Matematik B HFE 29. august 2013
Vejledende løsning
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

Givet tre grafer og funktioner.
Vi har, at:
$f(x)$ tilhører grafen for figur 3, eftersom at b-værdien er 2 og a værdien er større end 1, dvs $a > 1$, så er grafen voksende.

$g(x)$ tilhører grafen for figur 1, eftersom at a-værdien ligger mellem 0 og 1, dvs. $0 < a < 1$ og dermed er grafen aftagende.

$h(x)$ tilhører grafen for figur 2, eftersom det er den eneste graf med b-værdi på 5.

Opgave 2

Givet andengradsligningen
$x^2 - 4x - 5 = 0$, vi undersøger, hvilke to tal der går op i -4 og ganget sammen giver -5, det gør tallene
1 og 5 fordi:
$1 - 5 = -4$ og $1 \cdot (-5) = -5$, så rødderne er:

$x = -1 \vee x = 5$.

Man kan overbevise sig selv om, at det passer ved diskriminantmetoden.

Opgave 3

Givet den lineære forskrift for antallet af PS2'er, vi har:
$a = 17.4$ og $b = 10.6$, tallene fortæller:
I år 2001 var antallet af PS2'er målt til at være 10.6 mio i verden, hvorved dette steg hvert år med 17.4 mio PS2'er verden over, til og med 2008 ifølge modellen.

Opgave 4

Givet funktionen
$f(x) = x^3 - 12x + 7$, vi bestemmer den afledede:
$f'(x) = 3x^2 - 12$.

Opgave 5

Givet grafen. Vi bestemmer:
$f(1) = 3$ eftersom man går 1 ud af x-aksen og 3 op af $f(x)$-aksen, til man rammer grafen.

Vi løser ligningen $f(x) = 3$ og får:
$x = -2 \lor x = 1 \lor x = 4$

Opgave 6

Givet funktionen $f(x) = x^4 + \frac{1}{x} - 2$

Vi skal undersøge, om $F(x) = \frac{1}{5}x^5 + e^x - 2\,x$ er stamfunktion til $f(x)$.

Skribenten på dette sæt integrerer funktionen, og undersøger om det passer.
Læseren differentierer $F(x)$ og gør sig tanker omkring hvorfor resultatet er sådan.

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \int x^4 + \frac{1}{x} - 2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + \ln(|x|) - 2\,x + k$$

Vi kan se, at $F(x)$ ikke er en stamfunktion. Overvej hvorfor.

De resterende opgaver løses **<u>med</u>** hjælpemidler

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :
Vi definerer hele tabellen. Bemærk, at man IKKE skriver årstal ind som de står.
$E1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$:
$E2 := [2093, 2342, 2630, 2926, 3258, 3626, 4115, 4622]$:

Spgm. a

Vi benytter eksponentiel regression.
$f(x) := ExpReg(E1, E2, x)$:
$f(x)$

$$2090.71216331838\ 1.11886827573393^x \qquad \textbf{(7.1.1)}$$

Dermed har vi en eksponentiel model for antallet af robotter.

Spgm. b

Den årlige procentvise stigning bestemmes.
$a = 1 + r$, hvor a er fremskrivningsfaktoren.
$solve(1.11886827573393 = 1 + r)$

$$0.1188682757 \qquad \textbf{(7.2.1)}$$

$100 \cdot (\textbf{(7.2.1)})$

$$11.88682757 \qquad \textbf{(7.2.2)}$$

Så for hvert år der går, efter år 2001, vokser antallet af robotter med 11.887%

Spgm. c

År 2010 svarer til $x = 9$
År 2011 svarer til $x = 10$, så

$f(9)$

$$5745.19649236197 \tag{7.3.1}$$

$f(10)$

$$6428.11809316165 \tag{7.3.2}$$

I år 2010 var antallet 5133 robotter og i år 2011 var antallet 5571 robotter, man kan derfor slutte, at modellen ikke holder efter år 2008.

Opgave 8

restart :; *with*(*Gym*) :

$f(x) := \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 :$

Spgm. a

Vi benytter differentialregning til funktionen $f(x)$, så

$f'(x) = 0$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \tag{8.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 0], [x = 2], [x = 1]] \tag{8.1.2}$$

Vi bruger den dobbelte afledede for bestemmelse af funktionens ekstrema.

$f''(0)$

$$2 \tag{8.1.3}$$

$2 > 0$, lokalt minimum.

