Matematik A-niveau STX
1. juni 2010
Øvelse
DELPRØVE 1 & DELPRØVE 2

--DELPRØVE 1--

Opgave 1 - Reduktion

$a^2 - b^2 - (a+b)^2 + 2\,ab = a^2 - b^2 - a^2 - b^2 - 2\,ab + 2\,ab = -2\,b^2$

$-2\,b^2$

$$-2\,b^2 \tag{1.1}$$

Efterregning i Maple

$a^2 - b^2 - (a+b)^2 + 2\cdot a\cdot b$

$$a^2 - b^2 - (a+b)^2 + 2\,a\,b \tag{1.2}$$

$\overset{\text{factor}}{=}$

$$-2\,b^2 \tag{1.3}$$

Opgave 2 - Plangeometri

$\vec{a} = \langle 1, -2\,t\rangle$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2\,t \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

$\vec{b} = \langle 5\,t - 1\,,3\rangle$

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 5\,t - 1 \\ 3 \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

$\vec{a} \perp \vec{b}$

$1\cdot(5\,t - 1) + (-2\,t)\cdot 3 = 0$
$5\,t - 1 - 6\,t = 0$
$-t - 1 = 0$
$t = -1$

Efterregning i Maple

$1\cdot(5\,t - 1) + (-2\,t)\cdot 3 = 0$

$$-t - 1 = 0 \tag{2.3}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t=-1]] \tag{2.4}$$

Opgave 3 - Trigonometri

Det går ud på at finde forstørrelsesfaktoren.

$k = \frac{|DF|}{|AC|} = \frac{5}{4} = 1.25$

Men $|EF|$ ønskes kendt, derfor benyttes *Pythagoras* i den første trekant.

$a^2 + 4^2 = 5^2$
$a^2 = 5^2 - 4^2$
$a^2 = \sqrt{25-16}$
$a = 3$

Dette ganges med 1.25 og heraf fås 3.75, hvilket svarer til længden $|EF|$

Opgave 4 - Differentialregning

$f(x) = x^4 + \ln(2x+1)$

Differentieres

$4x^3 + \frac{1}{2x+1}$, men når der er tale om differentiering af den dersesn type funktion, skal den indre differentieres og ganges til. Derfor er den afledede af f

$f'(x) = 4x^3 + \frac{1}{2x+1} \cdot 2$

Hvor $f'(1)$ indsættes

$f'(1) = 4 \cdot 1^3 + \frac{2}{2 \cdot 1 + 1} = 4 + \frac{2}{3}$

Efterregning i Maple

$f(x) := x^4 + \ln(2x+1)$

$$x \to x^4 + \ln(2x+1) \tag{4.1}$$

$f'(1)$

$$\frac{14}{3} \tag{4.2}$$

Opgave 5 - Differentialligning

$\frac{dy}{dx}$ er det samme som $f'(x)$

$f'(x) = \frac{x^3+1}{y}$

$P(2,4)$

Indsættes i tangentligningen

$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$

$y = f'(x_0)\cdot(x-2)+4$

$$y = \mathrm{D}(f)(x_0)(x-2)+4 \tag{5.1}$$

For at finde $f'(x_0)$ indsættes P i differentialligningen

$f'(x) = \frac{2^3+1}{4} = \frac{8+1}{4} = \frac{9}{4}$

Så

$y = \frac{9}{4}\cdot(x-2)+4$

$y = \frac{9}{4}x - \frac{18}{4} + 4$

Efterregning i Maple

$\frac{2^3+1}{4}$

$$\frac{9}{4} \tag{5.2}$$

$y = \frac{9}{4}\cdot(x-2)+4$

$$y = \frac{9}{4}x - \frac{1}{2} \tag{5.3}$$

Opgave 6 - Integralregning

Der er tale om et ubestemt integrale.

$$\int 2\,x\left(x^2+1\right)^5\,\mathrm{d}x$$

Her defineres *t*.

$t = x^2 + 1\ dx$ dvs, den indre funktion. Den differentieres mht. t

$$dx = \frac{1}{2\,x}dt$$

Indsættes tilbage i integralet

$\int 2\,x\cdot(t)^5\cdot\left(\frac{1}{2\,x}\right)dt$ hvor $2\,x$ forkortes ud.

$\int t^5\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}t^6 + k$ hvor x^2+1 indsættes tilbage

$F(x) = \frac{1}{6}\left(x^2+1\right)^6 + k$ omskrives $F(x) = \frac{\left(x^2+1\right)^6}{6} + k$

--DELPRØVE 2--

Opgave 7 - Plangeometri

restart
with(*Gym*) :

$\vec{a} := \langle 4, -3\rangle$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.1)}$$

Delopgave a

Ligningen for linjen *l* regnes

$a(x-x) + b(y-y) = 0$

Da a og b er normalvektoren, anvendes $\vec{a}$ og der er angivet $P(3,\ 1)$

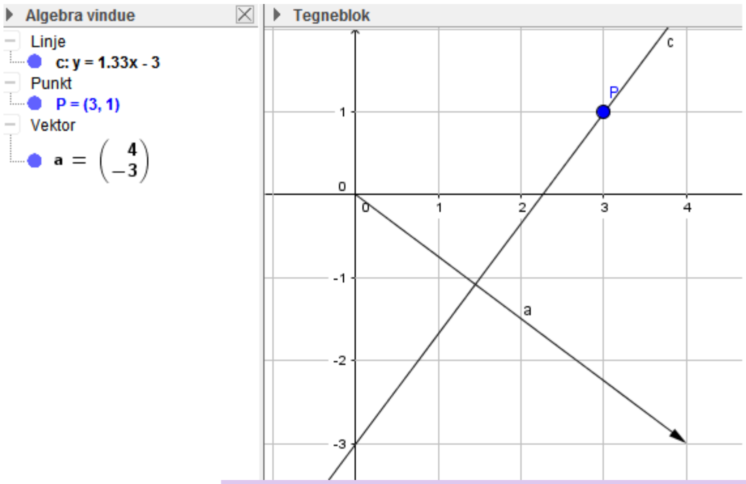
$4(x-3) - 3(y-1) = 0$

$$4\,x - 9 - 3\,y = 0 \quad \textbf{(7.1.1)}$$

$\xrightarrow{\text{isolate for y}}$

$$y = \frac{4}{3}\,x - 3 \tag{7.1.2}$$

Dette er ligningen for linjen l der står vinkelret på $\vec{a}$ og går gennem P.



