Matematik A-niveau STX
27. maj 2020 gl

Dette er minimale løsningsskitser til STX A-niveau eksamen d. 27/05/20. Af CAS kræves: Maple 2020.
NB: Dette er **ikke** en elevbesvarelse. E-mail: `matematikuniverset@hotmail.com`

Delprøve 1.

Opgave 1.

(a) Udtrykket er givet ved $x(x+4)-(x+2)^2$. Dette reduceres nedenfor.

$$\begin{aligned} x(x+4)-(x+2)^2 &= x^2+4\cdot x-(x^2+2^2+2\cdot 2\cdot x) && (1)\\ &= x^2+4x-(x^2+4+4x) && (2)\\ &= x^2+4x-x^2-4-4x && (3)\\ &= -4. && (4)\end{aligned}$$

Dvs. udtrykket bliver -4.

Opgave 2.

(a) Funktionen $f(x)$ differentieres vha. produktreglen.

$$f'(x)=(x^3+5x)'\cdot\ln(x)+(x^3+5x)\cdot(\ln(x))'=(3x^2+5)\ln(x)+x^2+5,\quad x>0. \tag{5}$$

Indsæt $x=1$ i (5), dvs. bestem $f'(1)$.

$$f'(1)=(3\cdot 1^2+5)\ln(1)+1^2+5=6. \tag{6}$$

Bemærk, at $\ln(1)=0$

Opgave 3.

(a) Det bestemte integral udregnes.

$$\begin{aligned} \int_1^2 (4x^3+8x)dx &= \left[4\cdot\frac{1}{3+1}x^{3+1}+8\cdot\frac{1}{1+1}x^{1+1}\right]_1^2 && (7)\\ &= [x^4+4x^2]_1^2 && (8)\\ &= 2^4+4\cdot 2^2-(1^4+4\cdot 1^2) && (9)\\ &= 32-5=27. && (10)\end{aligned}$$

Dvs. $\int_1^2(4x^3+8x)dx=27$.

OPGAVE 4.

(a) Ligningen omskrives til formen $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

$$x^2+10x+y^2-6y=2 \Leftrightarrow \tag{11}$$
$$x^2+10x+5^2+y^2-6y+3^2=2+5^2+3^2 \Leftrightarrow \tag{12}$$
$$(x+5)^2+(y-3)^2=36. \tag{13}$$

Vi brugte $(x+5)^2=x^2+10x+5^2$ og $(y-3)^2=y^2-6y+3^2$.
Dermed er $C(-5,3)$ og $r=6$.

OPGAVE 5.

(a) Toppunktsformlen er givet ved $x_T=\frac{-b}{2a}$. Tallet $b=k$ og $a=1$. Man ved, at førstekoordiaten til toppunktet er $x_T=-2$, dermed har man ligningen for k.

$$-2=\frac{-k}{2\cdot 1}\Leftrightarrow 2=\frac{k}{2}\Leftrightarrow k=4. \tag{14}$$

Andenkoordinaten udregnes.

$$f(-2)=(-2)^2+4\cdot(-2)-1=4-8-1=-5. \tag{15}$$

Dvs. $T(-2,-5)$.

OPGAVE 6.

(a) Der er givet $f(x)=a^x$, hvor det oplyses at $a>0$. Ligningen opstilles.

$$f(x+2)=16\cdot f(x)\Leftrightarrow a^{x+2}=16\cdot a^x. \tag{16}$$

Anvend regnereglen $k^{m+n}=k^m k^n$.

$$a^{x+2}=16\cdot a^x\Leftrightarrow a^x a^2=16\cdot a^x\Leftrightarrow a^2=16\Leftrightarrow a=4. \tag{17}$$

Bemærk, at man normalt også vil få $a=-4$, men da $a>0$ forkastes denne. Man kan faktisk også få $a=0$, hvis ligningen løses anderledes, men denne forkastes også. Den eneste søgte løsning er $a=4$.

Delprøve 2.

Se næste side. Løsningsforslag er lavet i Maple 2020.

Downloadet her: Matematik Universet matematikuniverset@hotmail.com

Pdf-fil eksporteret til LaTeX.
Matematik A delprøve 2, 27. maj 2020 gl.