$f''(1)$

$$-1 \tag{8.1.4}$$

$-1 < 0$, lokalt maksimum.

$f''(2)$

$$2 \tag{8.1.5}$$

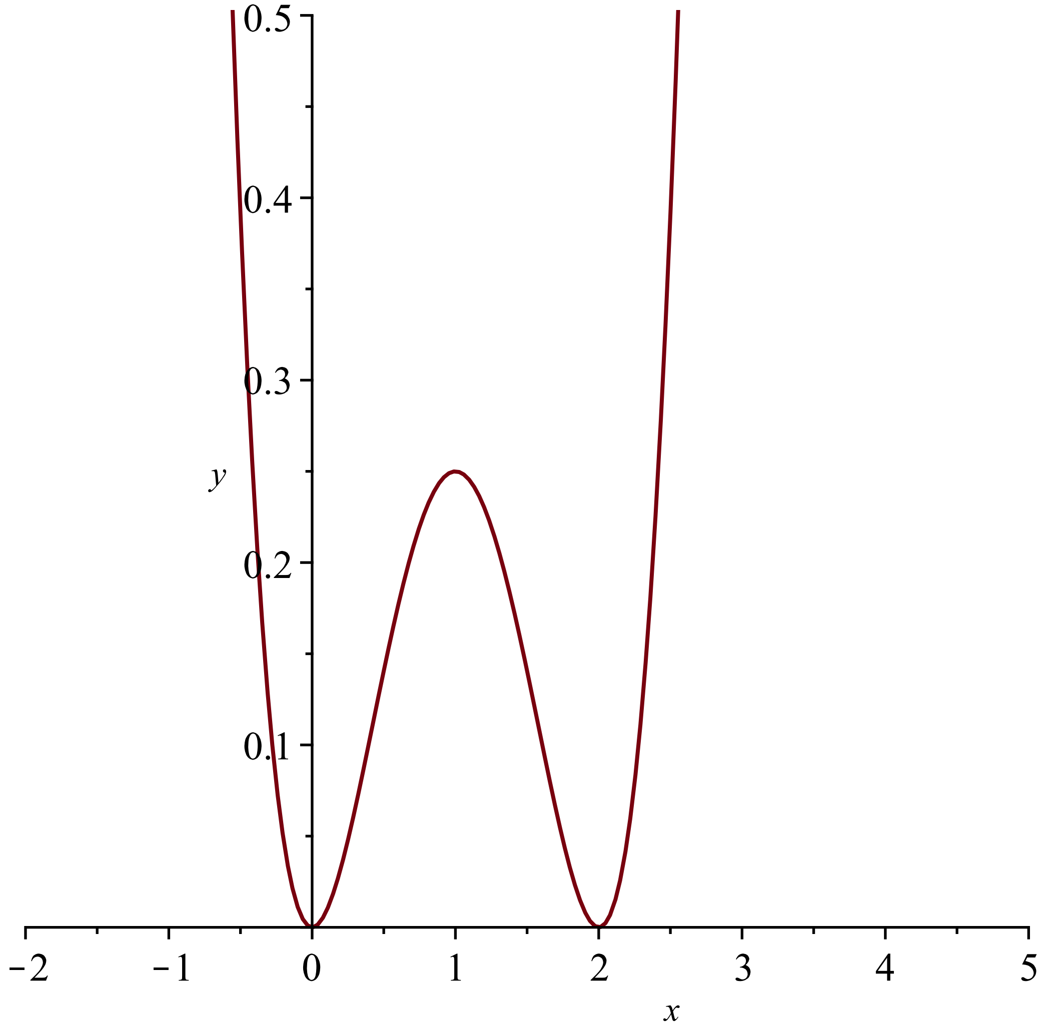
$2 > 0$, lokalt minimum.

Så funktionen må opføre sig således:

$f(x)$ er aftagende i intervallet $]-\infty; 0]$ og $[1; 2]$ samt voksende i intervallet $[0; 1]$ og $[2; \infty[$.

Læseren kan overbevise sig om, at det passer.

plot$(f(x), x = -2..5, y = 0..0.5)$



Spgm. b

Vi benytter punktet til at bestemme tangenten i punktet $P(3, f(3))$, så

$f(3)$

$$\frac{9}{4} \tag{8.2.1}$$

$f'(3)$

$$6 \tag{8.2.2}$$

Vi har

$y = 6 \cdot (x - 3) + \frac{9}{4}$

$$y = 6x - \frac{63}{4} \tag{8.2.3}$$

Dermed er dette tangentligningen for $f(x)$ i punktet P.