Delopgave b

$P := \langle 3, 1 \rangle$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.2.1}$$

$Q := \langle 20, 7 \rangle$

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{7.2.2}$$

$Q - P$

$$\begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{7.2.3}$$

$\overrightarrow{PQ} := \begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 17 \\ 6 \end{bmatrix} \tag{7.2.4}$$

Der anvendes determinantformlen.

$det\left(\overrightarrow{PQ}, \vec{a}\right)$

$$-75 \tag{7.2.5}$$

Men da arealet skal være positivt, tages numerisk
$|-75|$

$$75 \tag{7.2.6}$$

Så arealet af parallelogrammet er 75.

Delopgave c

Projektionen af $\overrightarrow{PQ}$ på $\vec{a}$ regnes

$proj(\overrightarrow{PQ}, \vec{a})$

$$\begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} \quad (7.3.1)$$

Så det er projektionen ud fra $\overrightarrow{PQ}$ og $\vec{a}$.

Opgave 8 - Potensfunktioner

restart
with(*Gym*) :

Først defineres oplysningerne for opgaven.

$L1 := [32, 243]$

$$[32, 243] \quad (8.1)$$

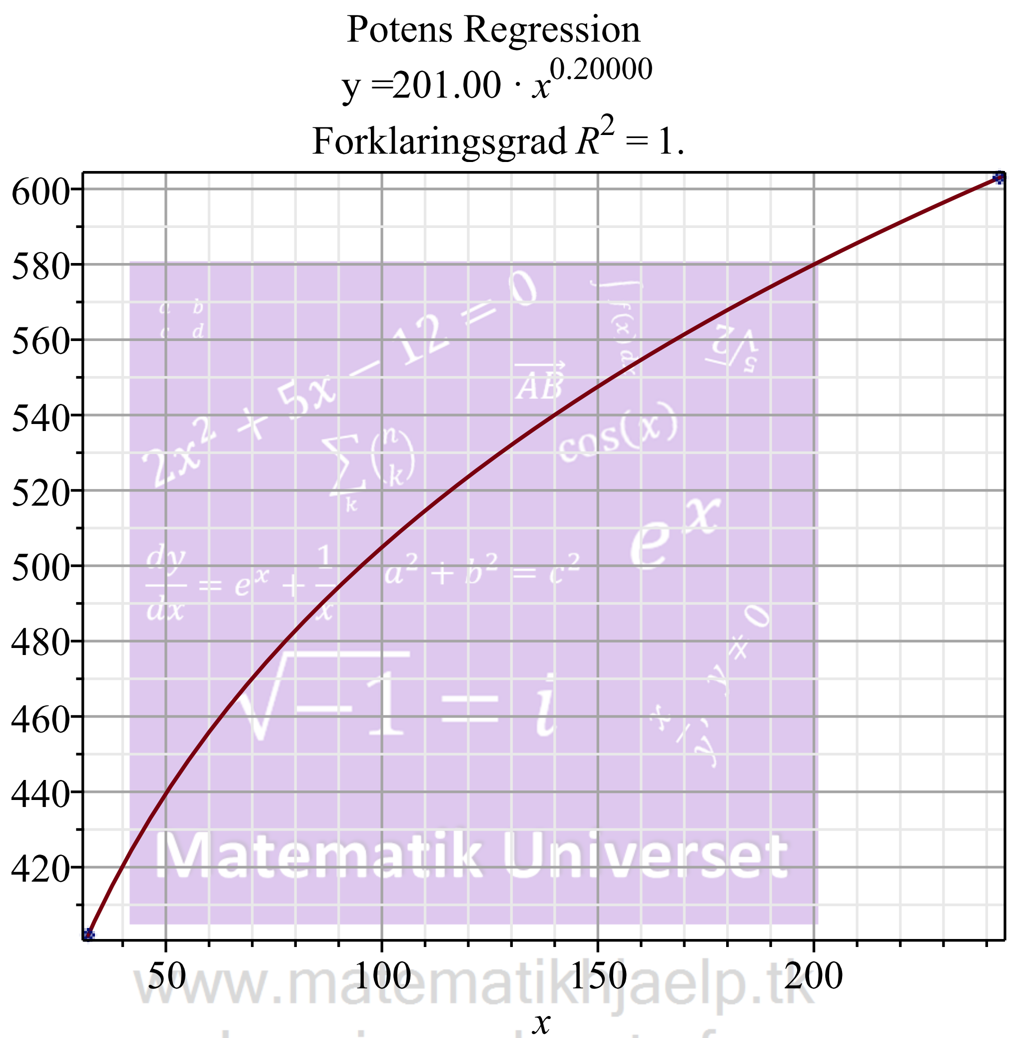
$L2 := [402, 603]$

$$[402, 603] \quad (8.2)$$

Delopgave a

I denne opgave udføres potensregression, selvom da to punkter er nok til at regne v.h.a. formlerne for a og b, da dette vil give en forklaringsgrad på 1.

$PowReg(L1, L2)$



Ud fra potensregresisonen blev tallene a og b bestemt til hhv.

$b = 201$ og $a = 0.2$ samt forskriften $f(x) = 201\ x^{0.2}$

Opgave 9 - Eksponentielle funktioner

restart
with(*Gym*) :

Som forrige opgave, defineres der for hhv. d og I der normalt vil have heddet x og $f(x)$.

