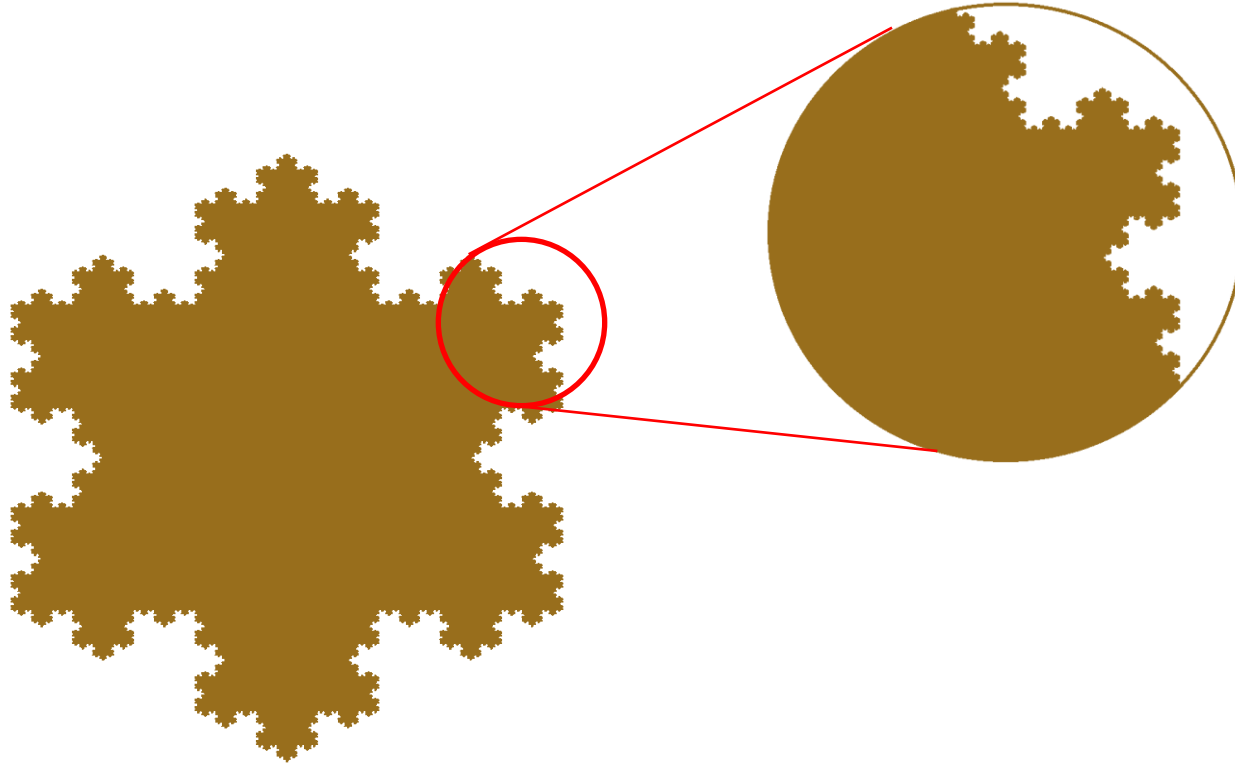
- Obiekt samopodobny (samoafiniczny) – także w sensie statystycznym;



