Matematik A, STX

18. maj 2017

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Funktionerne er givet. Det er trivielt, at $h(x)$ tilhører grafen C da denne linje er parallelt med x-aksen. For $f(x)$ er hældningskoefficienten 1, dermed er denne funktion voksende, svarende til grafen for B. Endelig er $g(x)$ grafen for A, da hældningskoefficienten er -1.

Opgave 2:

a) Arealet er

$$\left|\det(\vec{a},\vec{b})\right| = \left|\det\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 5 & 2\end{pmatrix}\right| = |-1\cdot 2-5\cdot 6| = |-2-30| = 32$$

Opgave 3:

a) Funktionen $f(x)$ differentieres.

$$f'(x) = x^2+2x-3$$

Så løses $f'(x)=0$, så $x^2+2x-3=0$, hvilket er en andengradsligning, som kan faktoriseres.

$$x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1)=0$$

Dermed er løsningerne $x=-3 \vee x=1$. (Løs selv vha. determinantmetoden hvis du er i tvivl.). Der laves fortegnsvariation, så der vælges -4, 0 og 2. Man får

$$f'(-4) = (-4+3)(-4-1) = -1\cdot(-5) = 5$$
$$f'(0) = (0+3)(0-1) = 3\cdot(-1) = -3$$
$$f'(2) = (2+3)(2-1) = 5\cdot 1 = 5$$

Dermed kan man lave et monotoniskema.

x		-3		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	→	↘	→	↗

Så der kan sluttes, at

- $f(x)$ er voksende i intervallet $(-\infty;-3]\cup[1;\infty)$
- $f(x)$ er aftagende i intervallet $[-3;1]$

Opgave 4:

a) Første udtryk reduceres.

$$a^2+2ab-(a+b)^2$$
$$=a^2+2ab-(a^2+b^2+2ab)$$
$$=a^2+2ab-a^2-b^2-2ab$$
$$=-b^2$$

Bemærk, at første kvadratsætning blev benyttet.

$$\frac{x^2+2x}{x+2}$$
$$=\frac{x(x+2)}{x+2}$$
$$=x$$

Her var det muligt at faktorisere x ud for en parentes.

Opgave 5:

a) Man indsætter punkterne i den faktoriserede andengradsligning

$$P(x)=a(x-r_1)(x-r_2)$$

Hvor $r_1=2$ og $r_2=4$, og $A(0,4)$ så

$$4=a\cdot(0-2)(0-4)\Leftrightarrow$$
$$4=8a\Leftrightarrow$$
$$a=\frac{1}{2}$$

Så

$$P(x)=\frac{1}{2}(x-2)(x-4)=\frac{1}{2}(x^2-4x-2x+8)=\frac{1}{2}x^2-3x+4$$

Dermed er $a=1/2$ og $b=-3$.

Opgave 6:

a) Anvend integration ved substitution. Lad $t=x^2+1$, så er $\frac{dt}{dx}=2x\Leftrightarrow dx=\frac{1}{2x}dt$, og de nye grænser bestemmes. Øvre grænse: $t=1^2+1=2$ og nedre grænse: $t=0^2+1=1$, så integralet er

$$\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\int_1^2\frac{2x}{t}\cdot\frac{1}{2x}dt=\int_1^2\frac{1}{t}dt=[\ln(t)]_1^2=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2)$$

Som er det ønskede. En anden metode er:

$$\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}\frac{d(x^2+1)}{2x}=\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}d(x^2+1)=[\ln(x^2+1)]_0^1$$
$$=\ln(1^2+1)-\ln(0^2+1)=\ln(2)-\ln(1)=\ln(2)$$

Løsningsforslag med hjælpemidler

Opgave 7: [Via Maple]

a) Tabellens data indlæses i Maple, og der foretages potensregression.

```
restart
with(Gym) :
P1 := [26, 33, 37, 46, 55, 65] :
P2 := [47, 51, 54, 57, 61, 65] :
f(x) := PowReg(P1, P2, x) :
f(x)
```

$$15.1390265406370\,x^{0.348393566894605} \quad (1)$$

Dermed fik man - vha. Maple - bestemt tallene a og b, som er hhv.

$$a = 0.34894$$
$$b = 15.13903$$

b) I Maple løses ligningen $f(x) = 48$.

```
f(x) = 48
```

$$15.1390265406370\,x^{0.348393566894605} = 48 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x = 27.44353981]] \quad (3)$$

Den nedslagsenergi der skal være for at danne et nedslagskrater på 48mm, er 27.444mJ.

c) Lad nedslagsenergien være $r_x = 40\% = 0.4$, og lad r_y være nedslagskrateret. Da er