$L1 := [1, 3, 4, 5, 7, 10, 15]$

$$[1, 3, 4, 5, 7, 10, 15] \tag{9.1}$$

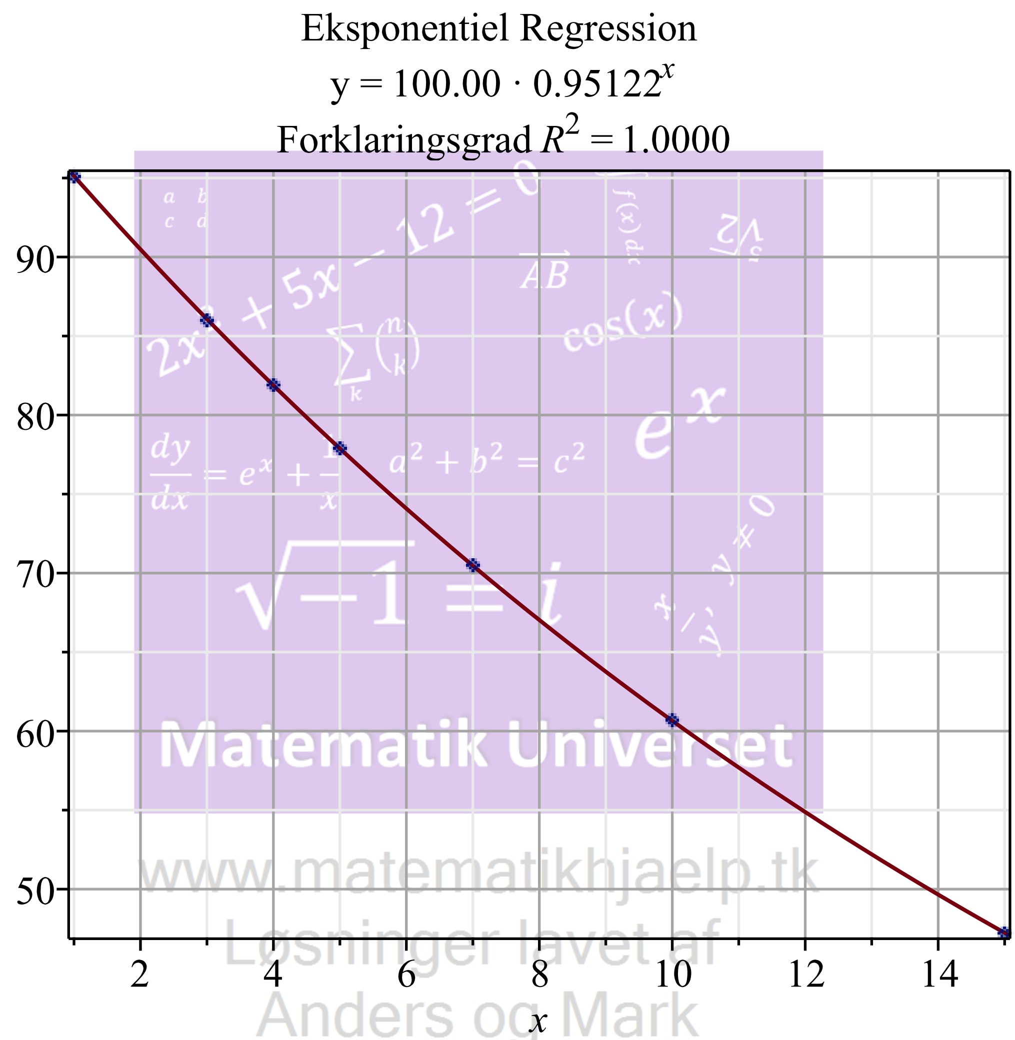
$L2 := [95.1, 86, 81.9, 77.9, 70.5, 60.7, 47.2]$

$$[95.1, 86, 81.9, 77.9, 70.5, 60.7, 47.2] \tag{9.2}$$

Delopgave a

Der anvendes regression for en eksponentiel funktion.

$ExpReg(L1, L2)$



En forklaringsgrad på 1, dvs. den forkastes ikke.

Tallene $I_0 = 100$ og $a := 0.95122$: Forskriften blev ligeledes også bestemt til:

Bemærk, at *I* er beskyttet idet det betegner *I*'et fra de komplekse tal. Derved anvendes den normale *I*.

$f(d) := 100.00 \cdot 0.95122^d$

$$d \rightarrow 100.00\ 0.95122^d \quad \textbf{(9.1.1)}$$

Modellen beskriver lysdensiteten i væskedybte. Dette kan ses, at der er tale om en **aftagende eksponentiel funktion**

Delopgave b

Halveringskonstanten regnes således v.h.a. a-værdien, som blev defineret i ovenstående opgave.

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)}{\log_{10}(a)}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{46.04257828 \ln(2)}{\ln(10)} \tag{9.2.1}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$T_{\frac{1}{2}} = 13.860 \tag{9.2.2}$$

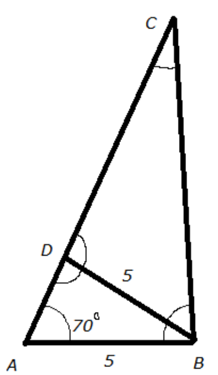
Så efter halvdelen af dybten i væsken, er lysdensiteten aftaget med 13.86%

Opgave 10 - Trigonometri

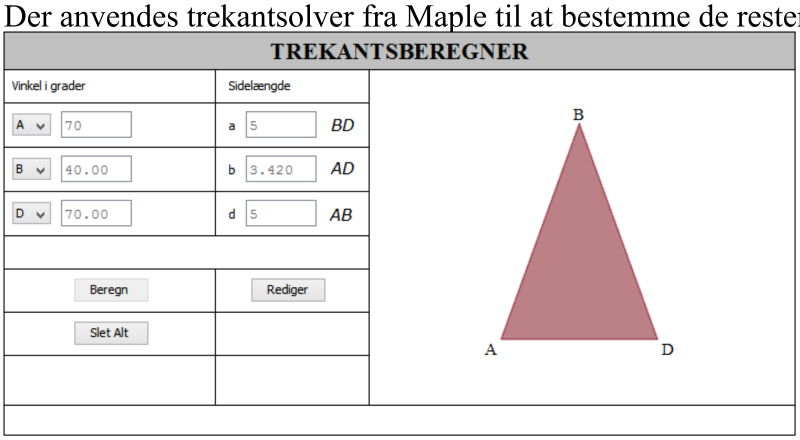
restart
with(*Gym*) :

Delopgave a

I opgaven tegnes der en skitse for trekanten ABC i Paint.