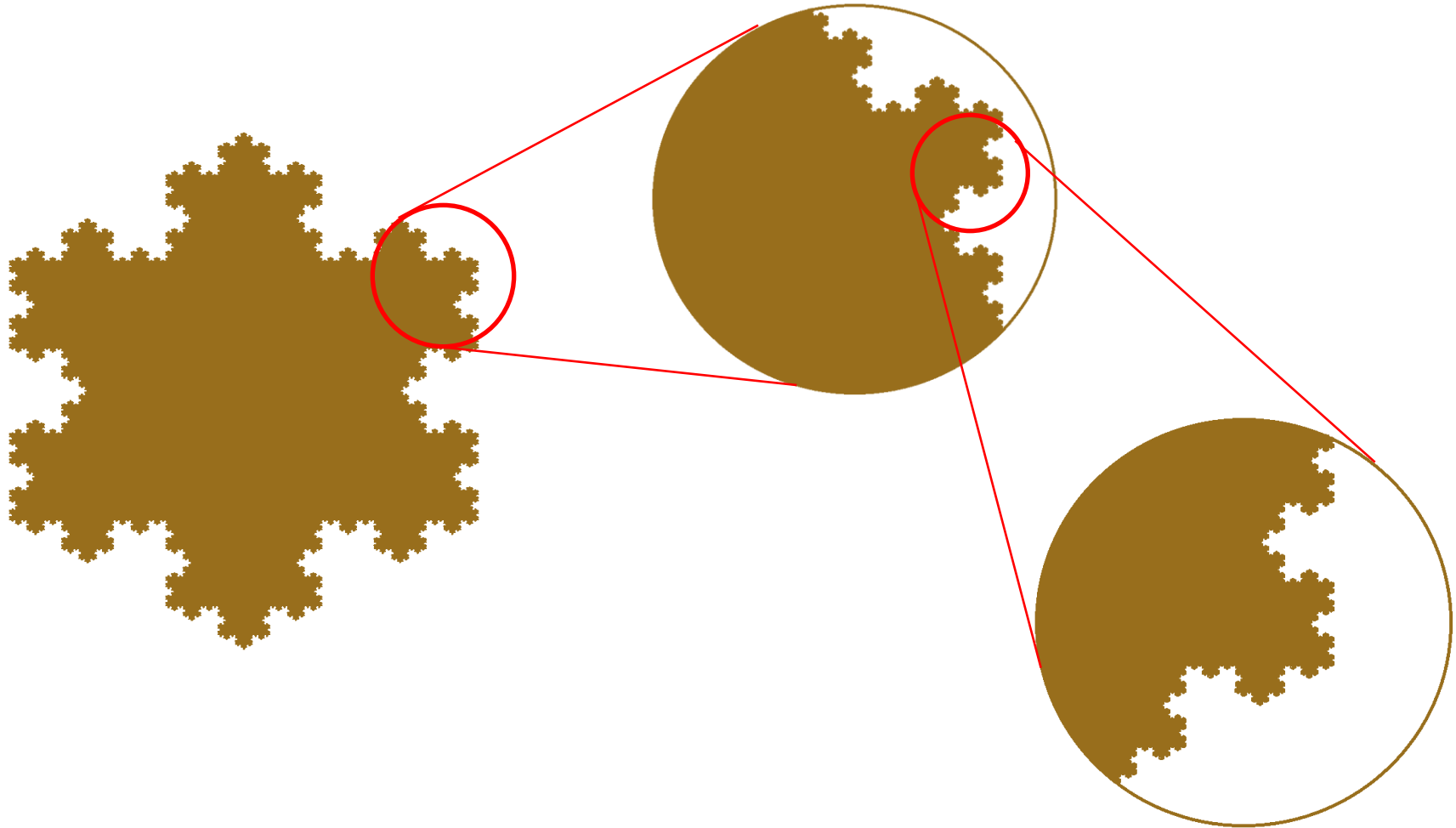
Pojęcie obiektu fraktalnego



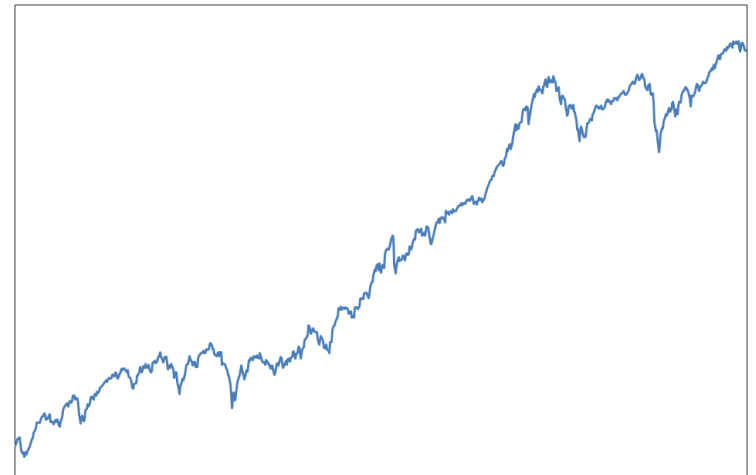
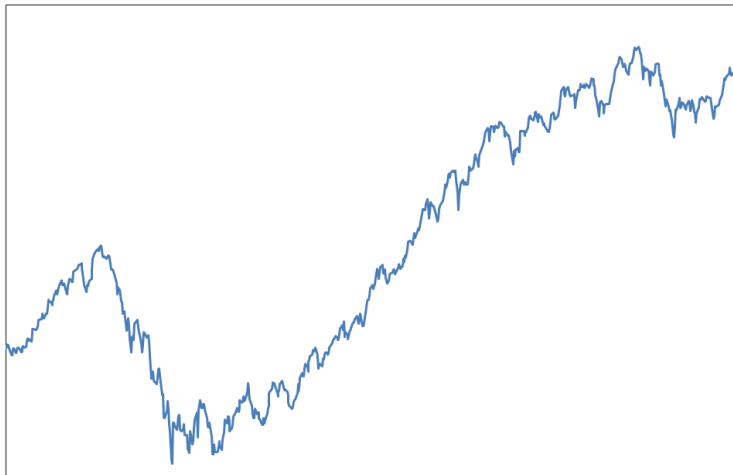
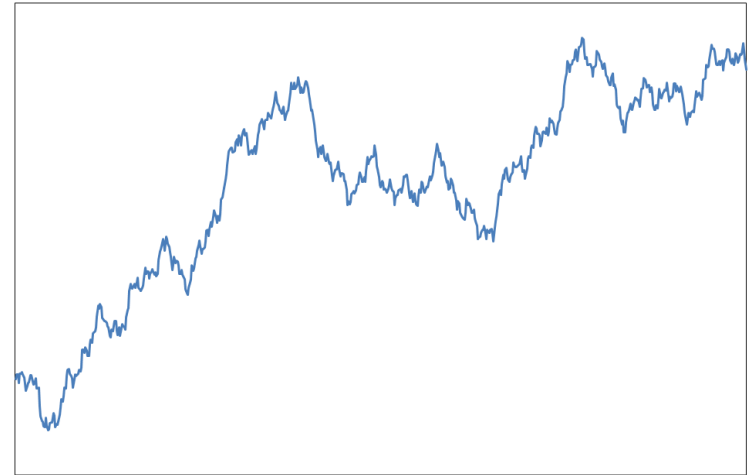
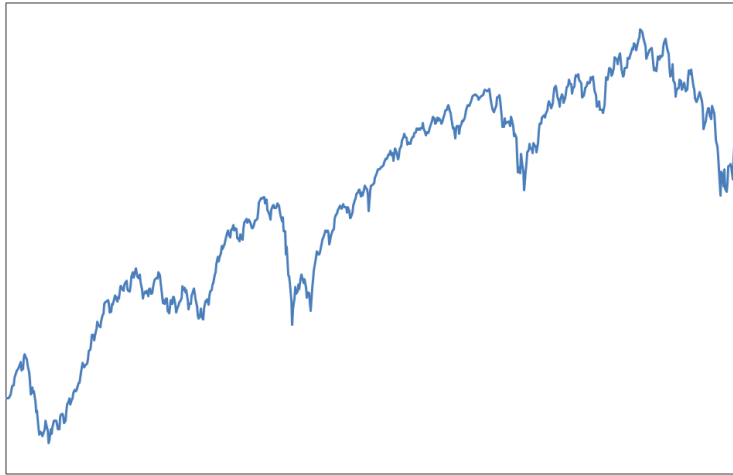
Pojęcie obiektu fraktalnego



Pojęcie obiektu fraktalnego



Pojęcie obiektu fraktalnego



Pojęcie obiektu fraktalnego

Pojęcie obiektu fraktalnego

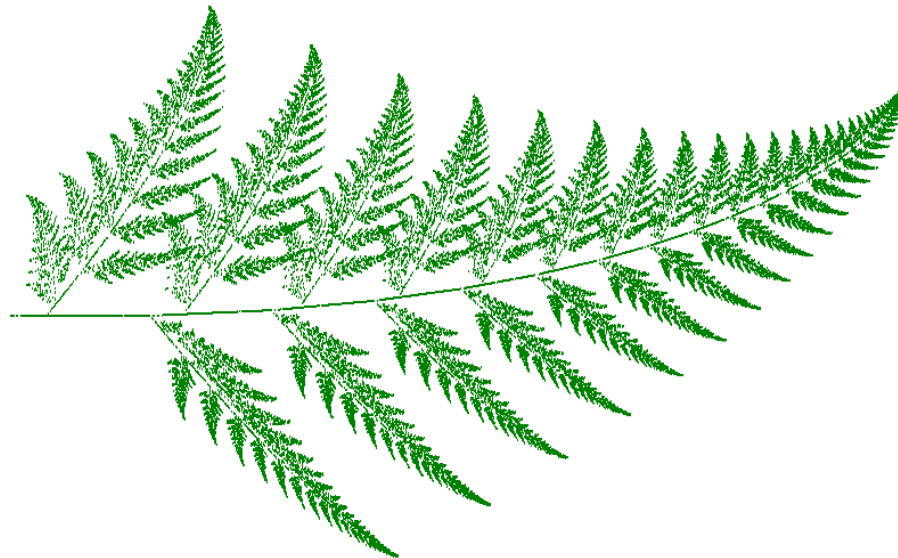


Pojęcie obiektu fraktalnego

- Obiekt samopodobny (samoafiniczny) – także w sensie statystycznym;
- Obiekt o skomplikowanej lub subtelnej strukturze geometrycznej;

Pojęcie obiektu fraktalnego

- Obiekt samopodobny (samoafiniczny) – także w sensie statystycznym;
- Obiekt o skomplikowanej lub subtelnej strukturze geometrycznej;

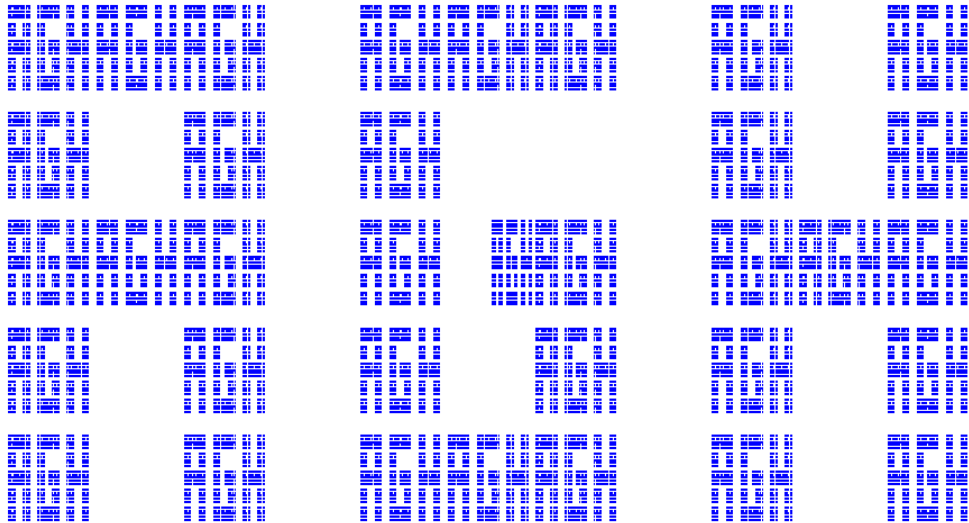


Pojęcie obiektu fraktalnego

- Obiekt samopodobny (samoafiniczny) – także w sensie statystycznym;
- Obiekt o skomplikowanej lub subtelnej strukturze geometrycznej;
- Obiekt zadany w „prosty” sposób – często rekurencyjnie;

Pojęcie obiektu fraktalnego

- Obiekt samopodobny (samoafiniczny) – także w sensie statystycznym;
- Obiekt o skomplikowanej lub subtelnej strukturze geometrycznej;
- Obiekt zadany w „prosty” sposób – często rekurencyjnie;



Pojęcie obiektu fraktalnego

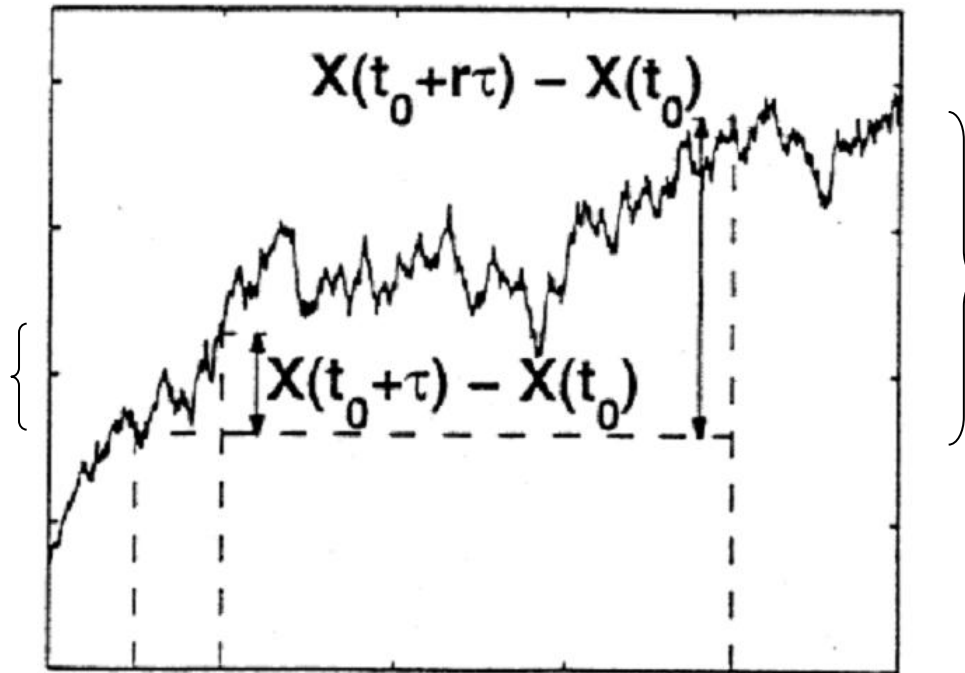
- Obiekt samopodobny (samoafiniczny) – także w sensie statystycznym;
- Obiekt o skomplikowanej lub subtelnej strukturze geometrycznej;
- Obiekt zadany w „prosty” sposób – często rekurencyjnie;
- Obiekt którego wymiar Hausdorffa-Besicovitcha jest większy od wymiaru topologicznego.

