Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

Linearen Algebra 1 für
Informatiker/innen und Physiker/innen
WS 2014/2015

Dr. Bernhard Gerlach,
Dr. Viktor Fromm, Lutz Klaczynski,
Nikolai Strogies, Klébert Kentia

KLAUSURBEISPIEL

Mittwoch, 04.02.2015

(120 Minuten)

Name: Vorname:

Studiengang: Matrikelnummer:

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte	10	10	10	10	10	50
erreichte Punkte						
Korrektor						

Hinweise:

1. Bitte zu Beginn das Deckblatt vollständig und gut lesbar ausfüllen.
2. Erlaubtes Hilfsmittel ist ein beidseitig mit beliebigen Informationen handbeschriebenes, nicht kopiertes A4-Blatt.
3. Bitte fangen Sie jede Aufgabe auf einem neuen Blatt an.
4. Versehen Sie <u>alle Blätter</u> mit Ihrem Namen und Matrikelnummer.
5. Alle Schritte sollten möglichst gut begründet werden.
6. Nach Beendigung der Klausur sind die Aufgabenblätter, die gelösten Aufgaben, sowie die Schmierzettel abzugeben! Die Aufgabenblätter sind durchzunummerieren. Unterschreiben Sie auf der letzten Seite. Streichen Sie was nicht zu bewerten ist.

Zur Bearbeitung von Aufgabe 1 tragen Sie bitte genau ein Kreuz in jede Spalte der Tabelle ein:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)	k)	l)
wahr												
falsch												
weiß nicht												

Aufgabe 1 (10 Punkte) Geben Sie an, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Für jede richtige Antwort bekommen Sie einen Punkt, für jede falsche Antwort werden Ihnen ein Punkt abgezogen. Eine nichtbeantwortete Frage wird mit 0 Punkten bewertet. Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten bewertet, es werden maximal 10 Punkte für diese Aufgabe vergeben.

a) Jedes reelle homogene lineare Gleichungssystem, das mehr als eine Lösung besitzt, hat unendlich viele.

b) Es gilt $a \to b \Leftrightarrow \neg b \to \neg a$ für Aussagen a, b.

c) $8^3 \equiv 2 \pmod 3$.

d) Für jede ganze Zahl $k \in \mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Z}_k$ ein Körper.

e) 3 besitzt in $\mathbb{Z}_9$ ein multiplikatives Inverses.

f) Die drei Punkte $(1, 2, 0), (1, 1, 1)$ und $(0, 0, -1)$ liegen auf einer Ebene im $\mathbb{R}^3$.

g) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\{a, b, c\}$ sei in V linear unabhängig. Dann ist für beliebige $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ auch $\{\lambda a + \mu b + \nu c, b, c\}$ linear unabhängig.

h) Es sei U ein Untervektorraum eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Aus $u, v \notin U$ folgt $u + v \notin U$.

i) Es gibt eine lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ mit $\psi(x) = x^2$ und $\psi(x^2) = x$, wobei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der reellen Polynome ist.

j) Die Menge $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

k) Es seien A, B und C beliebige Mengen und $f : A \to B$ und $g : B \to C$ injektive Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

l) Jede lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $\dim \mathrm{Ker}(f) = 0$ ist injektiv.

Aufgabe 2 (10 Punkte).

a) Definieren Sie die folgenden Begriffe: Basis, Dimension eines Vektorraums. (2P)

b) Der Unterraum $W \subseteq \mathbb{R}^4$ sei durch die Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 := \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannt. Wählen Sie aus diesen Vektoren eine Basis $\mathcal{B}$ von W. (4P)

c) Bestimmen Sie für jeden der Vektoren v_1, v_2, v_3 die Koordinatendarstellung bezüglich der von Ihnen gewählten Basis $\mathcal{B}$ an. (4P)

Aufgabe 3 (10 Punkte).

a) Definieren Sie die folgenden Begriffe: Gruppe, Untergruppe einer Gruppe. (2P)

b) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine Gruppe. Finden Sie eine echte Teilmengen $U \subsetneq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass $(U, \cdot)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ist. (2P)

c) Es sei $(\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \cdot)$ die Gruppe aller invertierbaren reellen 3×3 - Matrizen mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung und sei

$$U := \left\{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \,\middle|\, \det A \in \{-1, 1\} \right\}.$$

Zeigen Sie, dass $(U, \cdot)$ eine Untergruppe von $(\mathrm{GL}_3(\mathbb{R}), \cdot)$ ist. (3P)

d) Liegt die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$? Liegt A in U? (3P)

Aufgabe 4 (10 Punkte).
Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

eine reelle Matrix, und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x) = A \cdot x$ die durch A gegebene lineare Abbildung.

a) Geben Sie eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$ an. (3P)

b) Geben Sie eine Basis von $\mathrm{Im}(f)$ an. (3P)

c) Finden Sie zwei Basen $M = \{v_1, v_2, v_3\}$ und $N = \{w_1, w_2, w_3\}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass (2P)

$$D_{MN}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

d) Konstruieren Sie den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = b$ für $b = \alpha w_1 + \beta w_2$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (2P)

Aufgabe 5 (10 Punkte).
Es sei V der Vektorraum der geraden reellen Polynome vom Grad ≤ 6, d.h. der Polynome $p(x)$ der Form $p(x) = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + a_3x^6$. Wir definieren ein Skalarprodukt auf V wie folgt: für beliebige Polynome $p(x) = a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + a_3x^6$ und $q(x) = b_0 + b_1x^2 + b_2x^4 + b_3x^6$ aus V,

$$\langle p, q\rangle := \frac{1}{2} \cdot a_0b_0 + a_1b_1 + 2 \cdot a_2b_2 + 4 \cdot a_3b_3.$$

Wir betrachten nun die Polynome $p_1(x) := 2x^6$, $p_2(x) := x^2 - 1$, $p_3(x) := 2 - x^2 + x^6$, sowie den Unterraum U von V, welcher durch diese drei Polynome aufgespannt wird.

a) Wie ist die zum Skalarprodukt $\langle\cdot, \cdot\rangle$ gehörende Norm $\|\cdot\|$ definiert? (1P)

b) Bestimmen Sie $\|p_1\|$ sowie $\langle p_2, p_3\rangle$. (2P)

c) Prüfen Sie, ob p_1, p_2, p_3 eine Orthonormalbasis von U ist? (1P)

d) Führen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren für die Polynome p_1, p_2, p_3 aus. (4P)

e) Beweisen Sie: Zwei orthogonale und normierte Vektoren sind stets linear unabhängig. (2P)