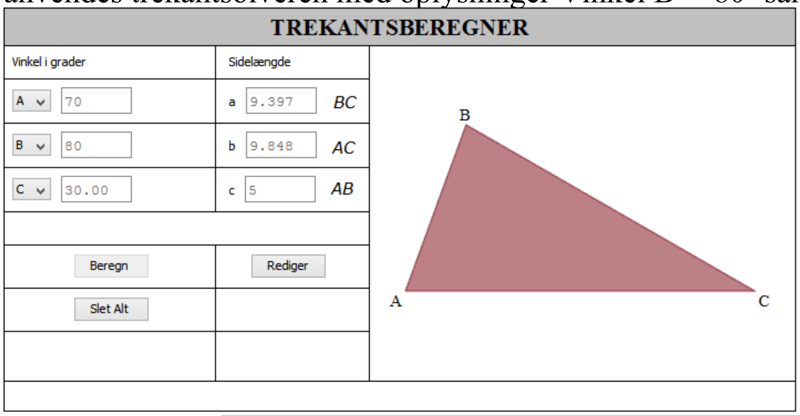
Der anvendes trekantsolver fra Maple til at bestemme de resterende vinkler i trekant ABD.



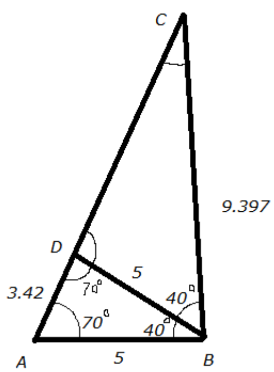
I følge trekantsolveren med oplysningerne $A = 70^o$, $|AB| = |BD| = 5$ fås vinkel A og D, som begge er ens 70^o. Vinkel B blev bestemt til 40^o. Endelig er der $|AD|$ (b i ovenstående udregning) der blev bestemt til 3.420

Delopgave b

Ift. forrige opgave, er der tilstrækelig oplysninger nok til at bestemme længden $|BC|$. Der anvendes trekantsolveren med oplysninger Vinkel B $= 80^o$ samt vinkel A $= 70^o$ og $|AB| = 5$.



Derved blev længden $|BC|$ (a i ovenstående udregning) bestemt til 9.397. En opsumering af den selvtegnede skitse:



Opgave 11 - Differentialregning

restart
with(*Gym*) :

Funktionen defineres

$f(x) := (x+1)\cdot e^{-x}$

$$x \rightarrow (x+1)\, e^{-x} \tag{11.1}$$

Delopgave a

Ved at bestemme monotoniforholde for *f*, kræves det, at den differentieres og sættes lig med 0.

$f'(x) = 0$

$$e^{-x} - (x+1)\, e^{-x} = 0 \tag{11.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x=0]] \tag{11.1.2}$$

Så den afledede har $x=0$. For at man kan tegne monotonilinjen mangler der nogle tal der indikerer, om f er voksende eller aftagende. Der vælges 1 og -1 idet $x=0$ fra den afledede.

$f'(-1)$

$$\mathrm{e} \tag{11.1.3}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$2.7183 \tag{11.1.4}$$

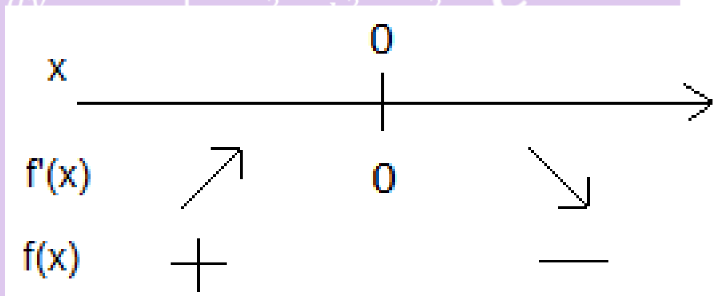
$f'(1)$

$$-\mathrm{e}^{-1} \tag{11.1.5}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$-0.36788 \tag{11.1.6}$$

Altså kan monotonilinjen tegnes uden begrænsninger, da dette ikke fremgår af opgaven.



Så konklusionen er, at

f er voksende i intervallet $]-\infty;0]$ og aftagende i intervallet $[0;\infty[$

Delopgave b

For at bestemme arealet af det punktstykke i anden kvadrant, løses ligningen for $f(x)=0$

$$(x+1)\,\mathrm{e}^{-x}=0 \tag{11.2.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x=-1]] \tag{11.2.2}$$

Da anden kvadrant starter fra 0 til $-\infty$ fås begrænsningerne -1, 0 som hhv. a og b. Altså:

$$M=\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$$

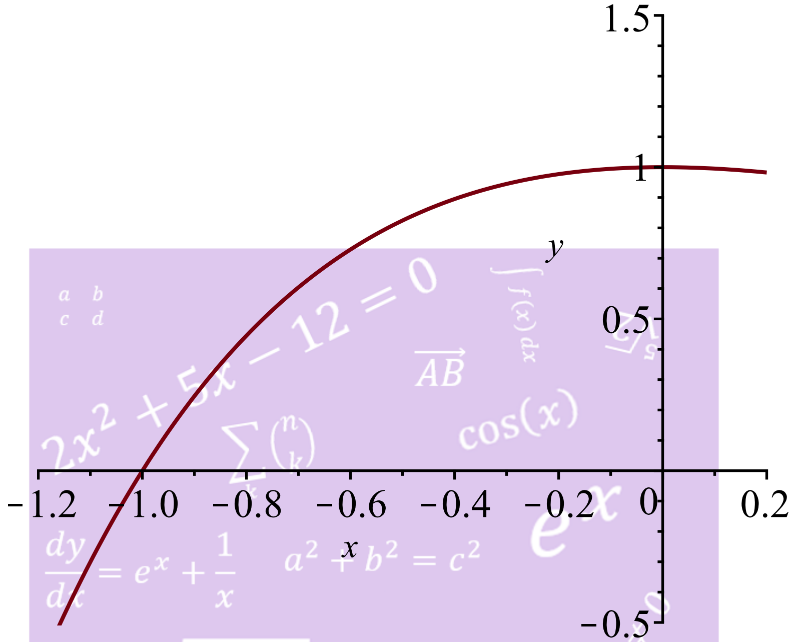
$$M=\mathrm{e}-2 \tag{11.2.3}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$M=0.7183 \tag{11.2.4}$$

