2018/2. Feladat

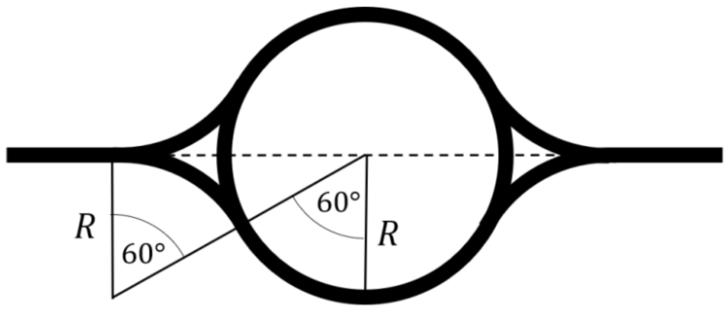
Egy egyenes úton $V = 80$ km/h a sebességhatár. Az útra egy R sugarú körforgalmat építenek. Hány másodperccel lesz hosszabb megtenni ezt az útszakaszt a körforgalommal együtt, mint korábban az egyenes úton? Hogyan függ ez az időkülönbség a körforgalom R sugarától? Készítsünk ábrát az időveszteségről a sugár függvényében! A Google térkép segítségével keressünk néháy valóban létező körforgalmat, mérjük le a sugarát, és tüntessük fel ezt is az ábrán!
Hány méter sugarú legyen a körforgalom, hogy az autós a lehető legtöbb időt veszítse a körforgalom megépítésével az egyenes úthoz képest? Hány méter sugarú legyen, hogy a legkevesebb időt veszítse? Mennyi ez a legkevesebb/legtöbb idő? Hogyan függ ez a két speciális sugár a V sebességhatártól?

Feltételek: az autós a sebességhatárt betartva mindig a lehető leggyorsabban hajt, végig az út középvonalán (soha nem "vágja le" a kanyart). Az úton egyszerre csak egyetlen autó közlekedik, más autó, forgalom, dugó nincs. A körforgalom középpontja rajta van a korábbi egyenes úton. Az autó gyorsulásának abszolút értéke mindig legfeljebb $a_0 = 2$ m/s^2 lehet. A körforgalomra egy vele azonos sugarú íven lehet ráhajtani, ami az egyenes úthoz és a körforgalomhoz is simán illeszkedik. Adjuk meg a numerikus eredményeket is ne csak a képleteket!

(Veres Gábor)

Szerkesztette: Németh Róbert, Gombkötő Ákos
A versenyre beküldött megoldások közül felhasználásra került:
Németh Róbert beküldött megoldása.
A megoldást ellenőrizte: -

A pálya alakjának meghatározása



1. ábra. Az út szemléltetése.

A körforgalmat a leírásnak megfelelően az (1.) ábrán látható módon modellezzük. Ahhoz, hogy a lekanyarodó út a körhöz simán illeszkedjen, szükséges, hogy az illeszkedési pont éppen a két kör középpontja között legyen félúton, mind az egyenes úttal párhuzamos, mind arra merőleges irányból nézve. Utóbbiból következik, hogy az ív középponti szögére teljesülnie kell, hogy $R \cos \alpha = R/2$, ahonnan azonnal adódik, hogy $\alpha = 60°$.

Az útszakaszok csoportosítása gyorsulások szerint

A körforgalom sugarától függően két esetet különböztetünk meg. Az egyik, amikor a sugár elegendően nagy ahhoz, hogy a $V^2/R \leq a_0$ feltétel teljesüljön. Ekkor az autó végig haladhat V sebességgel, és így teljesíti mind a sebességére mind a gyorsulására való kitételt.

A másik eset, amikor $V^2/R > a_0$. Ekkor az autó a körforgalomban csak V-nél lassabban haladhat. A konkrét maximális sebesség kiszámítható, mivel tudjuk, hogy ekkor

$$\frac{v^2}{R} = a_0,$$

Innen:

$$v = \sqrt{a_0 R} \tag{1}$$

Ahhoz persze, hogy az autó a körforgalomba (pontosabban már a felhajtó ívre) ekkora sebességgel hajtson, előtte lassítania kell, ez még több időt vesz el.