Teoria rynku fraktalnego

Teoria zakładająca, że szeregi czasowe cen bądź stóp zwrotu z instrumentów finansowych są opisane co najmniej lokalnie samopodobnymi procesami stochastycznymi.

Teoria rynku fraktalnego

$$X(t_0 + \tau) - X(t_0) = r^{-H} [X(t_0 + r\tau) - X(t_0)]$$

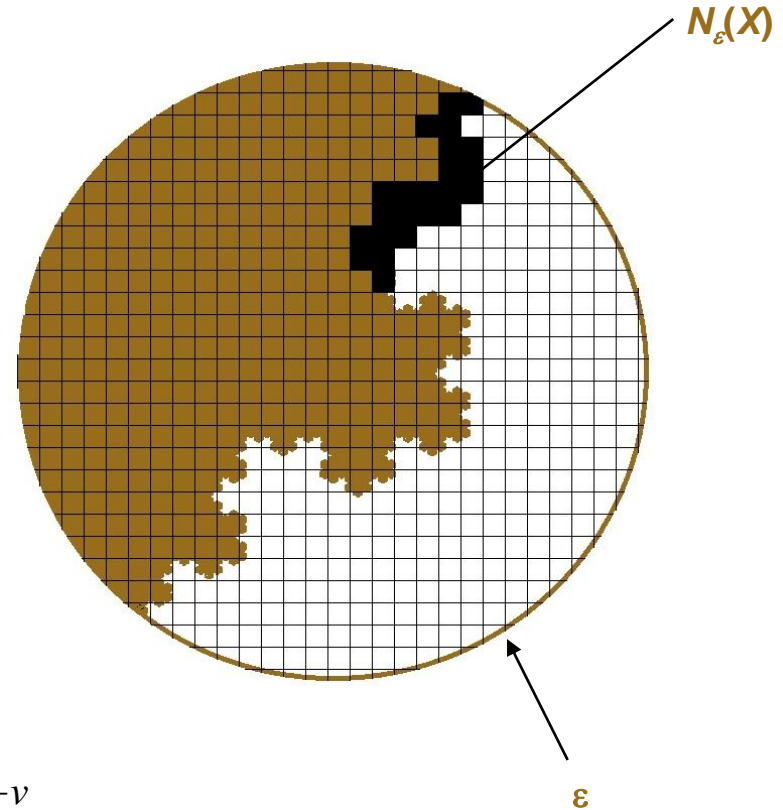
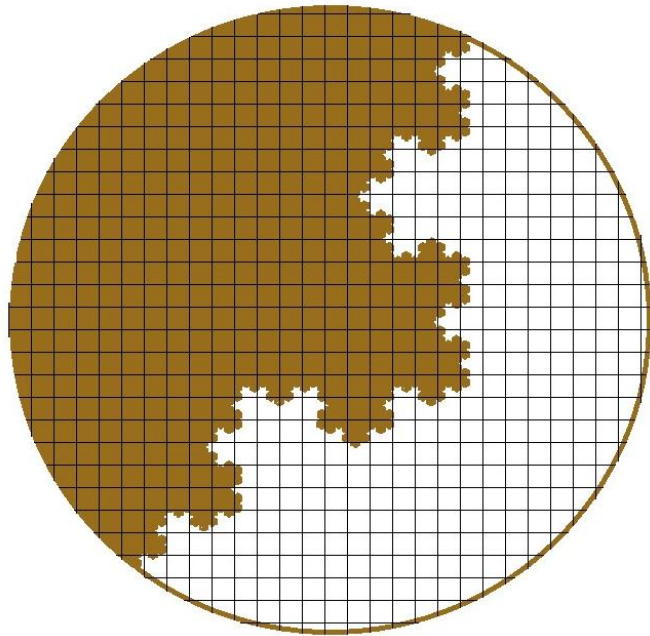


Wymiar fraktalny

Wielkość opisująca strukturę obiektu geometrycznego w nieskończenie wielkim powiększeniu.