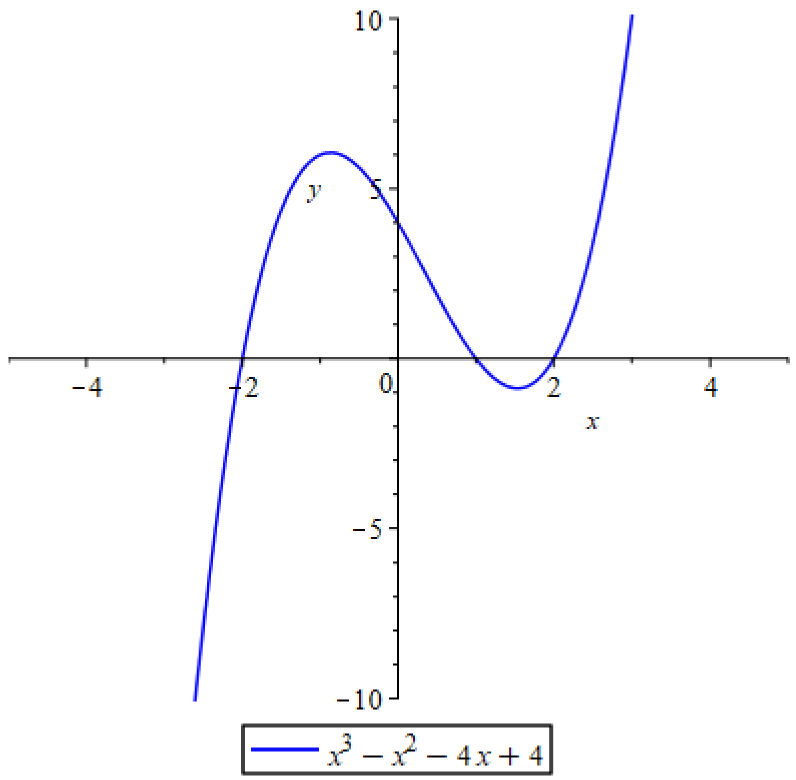
$$r_y = ((1 + 0.4)^{0.34894} - 1) \cdot 100\% = 12.458\%$$

Så når nedslagsenergien øges med 40%, så øges nedslagskrateret med ca. 12.5%

Opgave 8: [Via Maple]

a) I Maple tegnes funktionen vha. plot kommandoen.

restart
with(*Gym*) :
$f(x) := x^3 - x^2 - 4x + 4$:
plot($f(x)$, $x = -5..5$, $y = -10..10$, *color* = "Blue", *legend* = $f(x)$)



Dernæst løses ligningen $f(x) = 0$ i Maple.

$f(x) = 0$

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 1], [x = 2], [x = -2]] \quad \textbf{(2)}$$

Ifølge Maple er nulpunkterne $x = -2 \vee x = 1 \vee x = 2$, og dermed er koordinatsættene til hvert af funktionens nulpunkter:

$$Q(-2; 0), \qquad R(1; 0), \qquad S(2; 0)$$

b) Tangentligningen benyttes.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Hvor $x_0 = 3$. Først findes $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 4$$

Så bestemmes $f'(3)$ og $f(3)$.

$$f'(3) = 3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 4 = 17$$
$$f(3) = 3^3 - 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 10$$

Tangenten i punktet P er

$$\begin{aligned} y &= 17 \cdot (x - 3) + 10 \\ &= 17x - 51 + 10 \\ &= 17x - 41 \end{aligned}$$

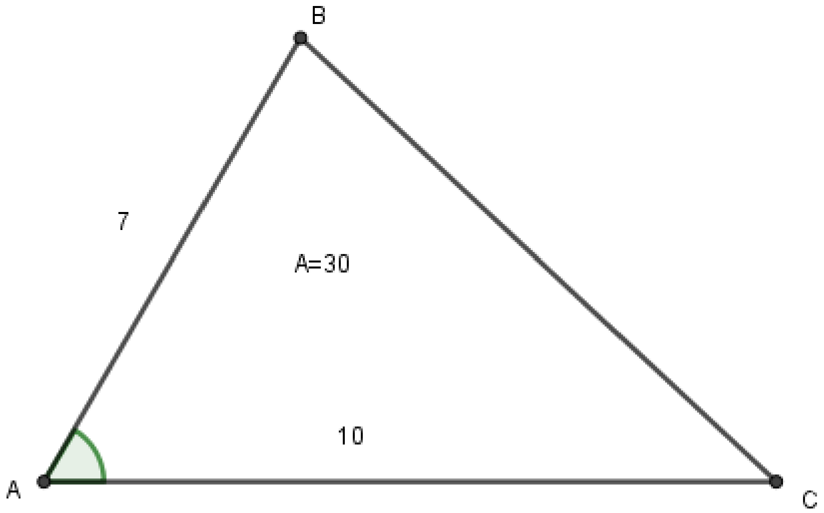
Vha. Maple kunne man hurtigt finde en ligning.