Hogy az említett eseteken kívül más nem lehetséges, a feladat megoldása után, megjegyzés formájában diszkutáljuk.

I. eset: $V^2/R \leq a_0$

A feltételt R-re megfogalmazva ez annyit jelent, hogy $R \geq \frac{V^2}{a_0}$.
Ebben az esetben az autósnak az eredeti egyenes úton a körfogalom helyén $4R \cdot \sin 60°$ utat kellett volna megtennie az ábra geometriája alapján. Ezt V sebességgel tenné meg, t_1 idő alatt.

$$t_1 = \frac{4R \cdot \sin 60°}{V} = \frac{4R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{V} = 2\sqrt{3}\frac{R}{V}$$

A körforgalomban és a rávezető szakaszokon az autós összesen 240°-nyi ívet tesz meg, ami radiánban $\frac{4}{3}\pi$. Mivel végig V sebességgel hajt, az eltelt idő:

$$t_2 = \frac{4}{3}\pi\frac{R}{V}.$$

Innen az időkülönbség:

$$\tau = t_2 - t_1 = \left(\frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right)\frac{R}{V} \approx 0,72 \cdot \frac{R}{V}. \tag{2}$$

Ez a körforgalom sugarától láthatóan lineárisan függ. Maximuma a kifejezésnek nincs, minimuma akkor van, amikor R a feltételben előírt minimális érték, vagyis:

$$\tau_{min} = \left(\frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right)\frac{V}{a_0} \qquad \Longleftarrow \qquad R = \frac{V^2}{a_0}$$

Az **I. eset** minimális sugara a sebességhatártól négyzetesen függ! A konkrét adatokkal:

$$\tau_{min} = 8,05 \text{ s} \qquad \text{és} \qquad R = 247 \text{ m}$$

II. eset: $V^2/R > a_0$

A feltételt másképp: $R < \frac{V^2}{a_0}$ formában írhatjuk.
A körforgalomban lehetséges maximális sebesség ekkor $v = \sqrt{a_0 R}$. Az egyenes szakaszon tehát először le kell lassítani V-ről v-re, természetesen a lehető legnagyobb a_0 gyorsulással. Az ehhez szükséges idő:

$$t_0 = \frac{V - v}{a_0},$$

és a szükséges út:

$$s_0 = Vt_0 - \frac{a_0}{2}t_0^2 = \frac{V^2 - Vv}{a_0} - \frac{a_0}{2} \cdot \frac{V^2 - 2Vv + v^2}{a_0^2} =$$

$$= \frac{2V^2 - 2Vv - V^2 + 2Vv - v^2}{2a_0} = \frac{V^2 - v^2}{2a_0}. \tag{3}$$

Az egyenes úton való haladás és a körforgalom esete között egyedül ezen az s_0 szakaszon, illetve a körívek helyén lesz különbség, így ezeket vizsgáljuk. Az egyenes úton eltelt idő ennek megtétele alatt:

$$t_1 = \frac{2s_0 + 2\sqrt{3}R}{V} = \frac{2}{V} \cdot \frac{V^2 - v^2}{2a_0} + 2\sqrt{3}\frac{R}{V} = \frac{V}{a_0} - \frac{v^2}{a_0 V} + 2\sqrt{3}\frac{R}{V} =$$

$$= \frac{V}{a_0} - \frac{a_0 R}{a_0 V} + 2\sqrt{3}\frac{R}{V} = \frac{V}{a_0} + \left(2\sqrt{3}-1\right)\frac{R}{V}. \tag{4}$$

A körforgalom esetén eltelt idő:

$$t_2 = 2t_0 + \frac{4}{3}\pi\frac{R}{v} = 2\frac{V-v}{a_0} + \frac{4}{3}\pi\frac{R}{v} = 2\frac{V}{a_0} - 2\frac{\sqrt{a_0 R}}{a_0} + \frac{4}{3}\pi\frac{R}{\sqrt{a_0 R}} = 2\frac{V}{a_0} + \left(\frac{4}{3}\pi - 2\right)\sqrt{\frac{R}{a_0}}, \tag{5}$$

