Ortvay Rudolf verseny régebben publikált megoldásai

A jelen cikk az 1991/12.-es Fizikai Szemlében publikált megoldás lényegében azonos, digitalizált változata. A digitalizálás részben optikai karakterfelismerők felhasználásával történt.

1991/12. Feladat

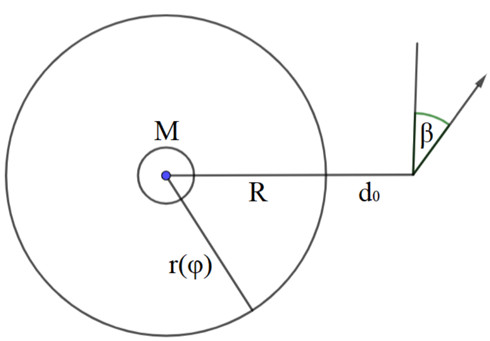
Megfelelően erős gravitációs térben a fény is körpályára kényszerül. Hol kell elhelyezkednem, ha meg akarom látni a saját hátamat? Meglátom-e? Lézer-zseblámpám igen kis α nyílásszögű kúpszerű fénynyalábot bocsát ki. Előre célozva meg akarom világítani a saját hátamat. Mekkora lesz a fényfolt?

(Dávid Gyula)

Eredetileg írta: Siklér Ferenc.
Digitalizálta: Gombkötő Ákos.
A versenyre beküldött megoldások közül felhasználásra került: Siklér Ferenc beküldött megoldása.
A megoldást ellenőrizte: Dávid Gyula
Megjegyzések:
- Az 1991.-es verseny számozása szerint a feladat 11. sorszámú lenne.
+a feladat története?

Egy M tömegű vonzócentrumot feltételezve, az általános relativitás-elméletből a fényre a pályasíkban ($\vartheta = \pi/2$) a következő egyenlet adódik:

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = \frac{3}{c^2}\gamma\frac{M}{r^2} \tag{1}$$



Ha a fény körpályán halad, $1/r$ állandó:

$$\frac{1}{r} = \frac{3}{c^2}\gamma\frac{M}{r^2} \implies R = \frac{3\gamma M}{c^2} \tag{2}$$

(Például a Napra R = 4,4 km, azaz a centrum egy fekete lyuk, hiszen $R_m < R$ szükséges.)

Tehát R távolságra kell állni, hogy meglássam a saját hátamat. Ez kívül esik a fekete lyuk eseményhorizontján, ami $R_S = \gamma M/c^2$ (Schwarzschild-sugár).

Indítsunk fénynyalábot $R + d_0$ távolságról β szögben, $d_0 \ll R$ és β kicsi $d(\varphi)$-t keressünk. Az egyenlet

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{R+d}\right) + \frac{1}{R+d} = \frac{R}{(R+d)^2}, \qquad d(0) = d_0; d'(0) = R\beta \tag{3}$$

Ezt sorbafejtve

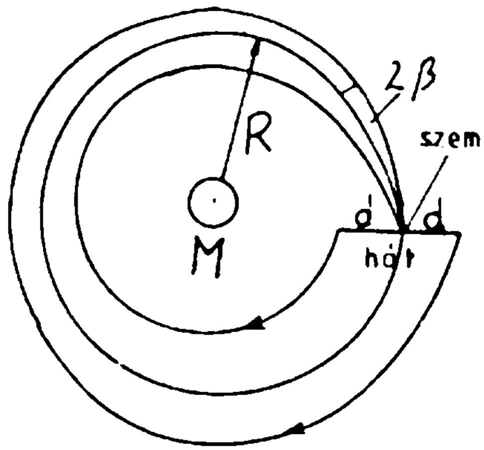
$$\frac{d^2}{dd\varphi^2}\left(\frac{1}{R}\left[1 - \frac{d}{R}\right]\right) + \frac{1}{R}\left(1 - \frac{d}{R}\right) = \frac{R}{R^2}\left(1 - \frac{2d}{R}\right) \implies d'' = d \tag{4}$$