$y = f(3) \cdot (x - 3) + f(3)$

$$y = 17x - 41 \qquad (3)$$

Opgave 9: [Via GeoGebra]

a) [Altid, tegn en skitse, benyt evt. GeoGebra.]



Vinkel A udregnes. Her udnyttes arealet 30, så arealformlen er god at anvende.

$$30 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 10 \cdot \sin(A) \Leftrightarrow$$
$$60 = 70 \cdot \sin(A) \Leftrightarrow$$
$$\sin(A) = \frac{6}{7} \Leftrightarrow$$
$$A = \arcsin\left(\frac{6}{7}\right) = 58.997^o$$

b) Først bestemmes $|BC|$ vha. cosinusrelationerne med udgangspunkt i vinkel A.

$$|BC| = \sqrt{10^2 + 7^2 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cdot \cos(58.997)} = 8.769$$

Omkredsen af trekanten ABC bestemmes.

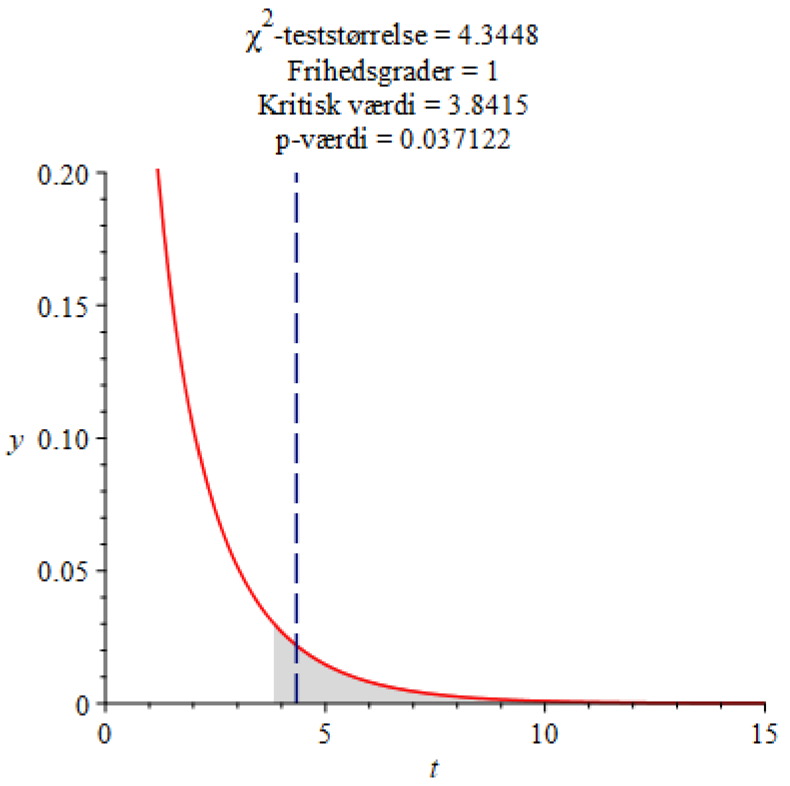
$$O = 10 + 7 + 8.768 = 25.768$$

Opgave 10: [Via Maple]

a) En nulhypotese:

H: Artsfordelingerne er uafhængige af habiaterne. Dernæst opstilles en 2×2 matrix i Maple, så der kan anvendes en χ^2-test.

```
restart
with(Gym) :
obs := ⟨⟨345, 410|112, 96⟩⟩ :
ChiKvadratUtest(obs, level = 0.05)
```



Da p-værdien er 0.037122 og dermed mindre end de 0.05 signifikansniveau der blev testet med, så forkastes nulhypotesen.

Opgave 11: [Via Maple]

a) Der opstilles to vektorer.

$$\overrightarrow{OA} = A - O = \begin{pmatrix} 14-0 \\ 0-0 \\ 24-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OB} = B - O = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 10-0 \\ 20-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Så benyttes krydsprodukt. Dette kan udregnes i hånden, men det udføres i Maple.