így az időkülönbség:

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{V}{a_0} + \left(\frac{4}{3}\pi - 2\right)\sqrt{\frac{R}{a_0}} - \left(2\sqrt{3}-1\right)\frac{R}{V}. \tag{6}$$

Ezen függvény szélsőértékei deriválás segítségével kereshetőek meg:

$$\frac{d\tau}{dR} = \left(\frac{4}{3}\pi - 2\right)\frac{1}{\sqrt{a_0}}\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{R}} - \frac{2\sqrt{3}-1}{V} = \left(\frac{2}{3}\pi - 1\right)\frac{1}{\sqrt{a_0 R}} - \frac{2\sqrt{3}-1}{V} = 0 \tag{7}$$

$$\left(\frac{2}{3}\pi - 1\right)\frac{1}{\sqrt{a_0 R}} = \frac{2\sqrt{3}-1}{V}$$

$$\sqrt{a_0 R} = \frac{\frac{2}{3}\pi - 1}{2\sqrt{3}-1}V$$

$$R = \left(\frac{\frac{2}{3}\pi - 1}{2\sqrt{3}-1}\right)^2 \cdot \frac{V^2}{a_0} \approx 0,2 \cdot \frac{V^2}{a_0}$$

Ez, mivel megfelel a kirótt feltételnek, értelmes megoldás. Az időkülönbség lokális maximumának értéke:

$$\begin{aligned}\tau_{lmax} &= \frac{V}{a_0} + \left(\frac{4}{3}\pi - 2\right)\frac{\left(\frac{\frac{2}{3}\pi-1}{2\sqrt{3}-1}\right)\frac{V}{\sqrt{a_0}}}{\sqrt{a_0}} - \left(2\sqrt{3}-1\right)\frac{\left(\frac{\frac{2}{3}\pi-1}{2\sqrt{3}-1}\right)^2 \cdot \frac{V^2}{a_0}}{V} = \\ &= \frac{V}{a_0} + 2\frac{\left(\frac{2}{3}\pi-1\right)^2}{2\sqrt{3}-1}\cdot\frac{V}{a_0} - \frac{\left(\frac{2}{3}\pi-1\right)^2}{2\sqrt{3}-1}\cdot\frac{V}{a_0} = \left(1 + \frac{\left(\frac{2}{3}\pi-1\right)^2}{2\sqrt{3}-1}\right)\cdot\frac{V}{a_0}\end{aligned} \tag{8}$$

$$\tau_{lmax} \approx 1,49 \cdot \frac{V}{a_0}$$

A konkrét adatokat behelyettesítve:

$$\tau_{max} = 16,56 \text{ s} \qquad \text{és} \qquad R = 49 \text{ m}$$

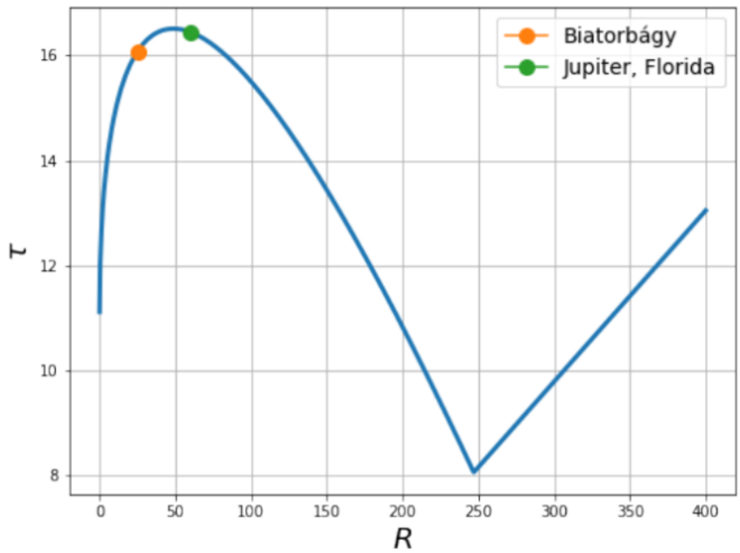
Az időkülönbség-sugár függvény

A (7.) egyenletből könnyen látható, hogy a derivált monoton csökken R növekedésével, tehát az előzőekben megtalált szélsőérték lokális maximumot jelent!
Ezek szerint a τ az $R = 0$ paraméter melletti $\tau = V/a_0$ értéktől monoton növekszik a lokális maximumig, majd csökken az **I. eset**ben kapott (globális) minimumig. Ezután ismét monoton növekszik.