Wymiar fraktalny

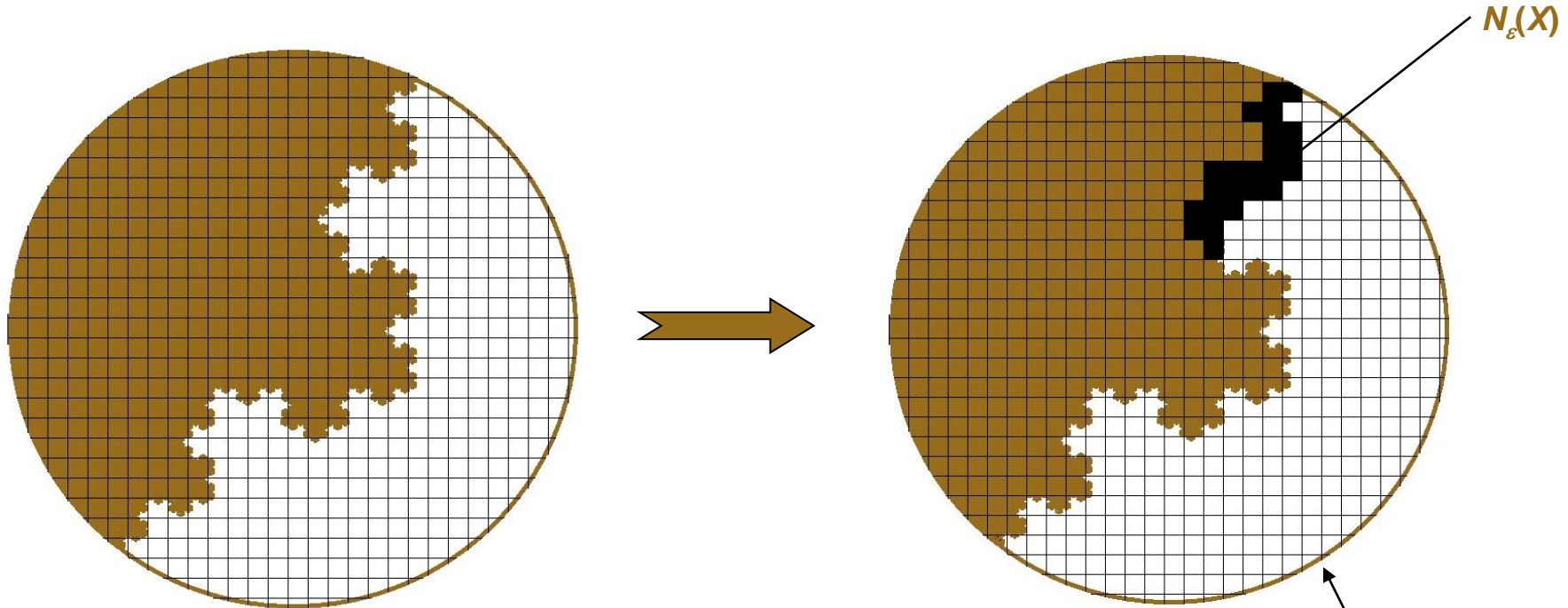
Wymiar pudełkowy



$$N_\varepsilon(X) \sim \varepsilon^{-\nu}$$

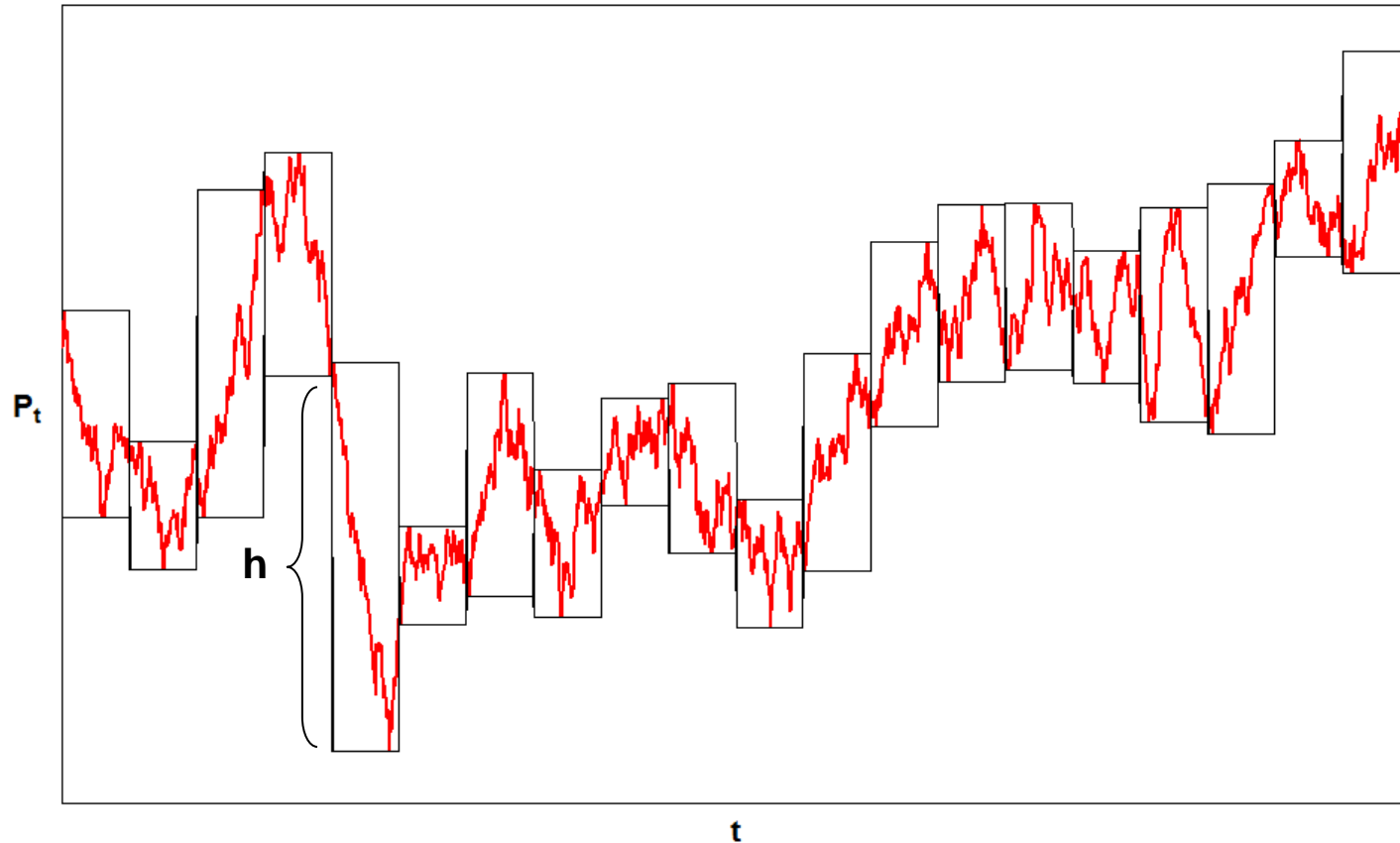
Wymiar fraktalny

Wymiar pudełkowy



$$\dim_B(X) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_\epsilon(X)}{\ln \frac{1}{\epsilon}}$$

Ocena dotychczasowych interpretacji wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka



Ocena dotychczasowych interpretacji wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka

$$\dim_{\text{B}}(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N_{\varepsilon}(X)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$

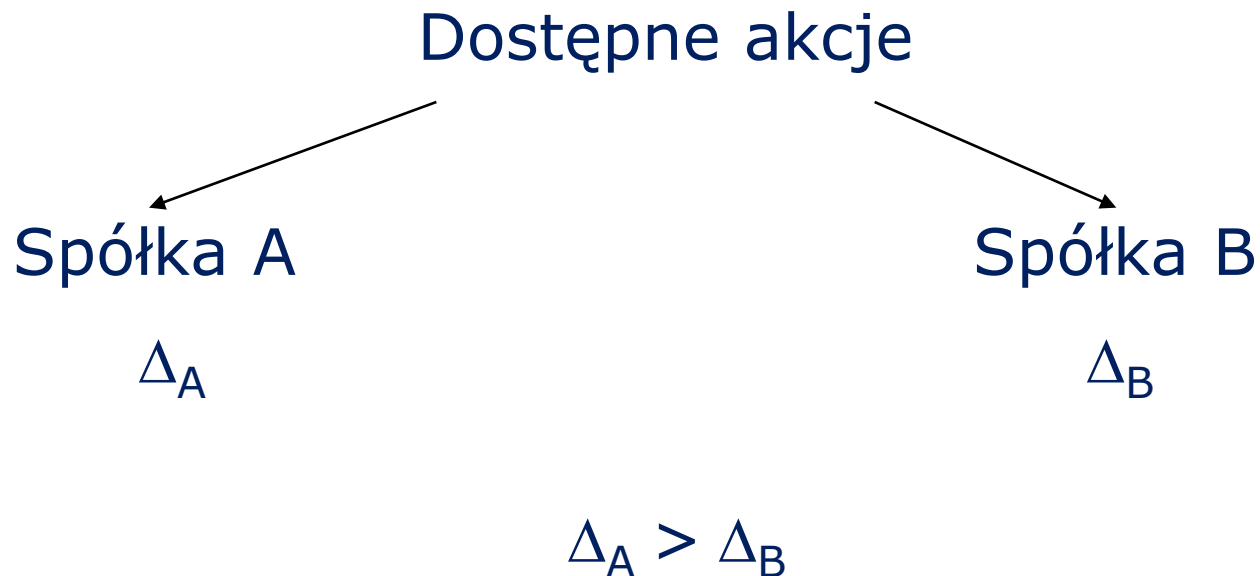


$$\dim_{\text{B}}(X) = 2 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \Gamma_{\varepsilon}(X)}{\ln \varepsilon}$$

$$\dim_{\text{B}}(X) = 2 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \bar{h}_{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$



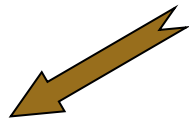
Ocena dotychczasowych interpretacji wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka



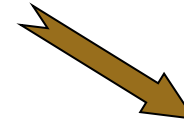
Które akcje są bardziej ryzykowne?

Ocena dotychczasowych interpretacji wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka

$$\dim_{\text{B}}(X) = 2 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \bar{h}_{\varepsilon}}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}$$



$$h \uparrow \Rightarrow N_{\varepsilon}(X) \uparrow \Rightarrow \dim_{\text{B}}(X) \uparrow$$



$$h \downarrow \Rightarrow N_{\varepsilon}(X) \downarrow \Rightarrow \dim_{\text{B}}(X) \downarrow$$

Ocena dotychczasowych interpretacji wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka

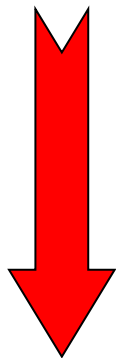
„Jeśli ryzyko zdefiniujemy jako zmienność i przyjmiemy, że większa zmienność oznacza większe ryzyko, to niższe wartości wymiaru fraktalnego będą oznaczać niższe ryzyko, a wyższe wartości wymiaru fraktalnego wyższe ryzyko”

G. Przekota: Szacowanie ryzyka zmian cen akcji metodą podziału pola. „Problemy Zarządzania”, Vol. 10, No. 4/2012, s. 186-187.

„Zdefiniowana w ten sposób miara określa stopień poszarpania wykresu, a zatem w sposób naturalny można przyjąć, że im większy jest wymiar szeregu, tym większa jego zmienność. (...) Papiery, których szeregi cen mają większy wymiar, są bardziej zmienne, a co za tym idzie bardziej ryzykowne”

W. Orzeszko: Wymiar fraktalny szeregów czasowych a ryzyko inwestowania. „Acta Universitatis Nicolai Copernici”, z. 397, Toruń 2010, s. 58.

Ocena dotychczasowych interpretacji wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka



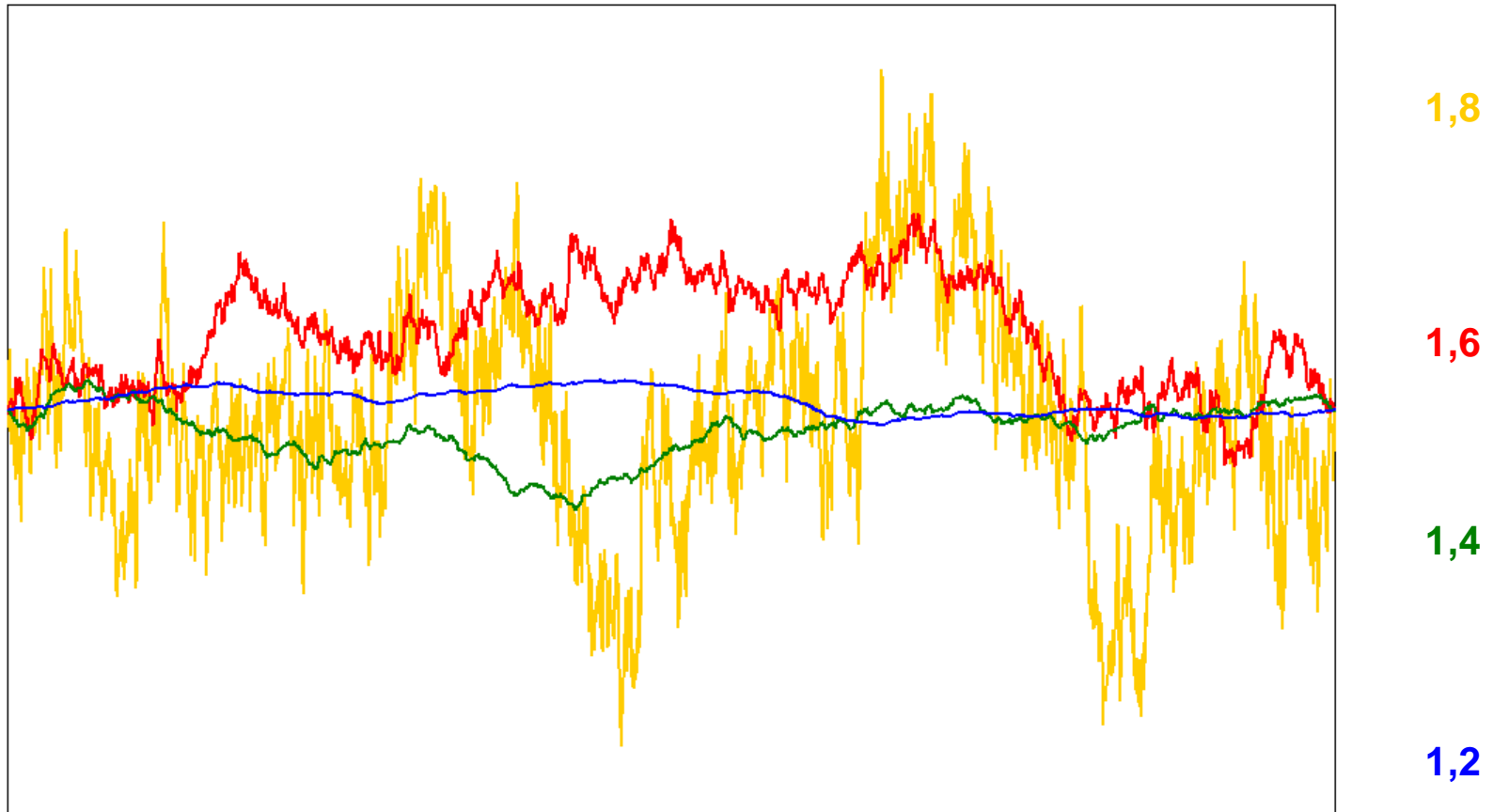
Indeks	Wymiar fraktalny
sWIG80	1,2840
mWIG40	1,3090
WIG	1,3580
WIG20	1,4360