Ezért

$$d(\varphi) = Ae^{\varphi} + Be^{-\varphi} \tag{5}$$

A kezdőfeltételek figyelembevételével

$$d(\varphi) = d_0 \cosh\varphi + R\beta \sinh\varphi. \tag{6}$$



Így egy kör után

$$d(2\pi) = d_0 \cosh(2\pi) + R\beta \sinh(2\pi) \approx \frac{e^{2\pi}}{2}(d_0 + R\beta) \tag{7}$$

lesz az eltérülés. A hát szélessége $2d = 0,5m$. Az eredményeket felhasználva ($M = M_{Nap}$)

$$d \approx \frac{e^{2\pi}}{2} R\beta \implies 2\beta \approx 8,4 \cdot 10^{-7} \tag{8}$$

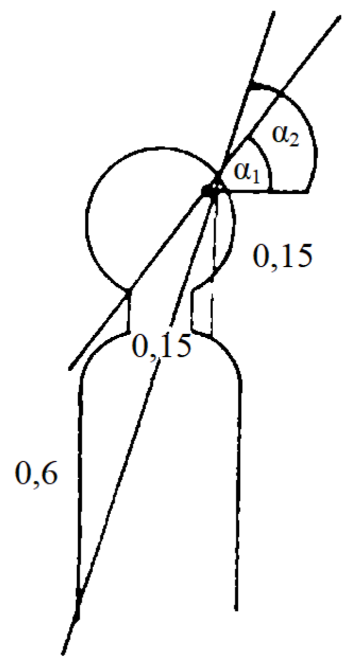
Tehát a hát szélességét kb. 10^{-6} szög alatt látom. Mivel a szem felbontóképessége kb. $5 \cdot 10^{-6}$, a részletek nem lesznek kivehetők.

A hát magassága $0,6m$, a többi méret az ábrán látható. Az R távolságból indított, a pályasíkkal α szöget bezáró fénysugár ($\beta = 0$) ugyanott, ugyanazon α szögben érkezik vissza. Ezért

$$\tan\alpha_1 = \frac{0,15}{0,15} \implies \alpha_1 = 45° \tag{9}$$

$$\tan\alpha_2 = \frac{0,75}{0,15} \implies \alpha_2 = 80° \tag{10}$$

Tehát a hátamból egy 45°-80° helyzetű *függőleges vonást* látok.

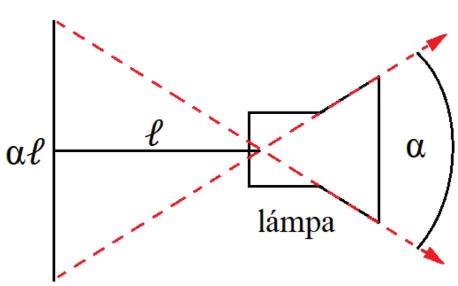


A zseblámpa fényfoltjának szélességére az előzőekhez hasonlóan $e^{2\pi}R\alpha/2$ adódik, ahol α a nyílásszög. Ha a fényforrás és a hát távolsága l, a folt magassága αl. Tehát a magasság és szélesség aránya ($l = 0,5m$)

$$\frac{2l}{e^{2\pi}R} \approx 4 \cdot 10^{-7}, \tag{11}$$

vagyis gyakorlatilag az egy *vízszintes fényvonal* lesz.

A megoldás során „földi" megfigyelővel számoltunk. Az elmélet keretein belül azonban nem adhatunk választ arra, hogy ilyen extrém körülmények között a zseblámpa hogyan működik (tud-e vékony nyalábot kibocsátani); milyen a fényvisszaverődés a háton; a megfigyelő képes-e látni, érzékelni. Meg lehetne vizsgálni az ilyen téridő szerkezetét is.



A fény színe nem változik. A frekvenciaeltolódásra

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\phi(\text{hát széle}) - \phi(\text{szem})}{c^2} \approx 10^{-5}, \tag{12}$$

elenyésző.

Másrészt a test két széle közti gravitációs erőkülönbség

$$\Delta F = \gamma M \left(\frac{1}{(R-d_0)^2} - \frac{1}{(R+d_0)^2} \right) \approx \frac{\gamma M}{R^3} 4 d_0 \approx 10^9 N \tag{13}$$

Ezt nem lehet elviselni: nem láthatom meg a hátamat.