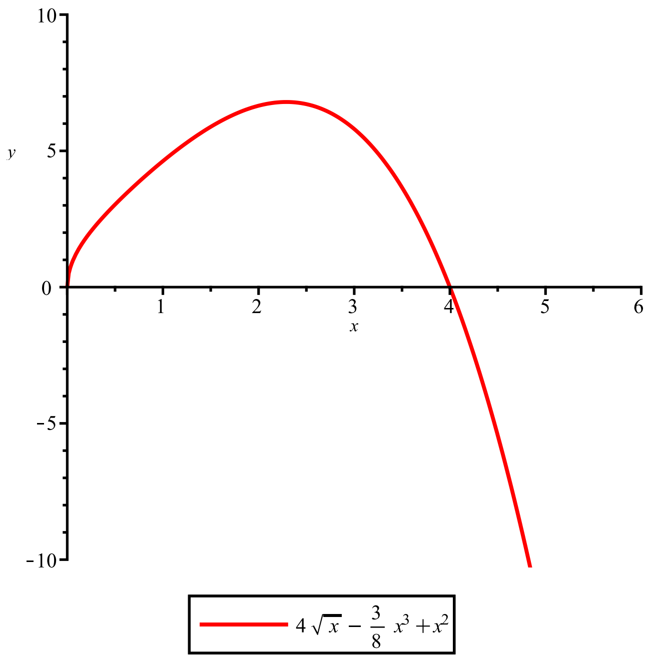
Vi forventer folk har opgavesættet ved hånden.

Opgave 7:
with(*Gym*) :
Funktionen defineres.

$f(x) := 4\cdot\mathrm{sqrt}(x) - \frac{3}{8}\cdot x^3 + x^2 :$

(a) Grafen tegnes, og heraf bestemmes nulpunkterne.

$plot(f(x), x=0..6, y=-10..10, color=red, legend=f(x))$



Af grafen aflæses nulpunkterne $x=0 \vee x=4$. Dette kan også findes ved løsning af en ligning.
$solve(f(x)=0.)$

$$0., 4., -1.271019255 + 1.372185854\,\mathrm{I}, -1.271019255 - 1.372185854\,\mathrm{I} \quad (1)$$

Man benytter ikke de komplekse tal-værdier, så dermed er $x=0 \vee x=4$.

(b) Arealet af M, der afgrænses mellem 0 og 4 bestemmes.

$A_M = \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$

$$A_M = \frac{56}{3} \quad (2)$$

$evalf[5](\mathbf{(2)})$

$$A_M = 18.667 \quad (3)$$

Dvs. arealet af M er 18.667.

(c) Nu roteres $f(x)$ 360^o om førsteaksen, hvorfor volumen bestemmes.

$V_M = \pi \cdot \int_0^4 f(x)^2 \, dx$

$$V_M = \frac{10624\,\pi}{105} \tag{4}$$

$evalf[5]((\mathbf{4}))$

$$V_M = 317.87 \tag{5}$$

Dvs. volumen af M er 317.87.

Opgave 8:

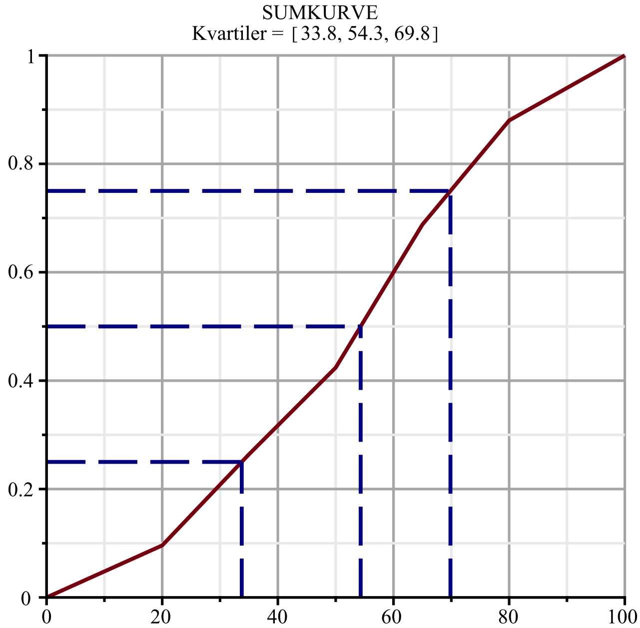
restart; *with*(*Gym*) : *with*(*LinearAlgebra*) :