$restart$
$with(Gym):$
$\overrightarrow{OA} := \langle 14, 0, 24 \rangle :$
$\overrightarrow{OB} := \langle 0, 10, 20 \rangle :$
$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$

$$\begin{bmatrix} -240 \\ -280 \\ 140 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Arealet er

$$T = \frac{1}{2} \cdot \left| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-240)^2 + (-280)^2 + 140^2} = 197.23$$

Så der kan sluttes, at arealet er $197.23 dm^2$

b) Punktet B benyttes som fast punkt, og vektoren $\overrightarrow{OB}$ anvendes som retningsvektor, så parameterfremstillingen for l er

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

c) Normalvektoren til xy-planen er

$$\overrightarrow{n_{xy}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så kan vinklen mellem linjen l og xy-planen bestemmes ved at udregne vinklen mellem vektoren $\overrightarrow{n_{xy}}$ og $\overrightarrow{OB}$, hvor man efter fratrækker svaret med 90^o, så

$$v = 90 - \arccos\left(\frac{0 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + 20 \cdot 1}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 10^2 + 20^2}}\right) = 63.435^o$$

Opgave 12: [Via Maple]

a) Man indsætter $T(x) = 26^oC$ i differentialligningen, så

$$T'(x) = 1.54 - 0.259 \cdot (26 - 22) = 0.504$$

Så når temperaturen er 26^oC, så vokser temperaturen hver time med 0.504^oC.

b) Anvendes Maple, kan man bestemme en partikulær løsning til differentialligningen.

restart
with(Gym) :
dsolve({T'(x) = 1.54 − 0.259 · (T(x) − 22), T(0) = 22}, T(x))

$$T(x) = \frac{1034}{37} - \frac{220\,e^{-\frac{259\,x}{1000}}}{37} \qquad \textbf{(1)}$$

Dernæst løses ligningen $T(x) = 27$, da fisken ikke tåler en temperatur under 27^oC.

T(x) = 27

$$\frac{1034}{37} - \frac{220\,e^{-\frac{259\,x}{1000}}}{37} = 27 \qquad \textbf{(3)}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$\left[\left[x = -\frac{1000\ln\left(\frac{7}{44}\right)}{259}\right]\right] \qquad \textbf{(4)}$$

evalf[5](%)

$$[[x = 7.0977]] \qquad \textbf{(5)}$$

Det er forsvarligt at komme fisken i akvariet 7.1 timer efter opvarmningen af akvariet ifølge modellen.

Opgave 13:

a) Ligningen $f(x) = g(x)$ løses.

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\ln(2)}{-\ln(2)} = -1$$

Arealet af M bestemmes.

$$M = \int_{-1}^{0} \left(4 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) dx = \left[4x - \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}\right]_{-1}^{0} = \left[4x + \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln(2)}\right]_{-1}^{0}$$

$$= 4 \cdot 0 + \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^0}{\ln(2)} - \left(4 \cdot (-1) + \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}{\ln(2)}\right) = \frac{2}{\ln(2)} + 4 - \frac{4}{\ln(2)} = 4 - \frac{2}{\ln(2)}$$

Som er arealet af M.

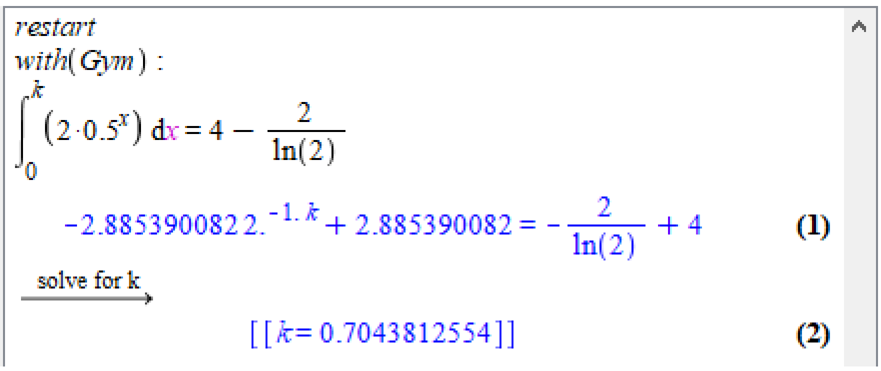
b) Her løses ligningen

$$\int_0^k \left(2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x\right) dx = 4 - \frac{2}{\ln(2)} \Leftrightarrow \left[-\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln(2)}\right]_0^k = 4 - \frac{2}{\ln(2)} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\ln(2)} - \left(-\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^0}{\ln(2)}\right) = 4 - \frac{2}{\ln(2)} \Leftrightarrow \frac{2}{\ln(2)} - \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^k}{\ln(2)} = 4 - \frac{2}{\ln(2)} \Leftrightarrow$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^k = 4 - 4\ln(2) \Leftrightarrow -k \cdot \ln(2) = \ln(2 - 2\ln(2)) \Leftrightarrow k = \frac{\ln(2 - 2\ln(2))}{-\ln(2)}$$

Afrundet giver det $k = 0.70439$ som er det ønskede.