Så arealet af det punktmænde M i anden kvadrant er 0.7183. Dette kan illustreres nedenfor:

$plot(f(x), x=-1.2..0.2, y=-0.5..1.5)$



Dvs. illustrationen viser anden kvadrant.

Delopgave c

For at bestemme volumen eller rumfanget, anvendes følgende formel:

$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \mathrm{d}x$, hvoraf tallene indsættes fra delopgave *b*

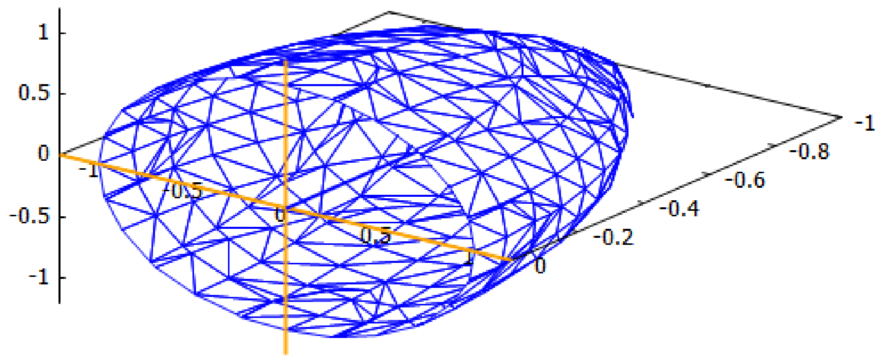
$$V = \pi \cdot \int_{-1}^{0} (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

$$V = \pi \left(\frac{1}{4} e^2 - \frac{5}{4} \right) \tag{11.3.1}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$V = 1.8765 \tag{11.3.2}$$

Dvs. når *f* drejes 360^o rundt om førsteaksen, fås volumen til 1.8765. Dette kan illustreres v.h.a. WordMat's omdrejningslegeme tegner



Så her ses en grafisk 3 D version af funktionen *f*.

Opgave 12 - Rumgeometri

restart
with(*Gym*) :

Planen defineres.

$\alpha := 2\,x - y - 2\,z - 6 = 0$

$$2\,x - y - 2\,z - 6 = 0 \tag{12.1}$$

Origo er defineret ved:
$\mathrm{O} := \langle 0, 0, 0 \rangle$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12.2}$$

$P := \langle 7, 3, -2 \rangle$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{12.3}$$

Delopgave a

Det forudsættes at man kender en retningsvektor samt normalvektor. Normalvektoren findes fra planens ligning, som defineres nedenfor

$\overrightarrow{n_\alpha} := \langle 2, -1, -2 \rangle$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{12.1.1}$$

Retningsvektoren fås ved O og P trukket fra hinanden.

$\vec{r} = P - O$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{12.1.2}$$

$\vec{r} := \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \tag{12.1.3}$$

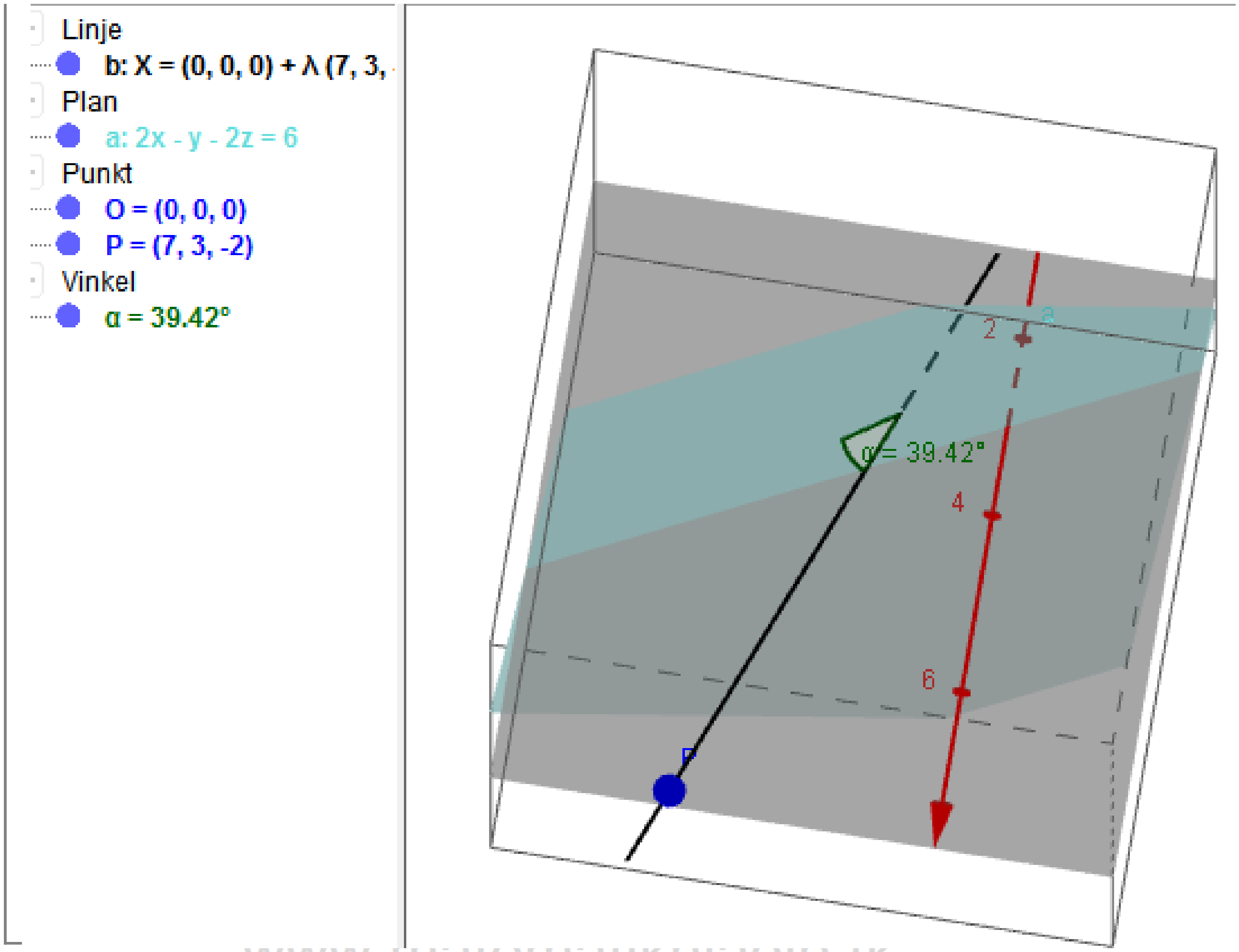
$v = invCos\left(\dfrac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \vec{r}}{len\left(\overrightarrow{n_\alpha}\right) \cdot len\left(\vec{r}\right)}\right)$