Spgm. c

Vi løser ligningen $f(x) = 0$

$f(x) = 0$

$$\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 = 0 \quad (8.3.1)$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x=0],[x=0],[x=2],[x=2]] \quad (8.3.2)$$

Vi har dobbeltrod to steder, (ikke overraskende), så vi bruger integral for bestemmelse af arealet, lad os kalde det M.

$M = \int_0^2 f(x)\,dx$

$$M = \frac{4}{15} \quad (8.3.3)$$

Arealet af M er $\frac{4}{15}$, hvilket er et lille tal og dermed passer godt, hvis man altså kigger på plottet.

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Givet modellen

$y(x) := 1.24 \cdot x^{0.50}$

$$x \rightarrow 1.24\,x^{0.50} \quad (9.1)$$

(Forskriften kan også skrives sådan: $y = 1.24 \cdot \sqrt{x}$)

Spgm. a

Vi bestemmer bølgelængden, svarende til en hastighed på 17 *m/s.*

$y(x) = 17$

$$1.24\,x^{0.50} = 17 \quad (9.1.1)$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 187.9552549]] \quad (9.1.2)$$

Spgm. b

Vi benytter $F_y = F_x^a$,

Vi har formlen

$(1 + r_y) = (1 + r_x)^a$, her kendes a samt r_y.

$\left(1 + \frac{25}{100}\right) = (1 + r_x)^{0.50}$

$$\frac{5}{4} = (1 + r_x)^{0.50} \quad (9.2.1)$$

$\xrightarrow{\text{solve for r[x]}}$

$$[[r_x = 0.5625000000]] \quad (9.2.2)$$

$100 \cdot (\mathbf{(9.2.2)})$

$$[[100\,r_x = 56.25000000]] \quad (9.2.3)$$

Så når bølgens hastighed er 25 % større ved P end Q, så er bølgelængden 56.25 % større ved P.

Opgave 10

$restart :; with(Gym) :$
Alle længder og vinkler defineres.
$AB := 4.4 :; AC := 10 :; A_{ABC} := 56.3 : T_{ABD} := 24 :$

Spgm. a

Vi bestemmer længden af $|BC|$ via cosinusrelationerne.

$BC := \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot Cos(A)}$

$$8.398433805 \quad \textbf{(10.1.1)}$$

Så dermed fandt vi den ønskede længde.

Spgm. b

Vi bestemmer vinkel A_{ABD} i trekanten ABD.

$A_{ABD} := 180 - A_{ABC}$

$$123.7 \quad \textbf{(10.2.1)}$$

Så vinkel A_{ABD} er 123.7^o.

Vi bruger oplysningen om arealet og benytter ½-appelsinformlen.

$T_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot AB \cdot Sin(A_{ABD})$

$$24 = 1.830299068\, AD \quad \textbf{(10.2.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for AD}}$

$$[[AD = 13.11261117]] \quad \textbf{(10.2.3)}$$

Længden af AD er 13.112 som ønsket.

Opgave 11

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Vi benytter oplysningerne.

Højde (cm)	172	176	*h*
Armlængde (cm)	64	*x*	70

Vi husker, at når højden øges 4cm, så øges armlængden 1cm, dvs:
$h = 172 + 4$

$$h = 176 \quad \textbf{(11.1.1)}$$

$x = 64 + 1$

$$x = 65 \quad \textbf{(11.1.2)}$$

Vi bestemmer højden når vi har $x = 70$, dvs.
$64 + 6$

$$70 \quad \textbf{(11.1.3)}$$

Så er højden
$h = 172 + 6 \cdot 4$

$$h = 196 \quad \textbf{(11.1.4)}$$

Dermed kan tabellen færdiggøres.

Højde (*cm*)	172	176	196
Armlængde (*cm*)	64	65	70

Spgm. b

Vi bestemmer den lineære formel. Vi ved, at hældsningstallet er $a = 4$ eftersom vi går 1 ud af x-aksen og 4 op af y-aksen.

$b = 172 - 4 \cdot 64$

$$b = -84 \quad \textbf{(11.2.1)}$$

Her er b-værdien -84, så
$y = 4\,x - 84$ er den ønskede forskrift.

