Operator różnicowania

Niech f_n będzie funkcją zespoloną określoną na zbiorze liczb naturalnych. (Na przykład $f_n = n^2 + 2$.)

Operator różnicowania o podstawie z, oznaczany symbolem Δ_z, zdefiniowany jest następująco:

$$\Delta_z f_n = f_{n+1} - z f_n,$$

gdzie z jest ustaloną liczbą zespoloną.

Przykłady różnicowania

$$\Delta_1 2^n = 2^{n+1} - 1 \cdot 2^n = 2^n,$$
$$\Delta_2 2^n = 2^{n+1} - 2 \cdot 2^n = 0,$$
$$\Delta_3 2^n = 2^{n+1} - 3 \cdot 2^n = -2^n.$$

Ogólnie

$$\Delta_z 2^n = 2^{n+1} - z2^n = 2^n(2-z).$$

Inny przykład:

$$\Delta_1(n^2+2) = (n+1)^2 + 2 - n^2 - 2 = 2n+1.$$

Liniowość operatora różnicowania

$$\Delta_z(\alpha f_n + \beta g_n) = \alpha \Delta_z f_n + \beta \Delta_z g_n.$$

Sprawdźmy:

$$\begin{aligned}\Delta_z(\alpha f_n + \beta g_n) &= \alpha f_{n+1} + \beta g_{n+1} - z(\alpha f_n + \beta g_n) = \\ &= \alpha(f_{n+1} - z f_n) + \beta(g_{n+1} - z g_n) = \\ &= \alpha \Delta_z f_n + \beta \Delta_z g_n.\end{aligned}$$

Ogólne wzory różnicowania

$$\Delta_z(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \Delta_z u_n + \beta \Delta_z v_n \quad \text{dla } \alpha, \beta \text{ stałych},$$

$$\Delta_z(u_n v_n) = \Delta_0 u_n \Delta_1 v_n + v_n \Delta_z u_n,$$

$$\Delta_z\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\Delta_0 v_n \Delta_z u_n - \Delta_0 u_n \Delta_1 v_n}{v_n \Delta_0 v_n}.$$

Liczby harmoniczne i funkcja digamma (psi)

$$H_0 = 0,$$
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

$$\psi(n) = H_{n-1} - \gamma,$$

gdzie γ stałą Eulera-Mascheroniego wynosząca około 0,5772156649.

Warto też zapamiętać:

$$H_n = \ln n + O(1).$$

Różnicowanie operatorem Δ_z

f_n	$\Delta_z f_n$	Warunki
f_n	$z^{n+1}\Delta_1(\frac{f_n}{z^n})$	$z \neq 0$
C	$C(1-z)$	C stała
a^n	$a^n(a-z)$	a stała
$n^{(k)}$	$n^{(k)}(1-z)+kn^{(k-1)}$	k całkowite
$a^n n^{(k)}$	$a^n[n^{(k)}(a-z)+akn^{(k-1)}]$	k całkowite, a stała
$\psi(n)$	$\frac{1}{n}+(1-z)\psi(n)$	
$\psi(n)z^n$	$\frac{z^{n+1}}{n}$	

Operator sumowania

Operator sumowania Δ_z^{-1} definiujemy dla dowolnego z zespolonego następująco:

$$\Delta_z^{-1} f_n = F_n, \quad \text{gdy} \quad \Delta_z F_n = f_n.$$

Sumowanie jest działaniem wieloznacznym

Twierdzenie 1. Jeżeli funkcja F_n jest wynikiem zastosowania operatora Δ_z^{-1} do funkcji f_n, to każda funkcja postaci $F_n + Cz^n$, gdzie C jest dowolną stałą, jest także wynikiem działania operatora Δ_z^{-1} na funkcję f_n.

Dowód. Rzeczywiście,

$$\Delta_z(F_n + Cz^n) = \Delta_z F_n + \Delta_z C z^n = \Delta_z F_n = f_n,$$

co dowodzi twierdzenia.

Na ile wieloznacznym?

Twierdzenie 2. Jeżeli funkcje F_n i G_n spełniają warunki

$$\Delta_z^{-1} f_n = F_n, \quad \Delta_z^{-1} f_n = G_n,$$

to funkcje F_n i G_n mogą się różnić co najwyżej o składnik typu Cz^n.

Dowód. Z definicji operatora sumowania mamy

$$\Delta_z F_n = f_n, \quad \Delta_z G_n = f_n,$$

co po odjęciu stronami oraz z uwagi na liniowość operatora Δ_z daje

$$\Delta_z(F_n - G_n) = 0.$$

Ciąg dalszy dowodu twierdzenia 2

Oznaczmy teraz przez $T_n = F_n - G_n$. Wówczas $\Delta_z T_n = 0$, a zatem

$$T_{n+1} - zT_n = 0 \quad \text{dla} \quad n = 0, 1, \ldots$$

Otrzymane równanie jest równaniem rekurencyjnym, którego rozwiązaniem jest $T_n = z^{n-1} T_0$, jak to można sprawdzić przez indukcję. W tym rozwiązaniu T_0 jest dowolną stałą, można więc przyjąć $T_0 = Cz$, gdzie C też jest dowolną stałą. Wobec tego $T_n = Cz^n$ skąd wynika, że

$$F_n - G_n = Cz^n.$$

Wnioski z twierdzenia 2

Operatory różnicowania Δ_z i sumowania Δ_z^{-1} są w następującym sensie odwrotne względem siebie:

$$\Delta_z(\Delta_z^{-1} f_n) = f_n,$$
$$\Delta_z^{-1}(\Delta_z F_n) = F_n + C z^n.$$

Sumowanie operatorem Δ_1^{-1}

f_n	$\Delta_1^{-1} f_n$	Warunki
$\alpha f_n + \beta g_n$	$\alpha \Delta_1^{-1} f_n + \beta \Delta_1^{-1} g_n$	α, β stałe
$v_n \Delta_1 u_n$	$u_n v_n - \Delta_1^{-1}(u_{n+1} \Delta_1 v_n)$	
0	C	
A	$An + C$	A stała
a^n	$\frac{a^n}{a-1} + C$	$a \neq 1$
$n^{(k)}$	$\frac{n^{(k+1)}}{k+1} + C$	$k \neq -1$ całkowite

Ciąg dalszy tabeli

f_n	$\Delta_1^{-1} f_n$	Warunki
$a^n n^{(k)}$	$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j \frac{k^{(j)} n^{(k-j)} a^{n+j}}{(a-1)^{j+1}} + C$	$a \neq 1$, k naturalne
$\frac{1}{n}$	$\psi(n) + C$	
$\frac{1}{(n+a)^k}$	$(-1)^{k-1} \frac{\psi^{(k-1)}(n+a)}{(k+1)!}$	a stała, k naturalne
$(an+b)^{(k)}$	$\frac{(an+b)^{(k+1)}}{a(k+1)} + C$	$a \neq 0$, $k \neq -1$, k całk.

Podstawowe twierdzenie dla sumowania

Twierdzenie 3. Jeżeli

$$\Delta_1 F_n = f_n\,,$$

k, m zaś są liczbami naturalnymi lub zerem, przy czym $k \leq m$, to

$$\sum_{n=k}^{m} f_n = F_{m+1} - F_k\,.$$

Dowód. $\sum_{n=k}^{m} f_n = \sum_{n=k}^{m} \Delta_1 F_n = \sum_{n=k}^{m} (F_{n+1} - F_n) =$
$= \sum_{n=k+1}^{m+1} F_n - \sum_{n=k}^{m} F_n = F_{m+1} - F_k\,.$