$$v = 50.57996843 \tag{12.1.4}$$

Så den spidste vinkel mellem α og l er
$90 - 50.57996843$

$$39.42003157 \tag{12.1.5}$$

Som angiver vinklen mellem linjen og planen. Dette illustreres i GeoGebra.



Delopgave b

Kuglens ligning er defineret:
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$, som minder meget om cirklens ligning.

Det oplyses endda, at P er centrum. Derfor indsættes P i kuglens ligning.

$(x-7)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=r^2$. Der mangler dog radius og dette regnes v.h.a. dist formlen.

$$dist(P,\alpha)=\frac{|2\cdot 7+(-1)\cdot 3+(-2)\cdot(-2)-6|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}$$

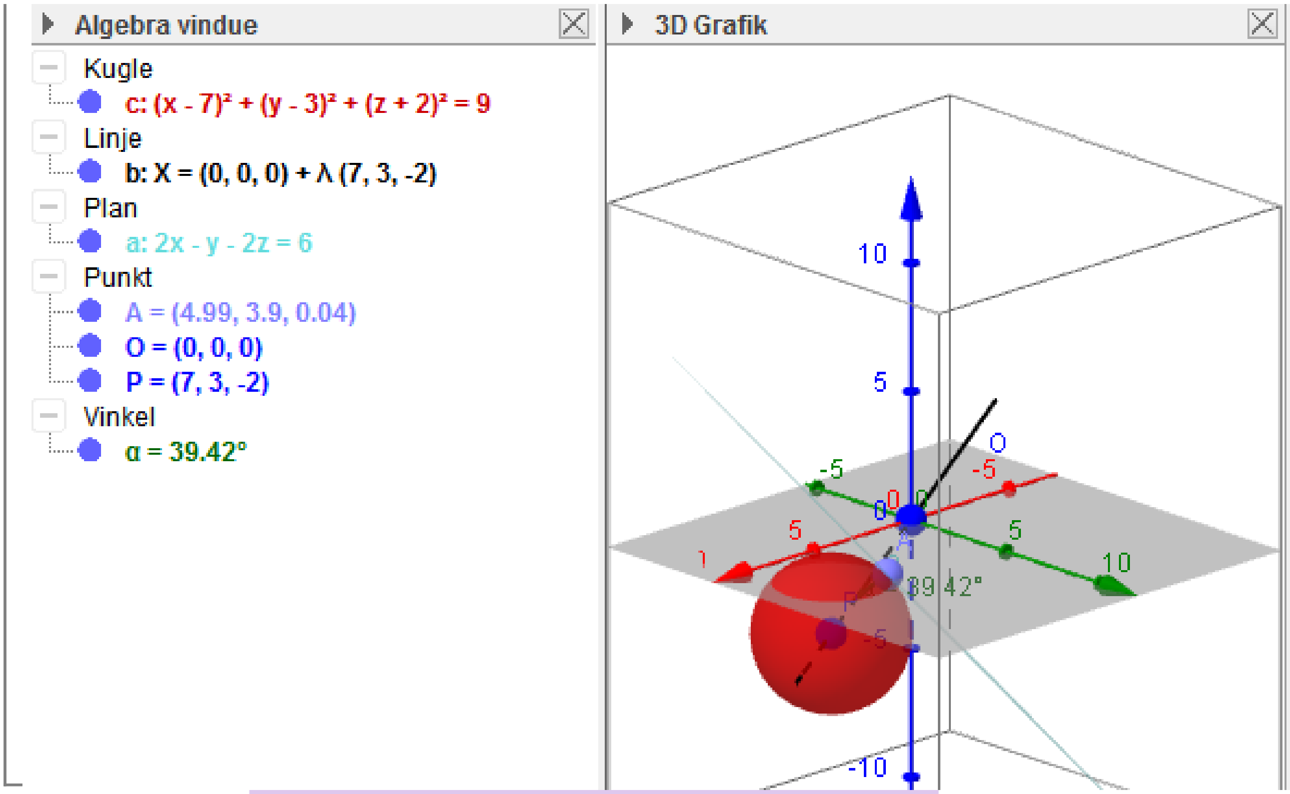
$$dist(P,\alpha)=3 \tag{12.2.1}$$

Dvs. kuglens ligning kan færdiggøres med radius

$$(x-7)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=3^2$$

$$(x-7)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=9 \tag{12.2.2}$$

Illustrationen viser det



Delopgave c

For at bestemme koordinatsættet til projektionen af Q, forudsættes det, at man kender sin parameterfremstilling l. Den kan skrives op:

$$l := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 + 2t \\ 3 - t \\ -2 - 2t \end{bmatrix} \tag{12.3.1}$$