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :
Funktionen defineres

$$f(x) := \frac{800}{x} + 70.90 \cdot x^{\frac{1}{2}} :$$

Spgm. a

Vi indsætter $x = 10\ cm$, så
$f(10)$

$$80 + 70.90\sqrt{10} \quad \textbf{(12.1.1)}$$

evalf[5](**(12.1.1)**)

$$304.21 \quad \textbf{(12.1.2)}$$

Så man skal bruge 304.21 cm^2 metalplade, når højden er 10 cm.

Spgm. b

Vi benytter differentialregning.
$f'(x) = 0$

$$-\frac{800}{x^2} + \frac{35.45000000}{\sqrt{x}} = 0 \quad \textbf{(12.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 7.985752234]] \quad \textbf{(12.2.2)}$$

Vi anvender den dobbelte afledede for at se, om vi får et minimum
$f''(7.985752234)$

$$2.356317187 \quad \textbf{(12.2.3)}$$

Da outputtet er positivt, så har vi et minimum. Med andre ord, hvis man skal fremstille en dåse med mindst mulig metalplade, så skal x være $x = 7.985752234$ *cm*.

Matematik B HFE december 2013
Vejledende løsning
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

Vi undersøger om $x = 4$ er en løsning til ligningen.
$23 - 3\,x = 11$, vi indsætter $x = 4$ og får:
$23 - 3 \cdot 4 = 11 \Leftrightarrow$
$23 - 12 = 11 \Leftrightarrow$
$11 = 11$

Opgave 2

Givet to andengradspolynomier.

Samme a-værdi	Nej	Den blå P_1 har, at $a > 0$ hvoraf den er konveks og den røde P_2 har, at $a < 0$, dvs. den er konkav
Samme b-værdi	Nej	P_1 har, at $b < 0$ eftersom grafens tangent i $(0, y)$ er negativ hvoraf det modsatte gør sig gældene for P_2.
Samme c-værdi	Ja	Begge grafer har, at $c > 0$ og skærer i samme område.

Opgave 3

Givet formlen
$y = 2.7 \cdot 0.96^x$
Formlen er en eksponentiel udvikling.

Tallet 2.7 er begyndelsesværdien og dermed er prisen for et rækkehus i år 2008 2.7mio kr.
Tallet 0.96 er fremskrivningsfaktoren, så for hvert år der går, efter år 2008, falder prisen med 4% om året.

Opgave 4

Givet grafen.
$f(0) = 4$
$f'(0) = 2$
Overvej hvorfor

Opgave 5

Vi bestemmer diskriminanten

$d = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$

Vi har to løsninger

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2\,a} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$$

Opgave 6

Givet integralet.

$$\int x^3 + 4\,x - 3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}x^4 + 2\,x^2 - 3\,x + k$$

Hvor $k \in \mathbb{R}$

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Opgave 7

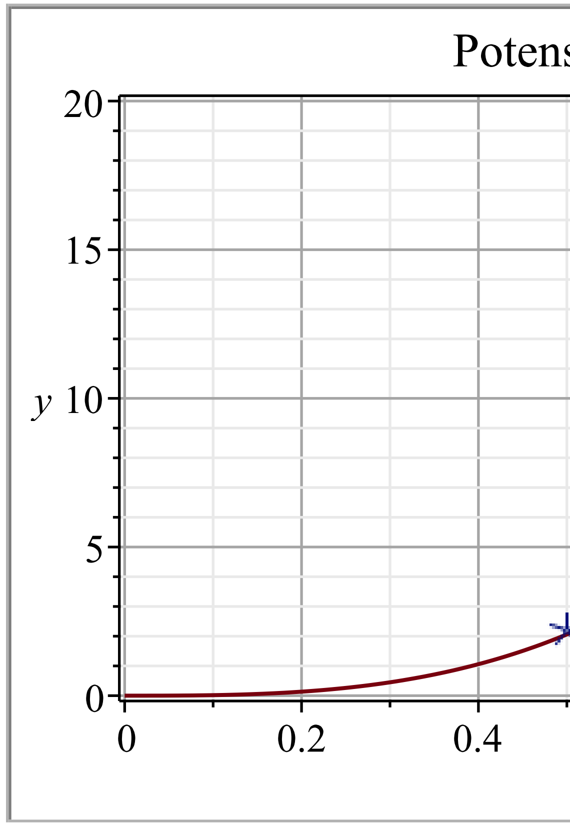
restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vi bruger regression appen i Maple. Gå i "Home" - "Apps" - "Regression" og indsæt data.