W. Orzeszko: Wymiar fraktalny szeregów czasowych a ryzyko inwestowania. „Acta Universitatis Nicolai Copernici”, z. 397/2010, s. 66.

Wzrost ryzyka

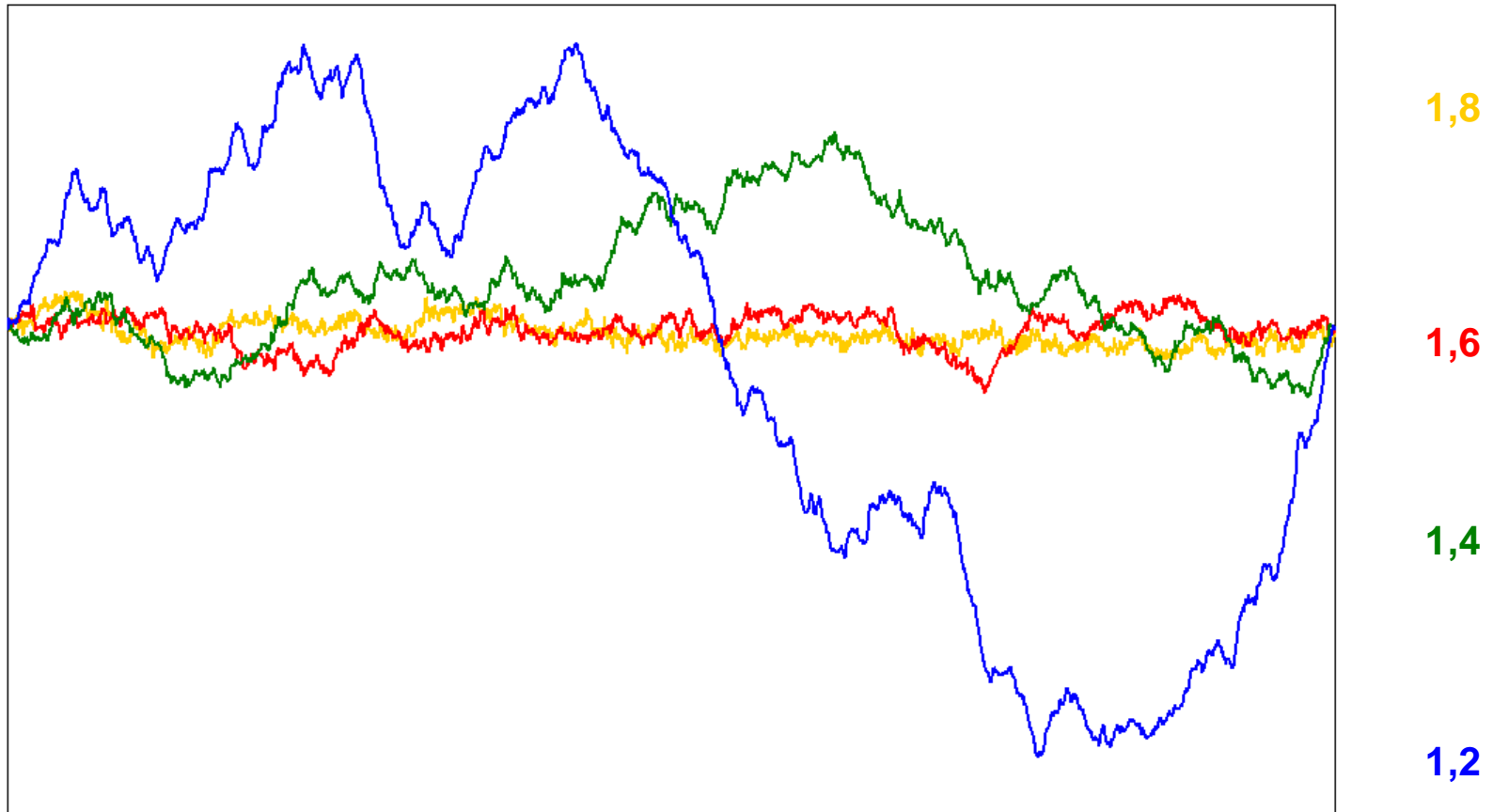
Ocena dotychczasowych interpretacji wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka

Okres krótki



Ocena dotychczasowych interpretacji wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka

Okres długi



Propozycja interpretacji wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka

Dla obiektów cechujących się samopodobieństwem o wymiarze fraktalnym Δ :

$$\frac{\bar{h}_{T_2}}{\bar{h}_{T_1}} \sim \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{2-\Delta}$$

Dla akcji spółek A i B:

$$\frac{\bar{h}_{T_1}^A}{\bar{h}_{T_1}^B} \sim \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\Delta_A - \Delta_B}$$

Propozycja interpretacji wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka

Ponieważ $\Delta_A - \Delta_B > 0$, zatem gdy:

1. $T_1 \rightarrow 0$, to $\frac{\bar{h}_{T_1}^A}{\bar{h}_{T_1}^B} \rightarrow \infty$

2. $T_1 \rightarrow \infty$, to $\frac{\bar{h}_{T_1}^A}{\bar{h}_{T_1}^B} \rightarrow 0$



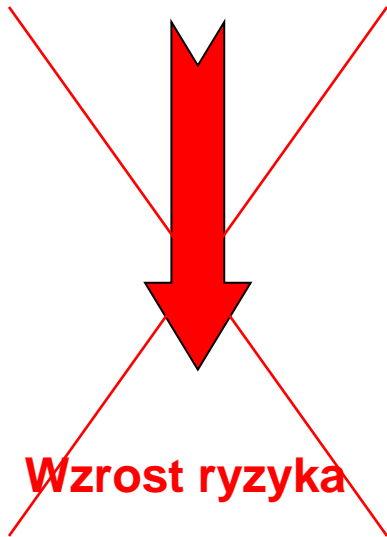
Propozycja interpretacji wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka

~~Jeśli ryzyko zdefiniujemy jako zmienność i przyjmiemy, że większa zmienność oznacza większe ryzyko, to niższe wartości wymiaru fraktalnego będą oznaczać niższe ryzyko, a wyższe wartości wymiaru fraktalnego wyższe będą oznaczać niższe ryzyko, a wyższe wartości wymiaru fraktalnego wyższe ryzyko.~~

Przekota: Szacowanie ryzyka zmian cen akcji metodą podziału pola. „Problemy Zarządzania”, Vol. 10, No. 4/2012, s. 186-187.

- dla długich horyzontów inwestycyjnych niższe wartości wymiaru fraktalnego będą oznaczać wyższe ryzyko, a wyższe wartości wymiaru fraktalnego niższe ryzyko.

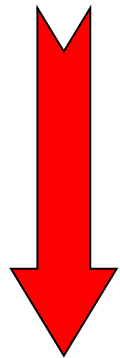
Propozycja interpretacji wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka



Indeks	Wymiar fraktalny
sWIG80	1,2840
mWIG40	1,3090
WIG	1,3580
WIG20	1,4360

W. Orzeszko: Wymiar fraktalny szeregów czasowych a ryzyko inwestowania.
„Acta Universitatis Nicolai Copernici”, z. 397/2010, s. 66.

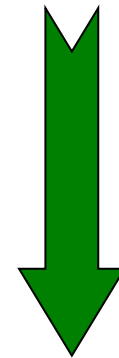
Propozycja interpretacji wymiaru fraktalnego jako miary ryzyka



**Wzrost ryzyka
krótkoterminowego**

Indeks	Wymiar fraktalny
sWIG80	1,2840
mWIG40	1,3090
WIG	1,3580
WIG20	1,4360

W. Orzeszko: Wymiar fraktalny szeregów czasowych a ryzyko inwestowania.
„Acta Universitatis Nicolai Copernici”, z. 397/2010, s. 66.