Som anvendes til at bestemme projektionen over Q. Parameterfremstillingen indsættes i planens ligning

$$2(7 + 2t) - (3 - t) - 2(-2 - 2t) - 6 = 0$$

$$9 + 9t = 0 \tag{12.3.2}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for t}}$$

$$[[t = -1]] \tag{12.3.3}$$

Tallet t indsættes i parameterfremstillingen.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12.3.4}$$

Så projektionen er
$Q = (5, 4, 0)$

$$Q = (5, 4, 0) \tag{12.3.5}$$

Opgave 13 - Differentialligning

restart
with(*Gym*) :

Differentialligningen opskrives

$$\frac{dV}{dt} = 0.000193\ V(139.6 - V)$$

V måles i kg og t er tid, talt efter døgn fra grisens indtagelse af føde.

Delopgave a

Her benyttes metoden for *dsolve* af en differentialligning.

$dsolve(\{V'(t) = 0.000193\ V(t) \cdot (139.6 - V(t)),\ V(0) = 7.3\},\ V(t))$

$$V(t) = \frac{50954}{5\left(1323\ \mathrm{e}^{-\frac{67357}{2500000}t} + 73\right)} \tag{13.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

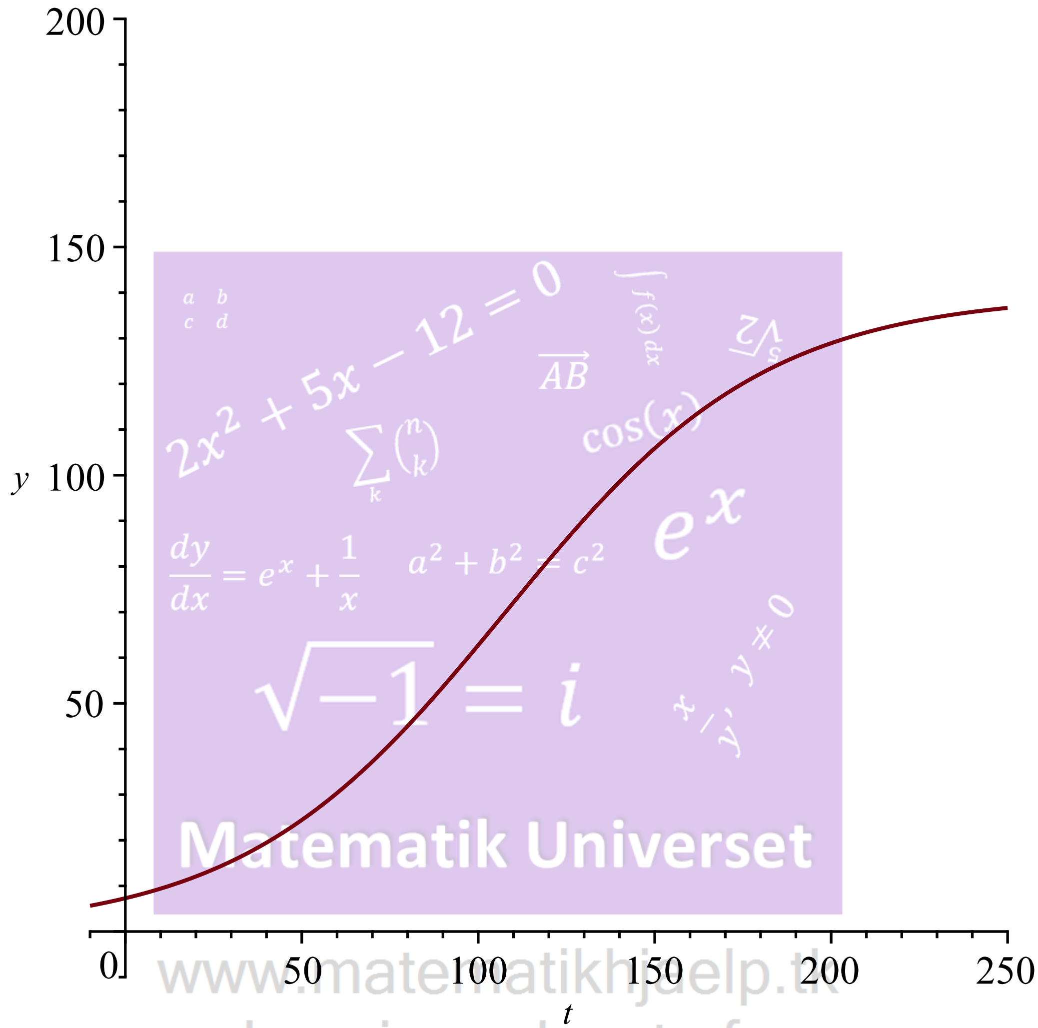
$$V(t) = \frac{10191.}{1323.\ \mathrm{e}^{-0.026943\,t} + 73.} \tag{13.1.2}$$

Dvs. dette er regneforskriften for V. Bemærk, at dette er en logistisk vækst ligning.

$V(t) := \dfrac{10191.}{1323.\ \mathrm{e}^{-0.026943\,t} + 73.}$

$$t \rightarrow \frac{10191.}{1323.\ \mathrm{e}^{(-1)\cdot 0.026943\,t} + 73.} \tag{13.1.3}$$

$plot(V(t),\ t = -10..250,\ y = -10..200)$



Ved indsættelse af 500 i V fås
$V(500)$

$$139.5991709 \qquad \textbf{(13.1.4)}$$

Dvs. den maksimale værdi. Dette bekræfter, at der er tale om en logistisk vækst.