Regressionsmodeller

Data			
0.5000	2.2000		
0.6500	4.5000		
0.7000	4.9000		
0.9500	15		



Læs & Plot Data   Potens regression   Opdater plot

Regressionsresultat

$y = 16.2641730811\, x^{2.9806408201}$

Forklaringsgrad

$r^2 = 0.985087474094324$

Xmin: 0   Symbol:

Xmax: 1.2   Størrelse

Ymin: 0   Enkelt log

Ymax: 20   Dobbelt lo

Eksempel data: PolyReg data

Så forskriften er:

$f(x) := 16.2641730811\, x^{2.9806408201}$

$$x \rightarrow 16.2641730811\, x^{2.9806408201} \quad \textbf{(19.1.1)}$$

Alternativt:
$L1 := [0.5, 0.65, 0.7, 0.95]:$
$L2 := [2.2, 4.5, 4.9, 15]:$
$P(x) := PowReg(L1, L2, x):$
$P(x)$

$$16.2641730811073\, x^{2.98064082014545} \quad \textbf{(19.1.2)}$$

Spgm. b

Vi indsætter 1.20 m i x.
$f(1.20)$

$$28.00546844 \quad \textbf{(19.2.1)}$$

Så kejerpingvinen er IKKE omfattet af modellen.

Opgave 8

$restart :; with(Gym):$
$f(x) := \sqrt{2x+4}:$

Spgm. a

Vi løser ligningen
$f(x) = 0$

$$\sqrt{2x+4} = 0 \quad \textbf{(20.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = -2]] \quad \textbf{(20.1.2)}$$

I hånden:

$$\sqrt{2x+4} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+4}^{\,2} = 0^2 \Leftrightarrow 2x+4 = 0 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow x = -2$$

Løsningen fortæller os, at det er den værdi, der har skæring med x-aksen og dermed også den mindste reelle talværdi, funktionen antager.

Spgm. b

Førstekoordinaten er $x = 0$, så
$P = (0, f(0))$ er punktet.
Vi bestemmer ligningen for tangenten.
$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

$$y = \frac{1}{4}\sqrt{4}\, x + 2 \quad \textbf{(20.2.1)}$$

Som er den ønskede tangent.

Spgm. c

Vi bestemmer arealet af det røde og betegner med M.

$M = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

$$M = -2\sqrt{2}\sqrt{3} + \frac{10}{3}\sqrt{2}\sqrt{5} \quad \textbf{(20.3.1)}$$

evalf[5]((**20.3.1**))

$$M = 5.6420 \quad \textbf{(20.3.2)}$$

Som er arealet af *M*.

Opgave 9

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

På baggrund af oplysningerne opstiller vi en lineære forskrift.

$f(x) = 0.33\,x + 2.46$

Hvor $f(x)$ er bruttotonagen BT og x er antal år efter 1999.

Spgm. b

Vi løser ligningen $f(x) = 5$, dvs.

$0.33\,x + 2.46 = 5 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 7.696969697]]$

Så i løbet af år 2007 var den samlede BT over 5 mio ifølge modellen.

Opgave 10

restart :; *with*(*Gym*) :

Alle længder og vinkler defineres.

$BC := 7.7$:; $AB := 7.7$: $B := 135$: $HF := 8.5$:; $G := 135$:

Spgm. a

Vi kan benytte at trekanten er ligebenet eller vi kan bruge cosinusrelationerne til at bestemme $|AC|$.

$AC := \sqrt{BC^2 + AB^2 - 2\cdot BC\cdot AB\cdot Cos(B)}$

$$14.22774480 \quad \textbf{(22.1.1)}$$

Længden $|AC| = 14.23\ m$ er hermed fundet.

Spgm. b

Vi bestemmer arealet af trekanten *ABC*.

$T_{ABC} := \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot Sin(B)$

$$20.96218052 \quad \textbf{(22.2.1)}$$

Så arealet af *ABC* er 21 m^2. Vi har, at arealet af ABC er det samme som de andre 3 trekanter, dvs.

$A_{trekanter} := 4\cdot T_{ABC}$

$$83.84872208 \quad \textbf{(22.2.2)}$$

Arealet af firkanten i midten er $A_{firkant} = AC\cdot AE$, dvs.