**Spadek ryzyka
długoterminowego**

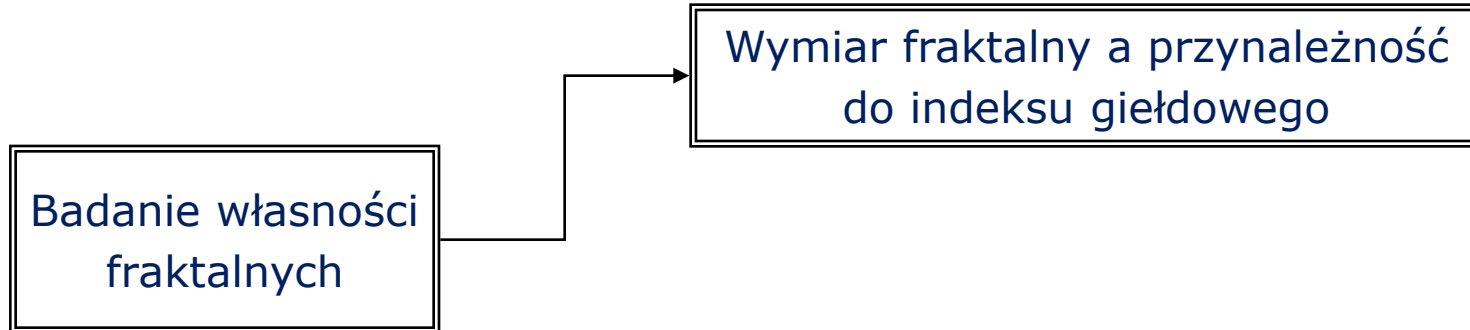
Badania empiryczne

Badania empiryczne – materiał

Szeregi czasowe logarytmicznych stóp zwrotu:

- cen akcji 114 spółek tworzących indeksy: WIG20, mWIG40, sWIG80 w dn. 30.04.2015 r. (03.10.1994-30.04.2015);
- poziomów indeksów: WIG, WIG20, mWIG40, sWIG80 (03.10.1994-30.04.2015).

Badania empiryczne – przebieg



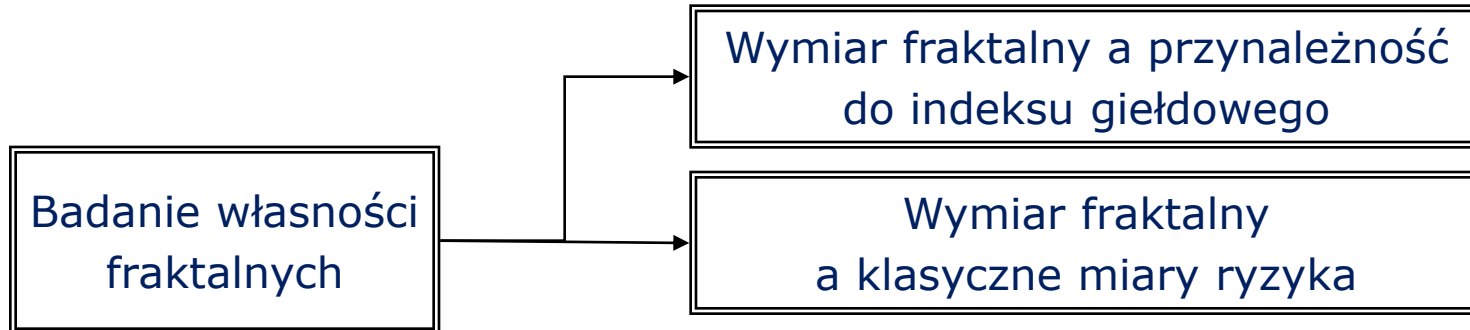
Badania empiryczne

Indeks	Wymiar fraktalny	Wymiar fraktalny (średnia)	Wymiar fraktalny (mediana)
sWIG80	1,4046	1,4171	1,4126
mWIG40	1,4024	1,4154	1,4164
WIG	1,4437	-	-
WIG20	1,4852	1,4561	1,4723

Opracowanie własne.



Badania empiryczne – przebieg



Badania empiryczne

Miara	σ	$s\sigma$	d	sd	Q	VaR _{0,1}	dim _B (X)
σ							
$s\sigma$							
d							
sd							
Q							
VaR _{0,1}							
dim _B (X)							

Opracowanie własne.



Badania empiryczne

Miara	σ	$s\sigma$	d	sd	Q	VaR _{0,1}	dim _B (X)
σ	Red	Red	Red	Red	Orange	Red	White
$s\sigma$	Red	Red	Red	Red	Orange	Red	White
d	Red	Red	Red	Red	Red	Red	White
sd	Red	Red	Red	Red	Red	Red	White
Q	Orange	Orange	Red	Red	Red	Red	White
VaR _{0,1}	Red	Red	Red	Red	Red	Red	White
dim _B (X)	White	White	White	White	White	White	Red

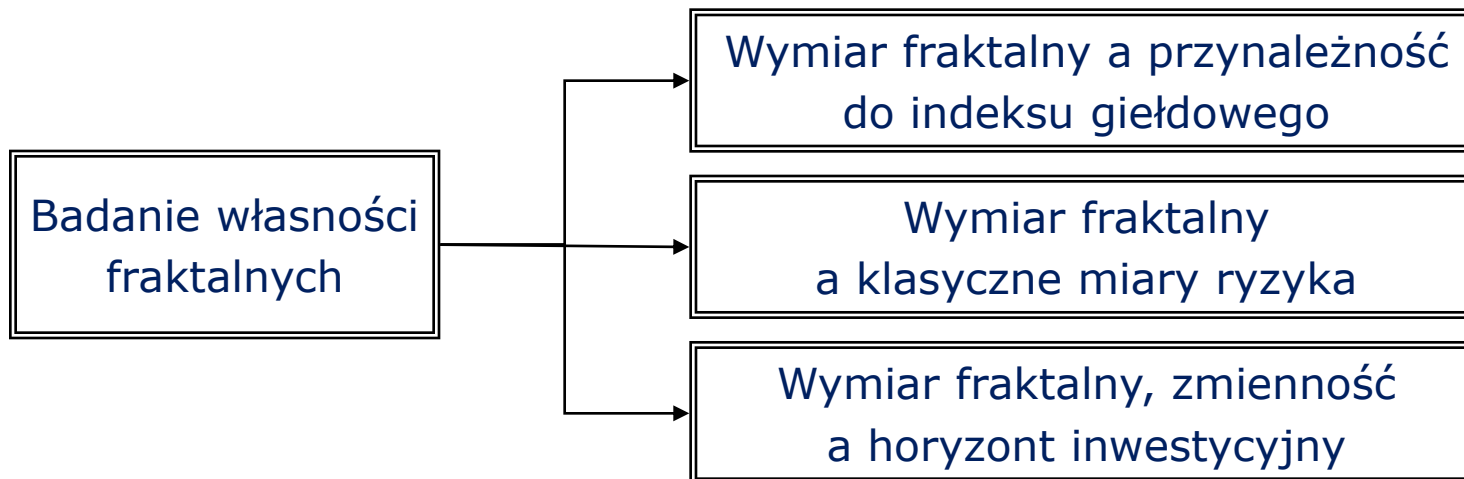
Opracowanie własne.

