公式 1. 任意の整数 n と任意の複素数 a に対して、複素平面上の a を中心とする半径 r の円（向きは反時計まわり) を C としたとき、

$$\oint_C (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & (n \neq -1) \\ 2\pi i & (n = -1) \end{cases} \tag{1}$$

Proof. $n \geq 0$ のとき、$(z-a)^n$ は C の内部で正則なので、コーシーの積分定理より

$$\oint_C (z-a)^n dz = 0 \tag{2}$$

がわかります。$n < 0$、すなわち $n \leq -1$ のときを考えます。C は複素平面上の a を中心とする半径 r の円でしたが、このような円上の点 z は $z = a + re^{i\theta}(0 \leq \theta < 2\pi)$ とかけます。いま求める積分について $z = a + re^{i\theta}$ と置換積分すると、$dz = ire^{i\theta}d\theta$ なので、

$$\oint_C (z-a)^n dz = \int_0^{2\pi} (a + re^{i\theta} - a)^n \cdot ire^{i\theta} d\theta \tag{3}$$

$$= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta \tag{4}$$

ここから先は $n = -1$ かそうでないかで変わります。先に $n < -1$ の場合を考えると、

$$ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = ir^{n+1} \left[\frac{1}{i(n+1)} e^{i(n+1)\theta} \right]_0^{2\pi} \tag{5}$$

$$= \frac{r^{n+1}}{n+1} \left(e^{2i(n+1)\pi} - e^0 \right) \tag{6}$$

$$= \frac{r^{n+1}}{n+1} (1-1) = 0 \tag{7}$$

と 0 であることが分かりました。最後に $n = -1$ の場合です。

$$ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d\theta = ir^{-1+1} \int_0^{2\pi} e^{i(-1+1)\theta} d\theta \tag{8}$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^0 d\theta \tag{9}$$

$$= i \int_0^{2\pi} d\theta \tag{10}$$

$$= 2\pi i \tag{11}$$

□

以上のように公式が示されました。これを使った超簡単な問題を解いてみましょう。

例題 1. 複素数 a に対して、C_a を、複素平面上の a を中心とする半径 r の円（向きは反時計まわり) とする。以下の積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\oint_{C_1}(z-1)^2dz$
(2) $\displaystyle\oint_{C_0}\frac{1}{z}dz$
(3) $\displaystyle\oint_{C_0}\frac{1}{z^3}dz$
(4) $\displaystyle\oint_{C_2}\frac{1}{z^2-4z+4}dz$

解答. (1) 公式の $n=2, a=1$ の場合です。答えは 0 です。
(2) 公式の $n=-1, a=0$ の場合です。答えは $2\pi i$ です。
(3) 公式の $n=-3, a=0$ の場合です。答えは 0 です。
(4) $\displaystyle\frac{1}{z^2-4z+4}=\frac{1}{(z-2)^2}$ より $n=-2, a=2$ のときです。答えは 0 です。

ところで、(2) はあなたの質問の回答になっています。画像の赤い部分はまさにこの積分であり、公式を当てはめれば $2\pi i$ になることはすぐにわかります。

さて、質問はローラン展開だけだと思っていたので正直留数までやるとは思っていなかったのですが・・・まあせっかくだしやりましょうか。
まず、返信から $\displaystyle\oint_C\frac{1}{z(z+1)}dz$ のことが留数だと思っているふしがありますが、これは留数ではありません。ここで留数とは何なのか覚えて帰ってもらいたいです。

定義 1. 関数 $f(z)$ を、$z=c$ まわりでローラン展開したとき、

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-c)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-c)^n} \tag{12}$$

となるが、a_{-1} のことを、「$f(z)$ の c の留数」といい、$Res(f,c)$ とかく。

では、具体的な関数について留数を求めてみましょう。

例題 2. $f(z)=\dfrac{z+1}{z}$ について、0 の留数を求めよ。つまり $Res(\frac{z+1}{z},0)$ を求めよ。

解答. 0 の留数とはまずなんでしょうか。$f(z)$ を $z=0$ 周りでローラン展開した際の、$\frac{1}{z}$ の係数のことです。これを調べるのは実際にローラン展開してしまえばよいですね。ところでこのローラン展開は以前の資料でも

やりましたね。

$$\frac{z+1}{z} = 1 + \frac{1}{z} \tag{13}$$

と、簡単に $z=0$ 周りのローラン展開ができました。これの $\frac{1}{z}$ の係数なのですから、$f(z)$ の 0 の留数は 1 です。

基本はつかめたでしょうか。もっと難しい問題をやりましょうか。

例題 3. 次に述べるものを求めよ。

(1) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$ の 1 の留数
(2) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ の 0 の留数

解答. まあ頑張ってローラン展開しましょう。ところでこれらのローラン展開は以前の資料でやったのでわざわざ何度もやりません。
(1)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-1)^{n-1} \tag{14}$$

でしたね。1 の留数とはこのローラン展開の、$\frac{1}{z-1}$ の係数です。これは $\frac{1}{2}$ ですね。したがって $f(z)$ の 1 の留数は $\frac{1}{2}$ です。
(2)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} \tag{15}$$

でした。0 の留数とはこのローラン展開の $\frac{1}{z}$ の係数のことですが、これは 1 です。したがって $f(z)$ の 0 の留数は 1 です。

本当は先回りして留数定理のところまで書きたかったのですがさすがに眠いので起きてからやります。とりあえず取り急ぎ。