$AE := AC$: , så

$A_{firkant} := AC\cdot AE$

$$202.4287221 \quad \textbf{(22.2.3)}$$

Dvs.

$A_{grundflade} = A_{trekanter} + A_{firkant}$

$$A_{grundflade} = 286.2774442 \quad \textbf{(22.2.4)}$$

Det samlede areal af grundfladen er 286.277 m^2.

Spgm. c

Vi benytter forstørrelsesfaktoren.

$k := \frac{AC}{HF}$

$$1.673852329 \quad \textbf{(22.3.1)}$$

Da kan vi bestemme FG, dvs.

$FG = \frac{AB}{k}$

$$FG = 4.600166853 \quad \textbf{(22.3.2)}$$

Så dermed fandt vi længden af FG som er 4.6m lang.

Opgave 11

$restart :; with(Gym) :$

$F(BMI) := 42.9 \cdot \ln(BMI) - 102.7 :$

Spgm. a

Fedtprocenten bestemmes for en kvinde med BMI på 28.

$F(28)$

$$42.9 \ln(28) - 102.7 \quad \textbf{(23.1.1)}$$

$evalf[5](\textbf{(23.1.1)})$

$$40.25 \quad \textbf{(23.1.2)}$$

Så hendes fedtprocent er 40.25 F

Vi bestemmer BMI'en med en fedtprocent på 20F, dvs.

$20 = F(BMI)$

$$20 = 42.9 \ln(BMI) - 102.7 \quad \textbf{(23.1.3)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for BMI}}$

$$[[BMI = 17.46396928]] \quad \textbf{(23.1.4)}$$

Så hendes BMI er 17.46

Spgm. b

Vi isolér BMI, (tanken er nok at man gør det i hånden).

$F = 42.9 \cdot \ln(BMI) - 102.7 \Leftrightarrow$

$F + 102.7 = 42.9 \cdot \ln(BMI) \Leftrightarrow$

$\frac{F + 102.7}{42.9} = \ln(BMI) \Leftrightarrow$

$\mathrm{e}^{\frac{F + 102.7}{42.9}} = \mathrm{e}^{\ln(BMI)} \Leftrightarrow$

$BMI = e^{\frac{F + 102.7}{42.9}}$

Som er det ønskede. I Maple kunne man også gøre det.

$F = 42.9 \cdot \ln(BMI) - 102.7 \xrightarrow{\text{isolate for BMI}} BMI = e^{0.02331002331\,F + 2.393939394}$

Opgave 12

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Vi argumenterer for, at formlen er givet ved $f(x)$.
Kig på den lille trekant, vi har, at grundlinjen er x, højden er 5, så er hypotenusen

$hyp = \sqrt{x^2 + 5^2}$

Kig nu på den store trekant. Vi har at grundlinen er $10 - x$ og højden er 8, så er hypotenusen i den store trekant

$HYP = \sqrt{(10 - x)^2 + 8^2}$, så vi har altså afstanden PR via Q er:

$f(x) = hyp + HYP$ dvs.

$f(x) = \sqrt{x^2 + 5^2} + \sqrt{(10 - x)^2 + 8^2} = \sqrt{5^2 + x^2} + \sqrt{8^2 + (10 - x)^2}$

Her er $0 < x < 10$ (overvej det).

Spgm. b

Vi definerer funktionen.

$f(x) := \sqrt{5^2 + x^2} + \sqrt{8^2 + (10 - x)^2}$:

Vi differentierer ovenstående og løser ligningen for den afledede, vi har:

$f'(x) = 0$

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 25}} + \frac{1}{2} \frac{-20 + 2x}{\sqrt{64 + (10 - x)^2}} = 0 \tag{24.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$\left[\left[x = \frac{50}{13}\right]\right] \tag{24.2.2}$$

evalf[5]((**24.2.2**))

$$[[x = 3.8462]] \tag{24.2.3}$$

Vi tager den dobbelte afledede og undersøger, om dette er den mindste værdi af x.

$f''\left(\frac{50}{13}\right)$

$$\frac{169}{1809025} \sqrt{6725} \sqrt{169} + \frac{169}{4631104} \sqrt{17216} \sqrt{169} \tag{24.2.4}$$

evalf[5]((**24.2.5**))

$$0.16184 \tag{24.2.5}$$

Da tallet er positivt, så er det et minimum. Dermed er $x = 3.8462\ m$ den værdi, der gør, at wiren er mindst mulig.