Opgave 14: [Via Maple]

a) Der er givet to støttepunkter, så topunktsformlen for eksponentielle funktioner anvendes. Her er $1980 = t_1 = 0$ og $2012 = t_2 = 32$, så

$$a = \sqrt[t_2-t_1]{\frac{y_2}{y_1}} = \sqrt[32-0]{\frac{967}{721}} = \sqrt[32]{\frac{967}{721}} = 1.0092159$$

Når $t_1 = 0$ er $f(t_1) = 721$ hvilket svarer til b. Så er en forskrift

$$f(t) = 721 \cdot 1.0092159^t$$

Hvor $f(t)$ beskriver antallet af rygere, målt i mio. til tidspunktet t, målt i år efter 1980.

b) Andelen af rygere svarer til

$$g(t) = \frac{f(t)}{N(t)} = \frac{721 \cdot 1.0092159^t}{\frac{12245}{1+1.74e^{-0.0273t}}} = \frac{721 \cdot 1.0092159^t \cdot (1+1.74e^{-0.0273t})}{12245}$$

I Maple defineres $g(t)$, hvor man så efterfølgende løser $g'(t) = 0$ for at bestemme det årstal, hvor antallet af rygere på verdensplan var mindst.

restart
with(*Gym*) :

$$g(t) := \frac{721\ 1.0092159^t \left(1 + 1.74\ \mathrm{e}^{-0.0273\,t}\right)}{12245} :$$

$g'(t) = 0$

$$0.0005401578152\ 1.0092159^t \left(1 + 1.74\ \mathrm{e}^{-0.0273\,t}\right) - 0.002796973622\ 1.0092159^t\ \mathrm{e}^{-0.0273\,t} = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 45.23478158]] \quad \textbf{(2)}$$

$g''(45.23478158)$

$$0.00002233070766 \quad \textbf{(3)}$$

$g''(45.23478158) > 0$, betyder minimum.

Da den anden afledede er positiv, så betyder det, at $t = 45.235$ er det tidspunkt, hvor andelen af rygere på verdensplan er mindst, og det sker ifølge modellen i år 2025.

Opgave 15:

a) Længden $|AF|$ bestemmes vha. cosinusrelationerne. Her kendes $|AC|$ og $|CF|$, som begge har længden 340mm.

$$|AF| = \sqrt{2 \cdot 340^2 - 2 \cdot 340^2 \cdot \cos(33)} = 193.130$$

Så $|AF| = 193.130$mm. På samme måde bestemmes $|AG|$, da der kendes $|AB|$ og $|BG|$, som begge har længden 210mm.

$$|AG| = \sqrt{2 \cdot 210^2 - 2 \cdot 210^2 \cdot \cos(33)} = 119.286$$

Så $|AG| = 119.286$mm. Forholdet $|AF|/|AG|$ bestemmes.

$$\frac{|AF|}{|AG|} = \frac{193.130}{119.286} = 1.619 \approx 1.62$$

Ift. det gyldne snit er dette rimelig tæt på, i praksis vil man sige det er det gyldne forhold.

b) Da vinkel B og C er ensvinklet så vil man kunne finde forholdet mellem trekanterne, dvs.

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|CF|}{|DF|} = \frac{340}{210} \approx 1.62$$

$$\frac{|AF|}{|AG|} = \frac{193.130}{119.286} \approx 1.62$$

Uanset hvilken indstilling man giver værktøjet, så vil trekanterne stadig være ensvinklede og længden af linjestykkerne vil ændre sig, men forholdet vil forblive uændret, dermed er indstillingen af værktøjet uafhængig af forholdet mellem $|AF|/|AG|$, da man altid vil få forholdet 1.62, om så vinklen var 42^o, 12^o eller noget helt tredje.

Matematik A, STX

23. maj 2017

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Toppunktet til parablen bestemmes.

$$y' = 4x - 4$$

Så løses $y' = 0$, dvs. $4x - 4 = 0 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1$, som så er toppunktets x-koordinat. y-koordinaten findes ved at indsætte $x = 1$ i parablen, så

$$y = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 1$$

Koordinatsættet til toppunktet er $T(1;1)$.

Opgave 2:

a) Hvis vektorerne skal være ortogonale, så skal de stå vinkelrette på hinanden, og dermed er deres skalarprodukt lig 0. Det giver ligningen

$$2 \cdot 6 + 3 \cdot t = 0 \Leftrightarrow 12 + 3t = 0 \Leftrightarrow 3t = -12 \Leftrightarrow t = -4$$

Så $t = -4$ gør at vektorerne er ortogonale.