Tabellens data defineres.

$$DATA := \begin{bmatrix} 0..20 & 20..35 & 35..50 & 50..65 & 65..80 & 80..100 \\ 60 & 105 & 100 & 165 & 120 & 75 \end{bmatrix}:$$

(a) En sumkurve laves.

plotSumkurve(*Transpose*(*DATA*))



Af sumkurven fremgår også kvartilsættet, som er $[33.8, 54.3, 69.8]$.

Downloadet her: Matematik Universet matematikuniverset@hotmail.com

Men! Ikke alle har Maple. Man kender hyppighederne og observationerne.

Observationer,	0 − 20	20 − 35	35 − 50	50 − 65	65 − 80	80 − 100
Hyppighed.	60	105	100	165	120	75
Frekvens. (%)	9.6	16.8	16	26.4	19.2	12
Kum. frekvens. (%)	9.6	26.4	42.4	68.8	88	100

På baggrund af oplysningerne ovenfor vil man være i stand til at tegne en sumkurve og derved aflæse kvartilsættet.

(b) Opgavens formulering gør, at man ikke umiddelbart kan besvare spørgsmålet. Men jeg forsøger alligevel!
Gymnasiet består af 625 elever, og "Gymnasiet vil gerne uddele diplomer til de 50 elever, der har klaret sig bedst i prøven.", dermed kan man finde den procentandel, som vil få et diplom.

$$\frac{50}{625.}$$

$$0.08000000000 \tag{6}$$

Dvs. 8% vil få et diplom. Hvis man ønsker at vide, hvor mange procent i rigtige svar man skal have for at få et diplom, bestemmes

$fraktil(Transpose(DATA), 1 - 0.08)$

$$86.66666667 \tag{7}$$

Dermed skal man have scoret 87% rigtige svar (afrundet) for at man kan få et diplom.

Jeg selv ved ikke, hvordan bedømmelsen af denne opgave er foretaget for de enkelte studerende som måtte have været til den skriftlige eksamen. Spørgsmålet er lidt uheldigt formuleret, hvilket jeg ikke håber eleverne er blevet straffet for. Hvis andre matematikere har kommentar, henvend jer gerne til e-mailen.

Downloadet her: Matematik Universet matematikuniverset@hotmail.com

Opgave 9:
(a) Skæringspunktet med førsteaksen og linjen l kræver $y=0$.
$solve(6\,x+8\cdot 0+12=0)$

$$-2 \tag{8}$$

Dvs. $x=-2$. Dermed er skæringspunktet mellem l og førsteaksen $(-2;0)$.

(b)
Metode 1. Vektorregning
Aflæs normalvektorerne fra linjernes ligninger og definér.
$\overrightarrow{n_l} := \langle 6, 8\rangle$:; $\overrightarrow{n_m} := \langle 2, -3\rangle$:
Vinklen mellem linjerne l og m kan findes på baggrund af vinklen mellem deres normalvektorer.
$vinkel\left(\overrightarrow{n_l}, \overrightarrow{n_m}\right)$

$$109.4400348 \tag{9}$$

Der spørges efter en spids vinkel. Dermed er
$v=180-$ **(9)**

$$v=70.5599652 \tag{10}$$

Dvs. vinklen mellem l og m er $v=70.6^o$.