A két esetben kapott időbeli eltérések egymáshoz illeszthetőek, és közösen ábrázolhatóak. A továbbiakban csak a konkrét, $V = 80$ km/h és $a_0 = 2$ m/s^2 numerikus értékekkel dolgozunk.

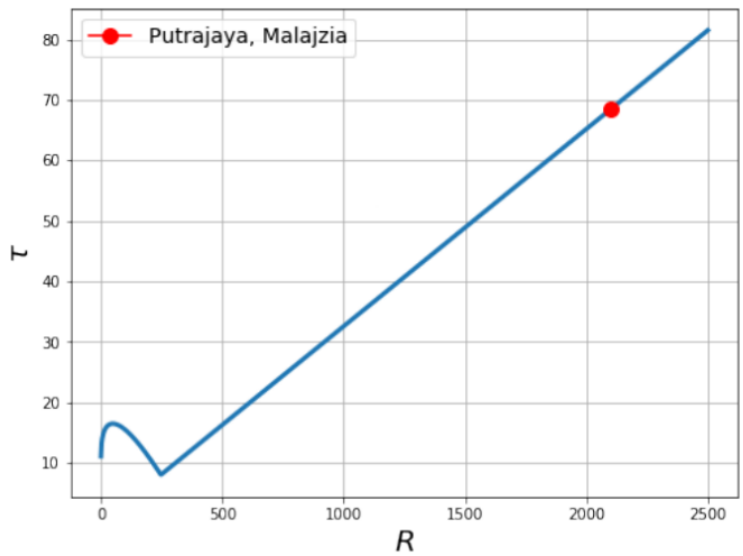
Tekintsünk néhány példát is:

- Biatorbágy: $R = 25$ m, $\tau = 16,08$ s
- Jupiter, Florida: $R = 60$ m, $\tau = 16,44$ s
- Putrajaya, Malajzia: $R \approx 2100$ m, $\tau = 68$ s



2. ábra. A $\tau(R)$ függvény ábrázolása.

A grafikonon jól láthatóak a kiszámolt minimum- és maximumhelyek. Ismét hangsúlyozandó, hogy $R = 49$ m esetén nem csak lokális maximum van, hiszen $R = 247$ m után τ minden határon túl nő. Ugyanakkor nem szabad elfeledkeznünk arról, hogy egy körforgalomról beszélünk, ezek általában nem haladják meg az 500 m-es sugarat.



3. ábra. A $\tau(R)$ függvény ábrázolása.

A putrajayai körforgalmat a világ legnagyobb körforgalmának nevezik, habár nem igazán kör alakú, sokkal inkább ellipszisre emlékeztet. Legkisebb és legnagyobb átmérőjének átlagából számítottuk ki a sugarát.

Megjegyzés:
A két eset szétválasztásakor azt is érdemes megvizsgálni, hogy lehetséges-e, hogy egy autó a körforgalomban sebességet is változtat. Ekkor az eredő gyorsulás nagysága $u(t)$ sebesség esetén:

$$a = \sqrt{\dot{u}(t)^2 + \left(\frac{u(t)^2}{r}\right)^2}$$

Könnyen látható, hogy ekkor sebessége biztosan kisebb, mint a korábban ismertetett v vagy V. Ebből azonnal adódik, hogy a körforgalom előtt is több lassításra volt szüksége, ami nagyobb időlemaradást jelent. Vagyis ebben az esetben mind a körforgalomban, mind előtte nagyobb lemaradásra tett szert.

Feltehetjük tehát, hogy egy optimális autóssal csak a korábban vizsgált két eset valamelyike történhet meg.