Opgave 3:

a) Først bestemmes $|BC|$

$$|BC| = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{6^2} = 6$$

Der opstilles en ligning.

$$\frac{|DF|}{|AC|} = \frac{|EF|}{|BC|}$$

Så indsættes oplysningerne og den ubekendte isoleres, i dette tilfælde, $|EF|$

$$\frac{10}{8} = \frac{|EF|}{6} \Leftrightarrow |EF| = \frac{10}{8} \cdot 6 = \frac{60}{8} = \frac{15}{2} = 7.5$$

Som er længden $|EF|$.

Opgave 4:

a) Stamfunktionen til f benævnes med F, så

$$F(x) = \int (3x^2 + 4x)\,dx = x^3 + 2x^2 + k$$

Så isoleres k, når $P(2;4)$ anvendes.

$$4 = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + k \Leftrightarrow 4 = 8 + 8 + k \Leftrightarrow 4 = 16 + k \Leftrightarrow k = -12$$

Stamfunktionen er

$$F(x) = x^3 + 2x^2 - 12$$

Opgave 5:

a) Ved anvendelse af kvadratkomplementering fås

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y + 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 4x + (-2)^2 + y^2 + 6y + (3)^2 = -12 + (3)^2 + (-2)^2 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = -12 + 9 + 4 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 1$$

Centrum er $C(2;-3)$ og radius $r = 1$.

Opgave 6:

a) En tangentligning opstilles. Det vides, at $\frac{dy}{dx} = 9$, og man kender $x_0 = 1$, så

$$9 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot y \Leftrightarrow y = 3$$

Så har man tangentligningen

$$y = 9(x-1) + 3 = 9x - 9 + 3 = 9x - 6$$

Som er den ønskede tangentligning.

Løsningsforslag med hjælpemidler

Opgave 7: [Via Maple]

a) Tabellens data indlæses i Maple, og der foretages eksponentielregression.

$restart$
$with(Gym):$
$E1 := [0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28]:$
$E2 := [278, 206, 138, 110, 81, 58, 49, 32]:$
$C(t) := ExpReg(E1, E2, t):$
$evalf[9](C(t))$

$$270.505047\ 0.927688433^t \quad \mathbf{(1)}$$

Dermed fik man - vha. Maple - bestemt tallene a og b, som er hhv.

$$a = 0.927688433$$
$$b = 270.505047$$

b) I Maple løses ligningen $C(t) = 5$.

$C(t) = 5$

$$270.505047229079\ 0.927688433385637^t = 5 \quad \mathbf{(2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

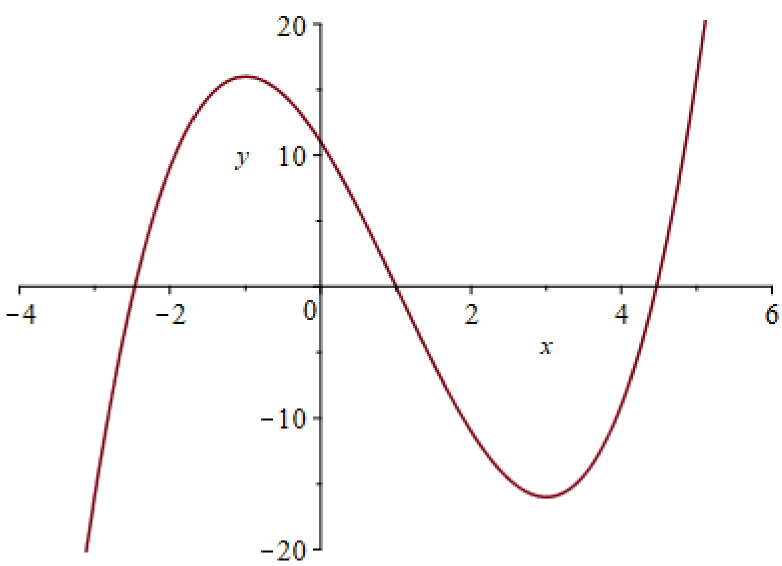
$$[[t = 53.16930197]] \quad \mathbf{(3)}$$

Der skal gå ca. 53 døgn før det er forsvarligt at bade i søen.

Opgave 8:

a) I Maple tegnes funktionen vha. plot kommandoen.

$restart$
$with(Gym):$
$f(x) := x^3 - 3x^2 - 9x + 11:$
$plot(f(x), x=-4..6, y=-20..20)$



Dernæst løses ligningen $f(x) = 0$ i Maple.