Hvis ikke Gym-pakken var tilgængelig, vil man bruge:
$v=180-\ invCos\left(\frac{dotP\left(\overrightarrow{n_l}, \overrightarrow{n_m}\right)}{len\left(\overrightarrow{n_l}\right)\cdot len\left(\overrightarrow{n_m}\right)}\right)$

$$v=70.5599652 \tag{11}$$

Metode 2. Linjer
Omskriv linjerne.
$isolate(6\,x+8\,y+12=0, y)$; $isolate(2\,x-3\,y+12=0, y)$

$$y=-\frac{3\,x}{4}-\frac{3}{2}$$

$$y=\frac{2\,x}{3}+4 \tag{12}$$

Anvend hældningtallene.
$\mathrm{abs}\left(invTan\left(-\frac{3}{4}\right)-invTan\left(\frac{2}{3}\right)\right)$

$$70.55996517 \tag{13}$$

Dvs. vinklen mellem l og m er $v=70.6^o$.

Downloadet her: Matematik Universet matematikuniverset@hotmail.com

Opgave 10:
Funktionen defineres.
$f(x) := \mathrm{sqrt}\left((x-3)^2+16\right):$
(a) Ligningen for tangenten bestemmes. Tangentligningen er $y = f'(x_0)\cdot(x-x_0)+f(x_0)$.
Man udregner $f(x_0)$ og $f'(x_0)$ enkeltvis. Man har $x_0=6$. Dermed er
$f(6.)$

$$5.000000000 \tag{14}$$

$f'(6.)$

$$0.6000000000 \tag{15}$$

Tangentligningen er
$y=0.6\cdot(x-6)+5$

$$y=0.6\,x+1.4 \tag{16}$$

Eller
$y=\frac{3}{5}\cdot x+\frac{7}{5}$

$$y=\frac{3\,x}{5}+\frac{7}{5} \tag{17}$$

(b)
Metode 1.
Monotoniforholdene bestemmes. Først løses $f'(x)=0$.
$x = solve(f'(x)=0, x)$

$$x=3 \tag{18}$$

Man vælger to andre tal for fortegnsvariation. Vælg $x=2$ og $x=4$.
$f'(2.)$

$$-0.2425356250 \tag{19}$$

$f'(4.)$

$$0.2425356250 \tag{20}$$

Et monotoniskema fremstilles.

x		3	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	→	↗

Dermed kan man konkludere, at $f(x)$ er aftagende i intervallet $]-\infty;3]$ og voksende i intervallet $[3;\infty[$.

Metode 2.
På matematik A ny reform kan man anvende viden fra funktioner af to variable. Indsæt $x=3$ i den anden afledede. Hvis $f''(x_0)<0$ er der lok. maks. i x_0 og hvis $f''(x_0)>0$ er der lok. min. i x_0
$f''(3.)$

$$0.2500000000 \tag{21}$$

Da $f''(3)>0$ følger det, at der er lokalt minimum i $x=3$. Dermed kan man konkludere, at $f(x)$ er aftagende i intervallet $]-\infty;3]$ og voksende i intervallet $[3;\infty[$.

Downloadet her: Matematik Universet matematikuniverset@hotmail.com

Opgave 11:
(a) Differentialligningen løses vha. en kommando.
$dsolve\left(\{y'(t)=0.034\cdot y(t)-250\cdot 1.011^{t}, y(0)=4500\}, y(t)\right)$

$$y(t) = -\frac{125000\ 1011^{t}\ 1000^{-t}}{500\ \ln(1011)-1500\ \ln(10)-17}+e^{\frac{17\,t}{500}}\left(4500+\frac{125000}{500\ \ln(1011)-1500\ \ln(10)-17}\right) \quad \textbf{(22)}$$

$evalf[5]((\mathbf{22}))$

$$y(t)=10870.\ 1011.^{t}\ 1000.^{-1.\,t}-6370.\ e^{0.034000\,t} \quad \textbf{(23)}$$