Badania empiryczne

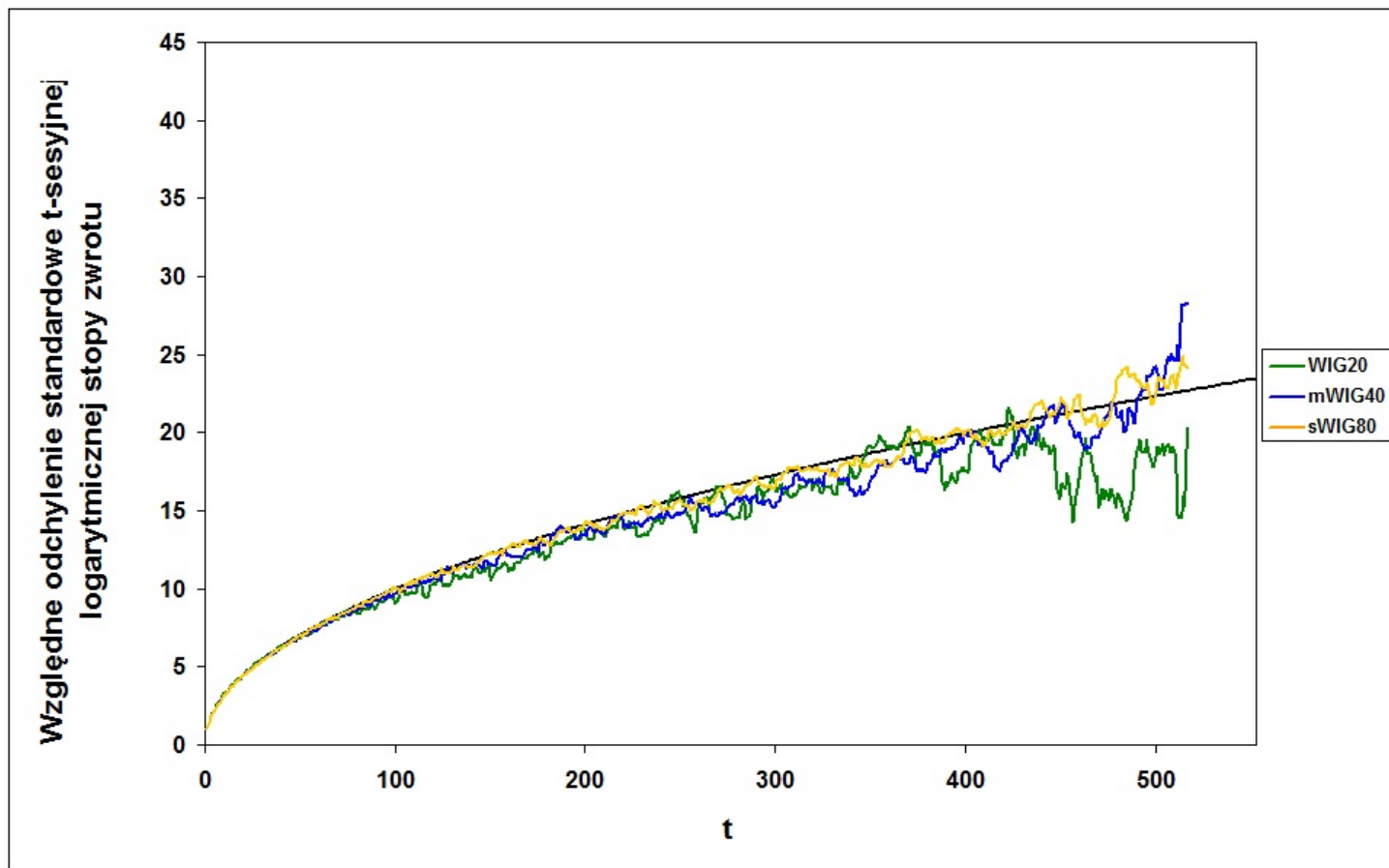
Miara	σ	$s\sigma$	d	sd	Q	$VaR_{0,1}$	$\dim_B(X)$
σ	Red	Red	Red	Red	Orange	Red	Cyan
$s\sigma$	Red	Red	Red	Red	Orange	Red	Green
d	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Cyan
sd	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Cyan
Q	Orange	Orange	Red	Red	Red	Red	Green
$VaR_{0,1}$	Red	Red	Red	Red	Red	Red	Cyan
$\dim_B(X)$	Cyan	Green	Cyan	Cyan	Green	Cyan	Red

Opracowanie własne.

Badania empiryczne – przebieg



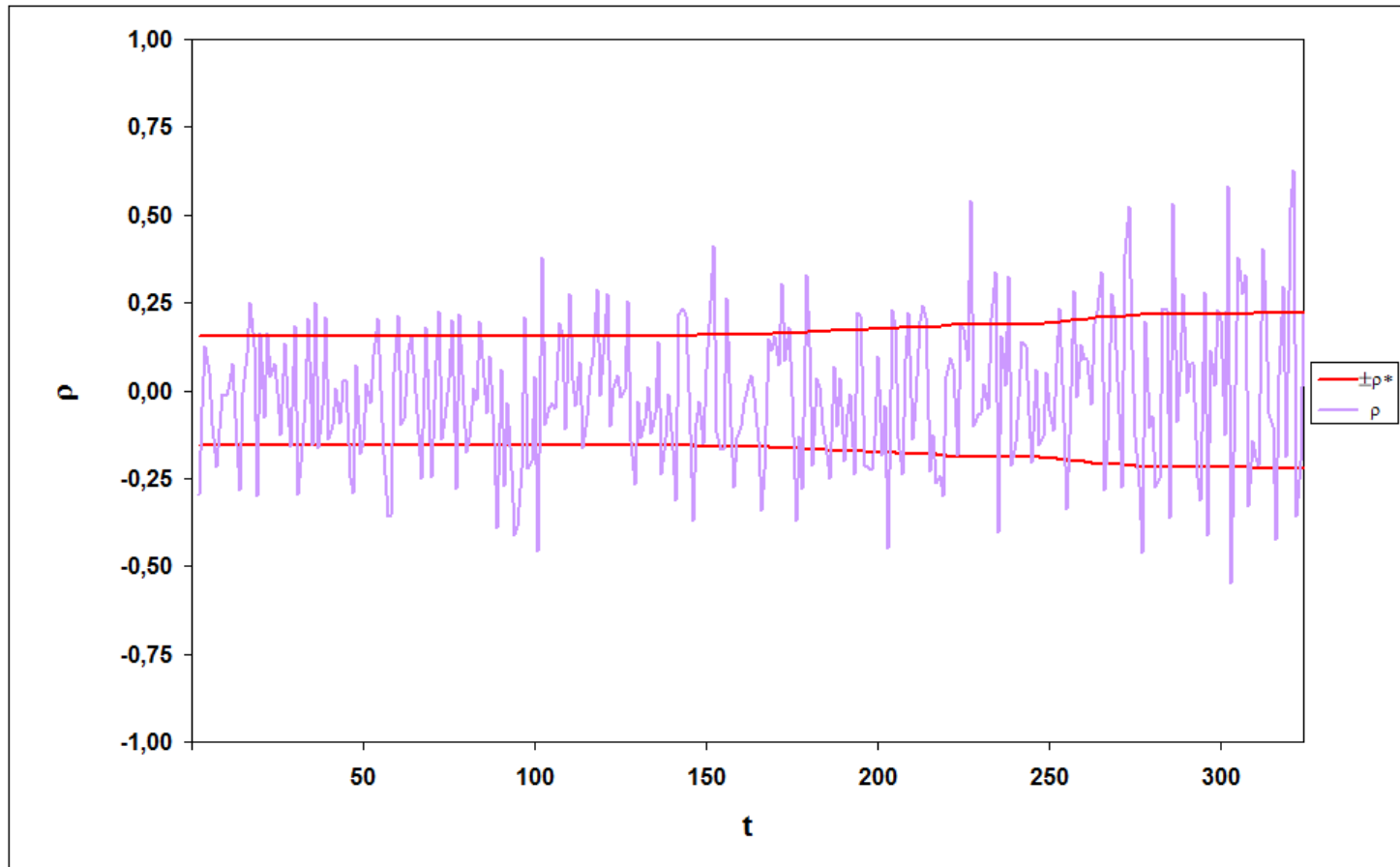
Badania empiryczne



Opracowanie własne.