$f(x) = 0$

$$x^3 - 3x^2 - 9x + 11 = 0 \quad \textbf{(1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 1], [x = 1 - 2\sqrt{3}], [x = 1 + 2\sqrt{3}]] \quad \textbf{(2)}$$

Ifølge Maple er nulpunkterne $x = 1 - 2\sqrt{3} \vee x = 1 \vee x = 1 + 2\sqrt{3}$, og dermed er koordinatsættene til hvert af funktionens nulpunkter:

$$Q(1 - 2\sqrt{3}; 0), \qquad R(1; 0), \qquad S(1 + 2\sqrt{3}; 0)$$

b) Monotoniforholdene bestemmes. Funktionen $f(x)$ differentieres.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

Så løses $f'(x) = 0$, så $3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$, hvilket er en andengradsligning, som kan faktoriseres.

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$

Dermed er løsningerne $x = -1 \vee x = 3$. (Løs selv vha. determinantmetoden hvis du er i tvivl.). Der laves fortegnsvariation, så der vælges -2, 0 og 4. Man får

$$f'(-2) = (-2 - 3)(-2 + 1) = 15$$
$$f'(0) = (0 - 3)(0 + 1) = -9$$
$$f'(4) = (4 - 3)(4 + 1) = 15$$

Dermed kan man lave et monotoniskema.

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$

Så der kan sluttes, at

- $f(x)$ er voksende i intervallet $(-\infty; -1] \cup [3; \infty)$
- $f(x)$ er aftagende i intervallet $[-1; 3]$

Man kan anvende en anden metode, nemlig den anden afledede.

restart :; *with*(*Gym*) :

$f(x) := x^3 - 3x^2 - 9x + 11$:

$f(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = 3], [x = -1]]$

$f''(3)$

$$12 \quad \textbf{(1)}$$

12 > 0, minimum i $x = 3$

$f''(-1)$

$$-12 \quad \textbf{(2)}$$

-12 < 0, maksimum i x=-1.

Så kan man foretage samme konklusion som den normale metode.

Opgave 9: [Via Maple]

a) Man indsætter $x = 0$ i begge funktioner og udregner. Dette sker i Maple.

$restart :; with(Gym) :$

$f(x) := 0.25 \cdot \mathrm{sqrt}(9 - 16 \cdot x^2)$

$$f := x \mapsto 0.25 \sqrt{-16 x^2 + 9} \quad (1)$$

$g(x) := -0.055 \cdot x + 0.75$

$$g := x \mapsto -0.055 x + 0.75 \quad (2)$$

$g(0) = f(0)$

$$0.75 = 0.75 \quad (3)$$

Da begge sider af lighedstegnet er sandt, så er $f(0) = g(0)$ sandt. Arealet af M udregnes.

$M = \int_{-0.75}^{0} f(x) \, dx + \int_{0}^{11} g(x) \, dx$

$$M = 5.364286467 \quad (4)$$

Det ses, at arealet af M er 5.364

b) Rumfanget bestemmes. Der foretages samme metode som i spørgsmål a, dog med anvendelse af volumenformlen.

$V = \mathrm{Pi} \cdot \int_{-0.75}^{0} f(x)^2 \, dx + \mathrm{Pi} \cdot \int_{0}^{11} g(x)^2 \, dx$

$$V = 8.858008468 \quad (5)$$

Så rumfanget af skulpturen er $8.858 \mathrm{m}^3$.

Opgave 10:

a) Når $|BC| = 5$, så findes x. Her anvendes cosinusrelationerne.

$$\sqrt{x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos(35)} = 5 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + (2x)^2 - 2 \cdot x \cdot 2x \cdot \cos(35) = 25 \Leftrightarrow$$
$$5x^2 - 4x^2 \cdot \cos(35) = 25 \Leftrightarrow$$
$$x^2(5 - 4\cos(35)) = 25 \Leftrightarrow$$
$$x^2 = \frac{25}{5 - 4\cos(35)} \Leftrightarrow$$
$$x = \sqrt{\frac{25}{5 - 4\cos(35)}} = 3.808710737$$

Den negative værdi blev ikke medtaget, så $x = 3.808710737$.

b) Arealformlen anvendes.

$$20 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 2x \cdot \sin(35) \Leftrightarrow$$
$$20 = x^2 \cdot \sin(35) \Leftrightarrow$$
$$x^2 = \frac{20}{\sin(35)} \Leftrightarrow$$
$$x = \sqrt{\frac{20}{\sin(35)}} = 5.904992457$$

Den negative værdi blev ikke medtaget, så $x = 5.904992457$.