Delopgave b

Her undersøges for, hvornår væksthastigheden er størst, men da der er tale om en logistisk vækst differentialligning, skal man tage halvdelen af den maksimale hastighed.
I dette tilfælde vil det være 139.5991709, som der skal deles med 2.

$$\frac{139.5991709}{2}$$

$$69.79958545 \qquad \textbf{(13.2.1)}$$

Så vægten vil være 69.79958545kg eller ca. 69.8kg

Opgave 14 - Funktioner

restart
with(*Gym*) :

Tekst information til opgaven.....

Delopgave a

$l := y = -2\,x + 1$:
Og
$f(x) := x^2 + bx + c$:
Og
$P := (1, f(1))$:

Da linjen l er tangent til f, har den hældningen -2, derved passer udsagnet.
$f'(1)$

$$-2 \tag{14.1.1}$$

Da l rammer P, kan man benytte sig af linjens ligning til at finde $f(1)$.

$f(1) = -2 \cdot 1 + 1$

$$f(1) = -1 \tag{14.1.2}$$

Altså passer udsagnet.

Tallene b og c kan bestemmes ved at benytte sig af funktionen og den afledede

$f'(x) = 2\,x + b$

$$\frac{d}{dx}\,f(x) = 2\,x + b \tag{14.1.3}$$

Her indsættes $f'(1) = -2$

$-2 = 2 \cdot 1 + b$

$$-2 = 2 + b \tag{14.1.4}$$

$\xrightarrow{\text{solve for b}}$

$$[[b = -4]] \tag{14.1.5}$$

Som nu indsættes i $f(x)$

$f(x) = x^2 - 4\,x + c$

$$f(x) = x^2 + c - 4\,x \tag{14.1.6}$$

Nu indsættes $f(1) = -1$

$-1 = 1^2 - 4 \cdot 1 + c$

$$-1 = -3 + c \tag{14.1.7}$$

$\xrightarrow{\text{solve for c}}$

$$[[c = 2]] \tag{14.1.8}$$

Altså er funktionen
$f(x) = x^2 - 4\,x + 2$

$$f(x) = x^2 - 4\,x + 2 \tag{14.1.9}$$

Opgave 15 - Optimering

restart
with(*Gym*) :

$V = V_{cylinder} + V_{kegle}$
FORMLER VOLUMEN:
Cylinder
$V = h \cdot \pi \cdot r^2$
Kegle
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

FORMLER OVERFLADE:
kegle
$O = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$
cylinder
$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

Delopgave a

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2\,r + s \cdot r^2 \cdot \pi$

$$V = s\,r^2\,\pi + \frac{2}{3}\,\pi\,r^3 \quad \textbf{(15.1.1)}$$

Dvs. $40 dm^3$ indsættes på V

$40 = s\,r^2\,\pi + \frac{2}{3}\,\pi\,r^3$

$$40 = s\,r^2\,\pi + \frac{2}{3}\,\pi\,r^3 \quad \textbf{(15.1.2)}$$

$\xrightarrow{\text{isolate for s}}$

$$s = -\frac{-40 + \frac{2}{3}\,\pi\,r^3}{\pi\,r^2} \quad \textbf{(15.1.3)}$$

Således kan højden s findes, udtrykt ved r.

$O = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + (2\,r)^2} + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot s$

$$O = \pi\,r\,\sqrt{5}\,\sqrt{r^2} + 2\,\pi\,r\,s \quad \textbf{(15.1.4)}$$

Men da man allerede havde fået s udtrykt, indsættes det, således den eneste ubekente er r.

$$O(r) = \pi\, r \sqrt{5}\, \sqrt{r^2} + 2\, \pi\, r \left(-\frac{-40 + \frac{2}{3}\, \pi\, r^3}{\pi\, r^2} \right)$$

$$O(r) = \pi\, r \sqrt{5}\, \sqrt{r^2} - \frac{2 \left(-40 + \frac{2}{3}\, \pi\, r^3 \right)}{r} \qquad \textbf{(15.1.5)}$$

Herved er r udtryk ved O, dvs. modellen $O(r) = \pi \cdot \left(\sqrt{5} - \frac{4}{3} \right) \cdot r^2 + \frac{80}{r}$ passer. Der skal blot tages hensyn til faktorisering i udregningerne.

Delopgave b

Modellen defineres og differentieres.

local O

$$O(r) := \pi\, r \sqrt{5}\, \sqrt{r^2} + 2\, \pi\, r \left(-\frac{-40 + \frac{2}{3}\, \pi\, r^3}{\pi\, r^2} \right)$$

$$r \rightarrow \pi\, r \sqrt{5}\, \sqrt{r^2} + \frac{(-2)\, \pi\, r \left(-40 + \frac{2}{3}\, \pi\, r^3 \right)}{\pi\, r^2} \qquad \textbf{(15.2.1)}$$

$$O'(r) = 0$$

$$\pi \sqrt{5}\, \sqrt{r^2} + \frac{\pi\, r^2 \sqrt{5}}{\sqrt{r^2}} + \frac{2 \left(-40 + \frac{2}{3}\, \pi\, r^3 \right)}{r^2} - 4\, \pi\, r = 0 \qquad \textbf{(15.2.2)}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for r}}$$

$$\left[\left[r = \frac{2}{29}\, \frac{\left(\left(37845 \sqrt{5} + 50460 \right) \pi^2 \right)^{1/3}}{\pi} \right], \left[r = -\frac{2}{29}\, \frac{\left(\left(37845 \sqrt{5} - 50460 \right) \pi^2 \right)^{1/3}}{\pi} \right] \right] \qquad \textbf{(15.2.3)}$$

Her er to løsninger, men grænsen ligger mellem $0 < r < 4$. Derfor forkastes den negative.

$$r = \frac{2}{29}\, \frac{\left(\left(37845 \sqrt{5} + 50460 \right) \pi^2 \right)^{1/3}}{\pi}$$

$$r = \frac{2}{29}\, \frac{\left(\left(37845 \sqrt{5} + 50460 \right) \pi^2 \right)^{1/3}}{\pi} \qquad \textbf{(15.2.4)}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$r = 2.4161 \qquad \textbf{(15.2.5)}$$

Dvs. der hvor tragtens overflade er minds mulig er når *radius* er 2.4161dm