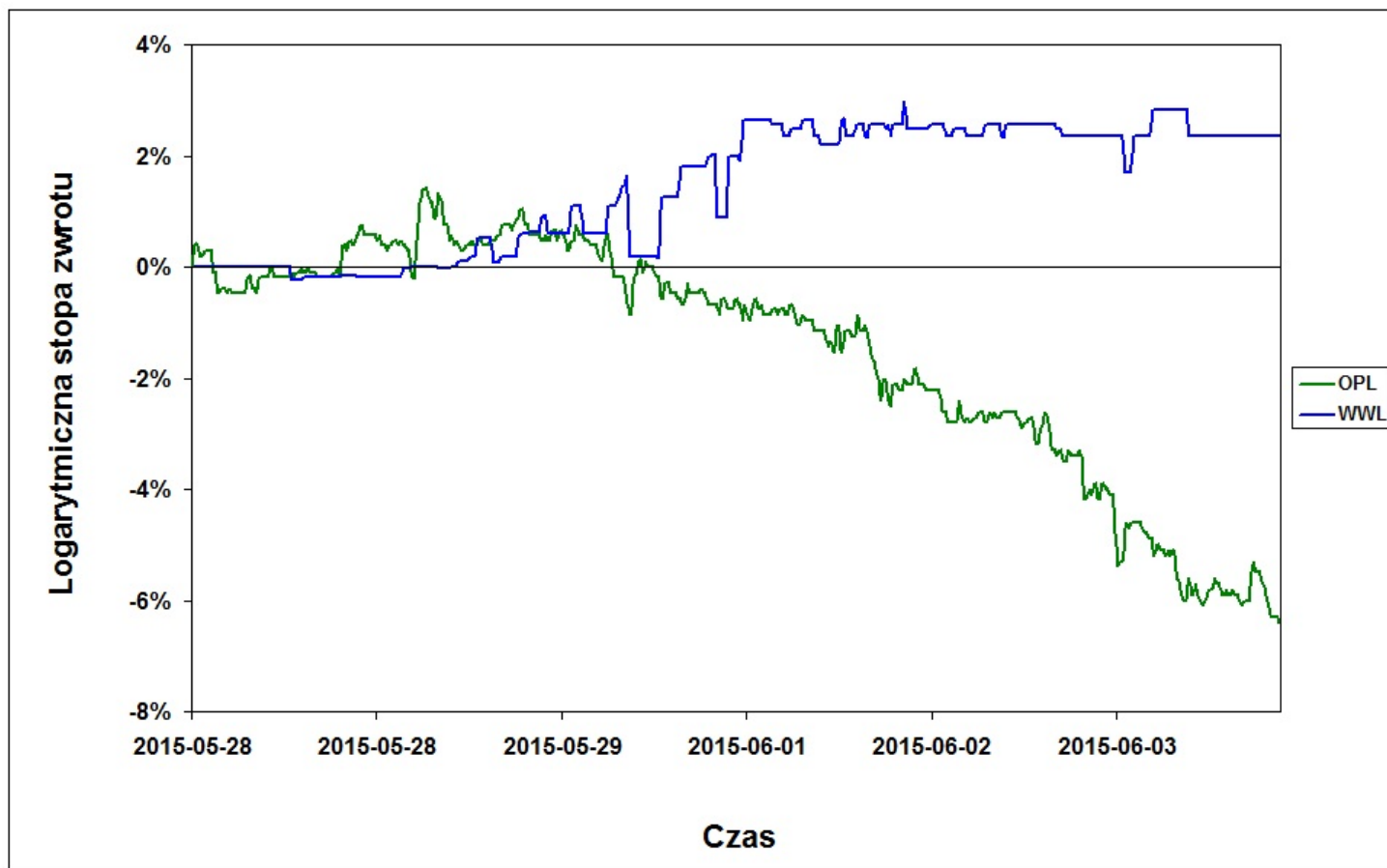
Badania empiryczne



Opracowanie własne.



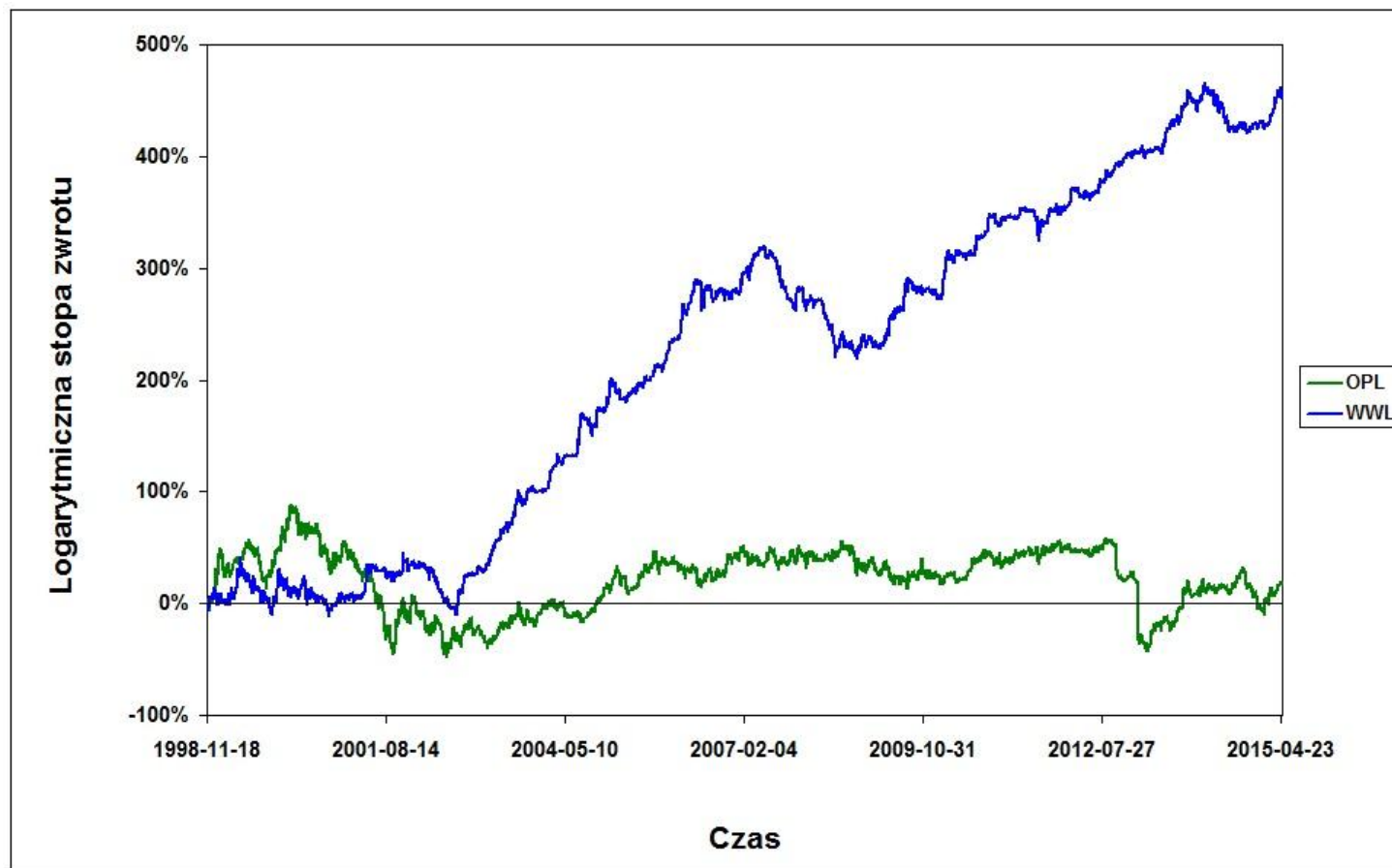
Badania empiryczne



Opracowanie własne.

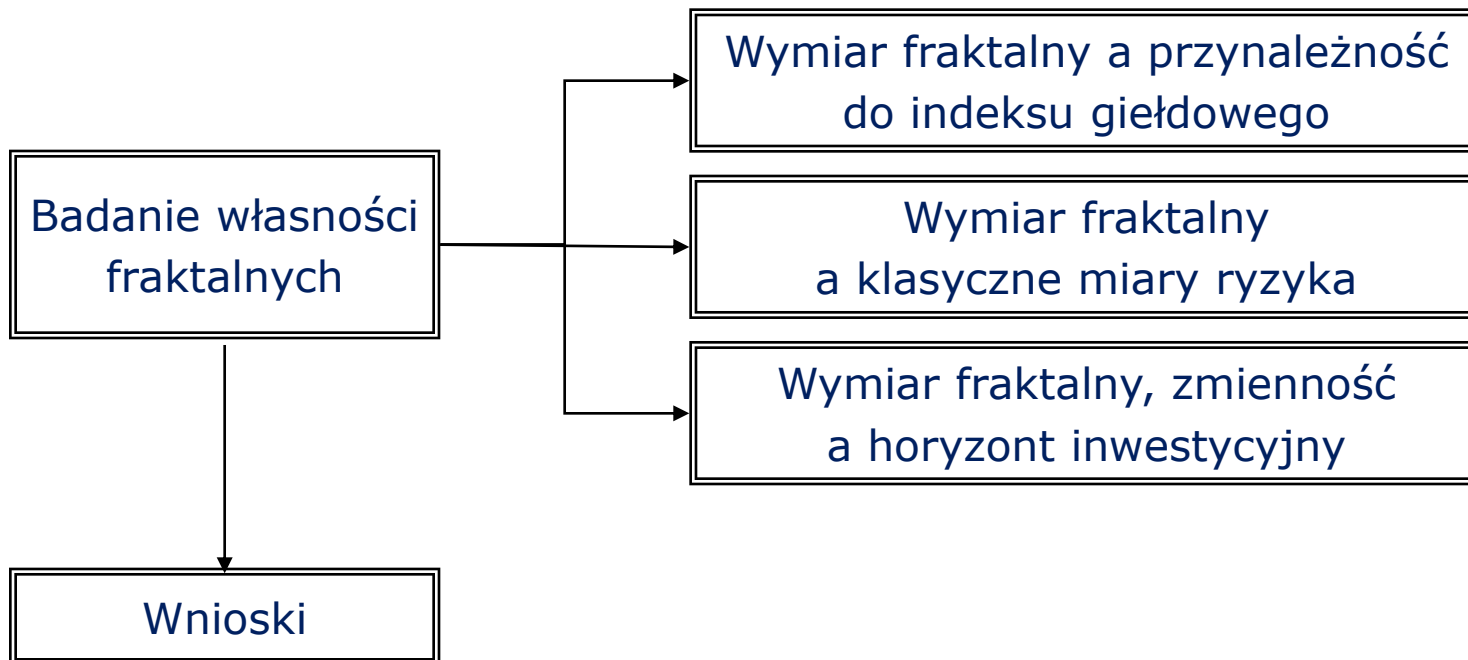


Badania empiryczne



Opracowanie własne.

Badania empiryczne – przebieg



Badania empiryczne – wnioski

1. Wymiar fraktalny dostarcza informacji niepowielającej się z informacjami dostarczanymi przez miary klasyczne;

Badania empiryczne – wnioski

2. Wymiar fraktalny pozostaje w bliskim związku z fluktuacjami zmienności w czasie:

- dla krótkich horyzontów inwestycyjnych niższe wartości wymiaru fraktalnego oznaczają niższe ryzyko, a wyższe wartości wymiaru fraktalnego wyższe ryzyko;
- dla długich horyzontów inwestycyjnych niższe wartości wymiaru fraktalnego oznaczają wyższe ryzyko, a wyższe wartości wymiaru fraktalnego niższe ryzyko.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ