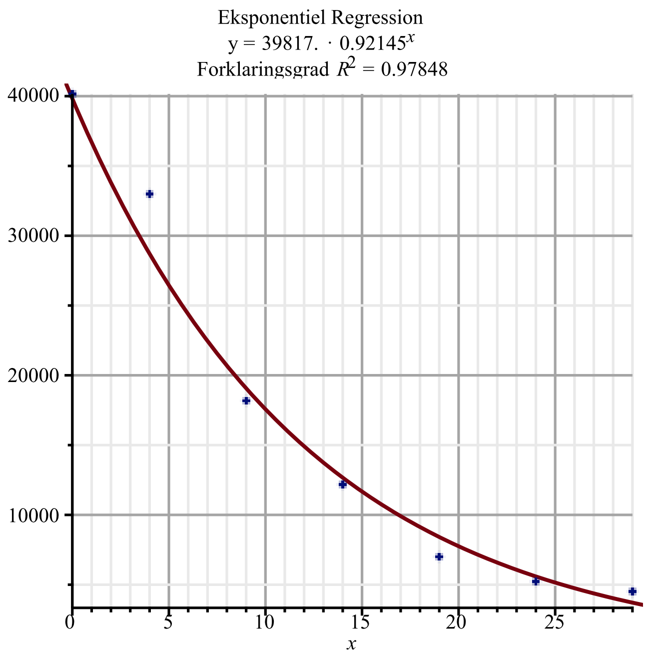
Forskriften er $y(t)=10841.2554\cdot 1011^{t}\cdot 1000^{-t}-6341.2554\cdot e^{0.034\,t}$.

(b) Løs ligningen $y(t)=0$.
$t=solve\left(10841.2554\cdot 1011^{t}\cdot 1000^{-t}-6341.2554\cdot e^{0.034\,t}=0, t\right)$

$$t=23.25588227 \quad \textbf{(24)}$$

Dvs. 23.26 år, eller 23 år og ca. 3 måneder efter personen gik på pension, er pensionopsparingen 0kr.

Opgave 12:
(a) Oplysningerne defineres. År 1986 svarer til $x=0$.
$L1 := [0, 4, 9, 14, 19, 24, 29]:$
$L2 := [40159, 32980, 18179, 12188, 7000, 5215, 4500]:$
$ExpReg(L1, L2)$



En forskrift defineres.
$f(t) := 39817\cdot 0.92145^{t}:$
Hvor $f(t)$ angiver antallet af russiske atomsprænghoveder til tidspunktet t, målt i år efter år 1986.

Downloadet her: Matematik Universet matematikuniverset@hotmail.com

(b) Halveringstiden bestemmes.

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2.}\right)}{\ln(0.92145)}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = 8.472981423 \tag{25}$$

Dvs. hvert 8.5år halveres de russiske atomsprænghoveder.

(c) Man opstiller en model, $g(t) := 1568 \cdot t + 39817$:
Man finder ud af, hvornår der var 25000 russiske atomsprænghoveder. Løs ligningen
$solve(f(t) = 25000, t)$

$$5.689237864 \tag{26}$$

Dvs. i år $1986 + 5.68 = 1991.68$. Dermed var der i løbet af 1991, 25000 russiske atomsprænghoveder.
Man finder på samme måde med den lineære sammenhæng.
$solve(g(t) = 25000.,)$

$$-9.449617347 \tag{27}$$

Dvs. i år $1986 - 9.45 = 1976.55$. Dermed var der også i løbet af 1976, 25000 russiske atomsprænghoveder.

Opgave 13:
For nemhedens skyld defineres alle oplysninger.
$A := [0, 120, 0] :; B := [103.9, -60, 0] :; P := [0, 0, 1500] :$
(a) En parameterfremstilling bestemmes. Retningsvektoren mellem A og P udregnes.

$$\overrightarrow{AP} := \langle P - A \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ -120 \\ 1500 \end{bmatrix}.$$

Parameterfremstillingen igennem P (eller A) er

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -120 \\ 1500 \end{bmatrix}$$

Det er også okay at skrive:
$\langle x, y, z \rangle = \langle A \rangle + t \cdot \overrightarrow{AP}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 120 - 120\,t \\ 1500\,t \end{bmatrix} \tag{28}$$

Downloadet her: Matematik Universet matematikuniverset@hotmail.com

(b) Ligningen for kuglen bestemmes. Først udregnes afstanden mellem A og B.
$|AB| = len(\langle B - A \rangle)$

$$|AB| = 207.8345736 \quad \textbf{(29)}$$

Radius er derfor $\frac{207.8345736}{2} = 103.9172868$.
Kuglens ligning er
$(x-0)^2 + (y-120)^2 + (z-0)^2 = 103.9172868^2$

$$x^2 + (y-120)^2 + z^2 = 10798.80250 \quad \textbf{(30)}$$

(c) Anvend parameterfremstillingen fra (a) og kuglens ligning fra (b). Find t.
$solve\left(0^2 + (120 - 120 \cdot t - 120)^2 + (1500 \cdot t)^2 = 10798.80250, t\right)$

$$0.06905755947, \ -0.06905755947 \quad \textbf{(31)}$$

Man får to værdier af t. Eftersom Q ligger over A og B men under P har man $t = 0.06905755947$. (Hvis $t = 0$ fås A).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \\ 0 \end{bmatrix} + 0.06905755947 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -120 \\ 1500 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0. \\ 111.7130929 \\ 103.5863392 \end{bmatrix} \quad \textbf{(32)}$$

Dvs. punktet Q har koordinatsættet $Q(0, 111.7, 103.6)$.

Opgave 14:
$restart; with(Gym):$
(a) Vinkel A er dobbelt så stor som vinkel B. Dvs. $A := 2 \cdot B:$
Vinkel C er 6 gange så stor som vinkel B. Dvs. $C := 6 \cdot B:$
Vinkel B udregnes, da den totale vinkelsum ikke overskrider 180.
$solve(180 = A + B + C)$

$$20 \quad \textbf{(33)}$$

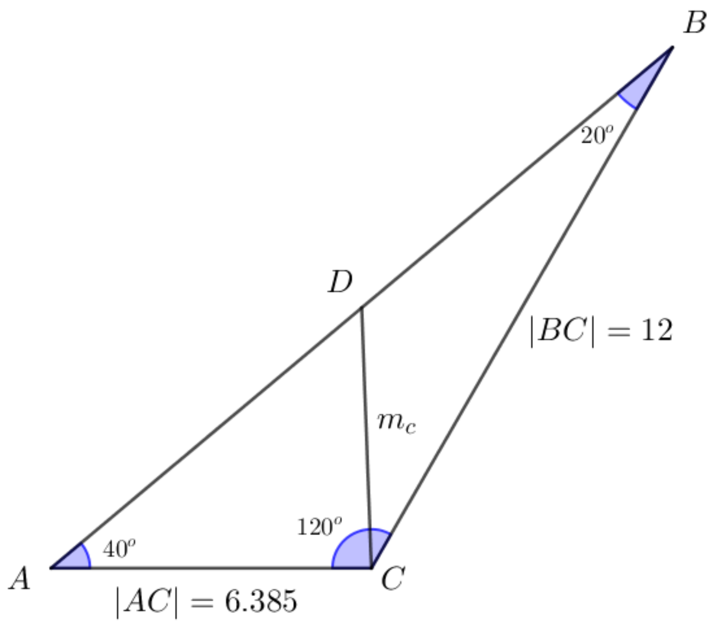
Dvs. $\angle B = 20^o$.

$B := 20:$
Da man kender $|BC| = 12$ kan man finde $|AC|$ vha. sinusrelationerne.
$solve\left(\frac{Sin(A)}{12} = \frac{Sin(B)}{AC}\right)$

$$6.385066634 \quad \textbf{(34)}$$

Altså er $|AC| = 6.385$.

(b) Medianen m_c bestemmes. For nemhedens skyld vises en tegning først.



Man finder $|AB|$ vha. cosinusrelationerne

$$|AB| = \sqrt{6.385^2 + 12^2 - 2 \cdot 6.385 \cdot 12 \cdot Cos(120)}$$

$$|AB| = 16.16750522 \tag{35}$$

Tallet halveres, så

$|AD| = \dfrac{16.16750522}{2}$. Ved hjælp af cosinusrelationerne har man

$$m_c = \sqrt{\left(\frac{16.16750522}{2}\right)^2 + 6.385^2 - 2 \cdot \left(\frac{16.16750522}{2}\right) \cdot 6.385 \cdot Cos(40)}$$

$$m_c = 5.199700042 \tag{36}$$

Dvs. $m_c = 5.2$.

Slut på opgavesættet.
Hvis du har 25. maj, 15. august eller 7. december, så indsend gerne!