Opgave 11: [Via Maple]

a) En passende hypotese er

H: Der er uafhængighed mellem kæledyr og antal hjemmeboende børn i husstanden.

I Maple indlæses en matrix og der bestemmes de forventede værdier. Dette kan også gøres pr. håndkraft vha. formlen

$$forventet = \frac{rækkesum \cdot kolonnesum}{sum\ total}$$

I Maple skriver man

```
restart :; with(Gym) :
obs := <<133, 24, 46|202, 28, 37>> :
forventet(obs)
```

$$\begin{bmatrix} 144.69 & 190.31 \\ 22.460 & 29.540 \\ 35.849 & 47.151 \end{bmatrix} \quad \textbf{(1)}$$

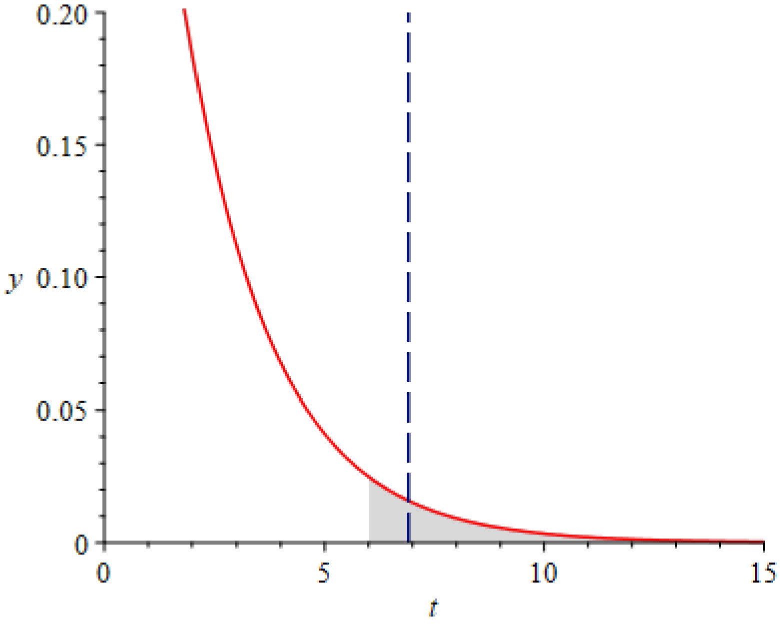
Og en flot tabel som i opgavebeskrivelsen fås

	Et eller flere kæledyr	Ingen kæledyr
Ingen hjemmeboende børn	145	190
Et hjemmeboende barn	22	30
To eller flere hjemmeboende børn	36	47

b) I Maple udregnes teststørrelsen, der benyttes en U-test. Der anvendes et 5% signifikansniveau.

```
restart :; with(Gym) :
obs := ⟨⟨133, 24, 46|202, 28, 37⟩⟩ :
ChiKvadratUtest(obs, level = 0.05)
```

χ^2-teststørrelse = 6.9087
Frihedsgrader = 2
Kritisk værdi = 5.9915
p-værdi = 0.031607



Da p-værdien er lavere end de 0.05 der blev testet med, så afvises hypotesen.

Opgave 12:

a) Man benytter oplysningerne fra teksten, hvor $P(x) = 0.5$, $M_{Anne} = 70$, $M_{Bente} = 50$, $a = 4$, så

$$0.5 = -0.15 \cdot x + 20 \cdot \frac{4}{70} \Leftrightarrow -0.15 \cdot x = -\frac{9}{14} \Leftrightarrow x = \frac{-\frac{9}{14}}{-\frac{3}{20}} = \frac{30}{7} = 4.2857$$

$$0.5 = -0.15 \cdot x + 20 \cdot \frac{4}{50} \Leftrightarrow -0.15 \cdot x = -\frac{11}{10} \Leftrightarrow x = \frac{-\frac{11}{10}}{-\frac{3}{20}} = \frac{22}{3} = 7.3333$$

Differensen er

$$\frac{22}{3} - \frac{30}{7} = \frac{64}{21} \approx 3.0476$$

Dvs. der vil gå ca. tre timer længere for Bente at nå en promille på 0.5 igen.

b) Anne vejer stadig 70kg, og $x = 3$ samt $P(x) = 0$. Ligningen er

$$0 = -0.15 \cdot 3 + 20 \cdot \frac{a}{70} \Leftrightarrow 0.45 = \frac{2a}{7} \Leftrightarrow a = \frac{0.45}{\frac{2}{7}} = 1.575$$

Så Anne kan kun indtage 1.575 genstande for, at hendes promille er 0 efter 3 timer.

Opgave 13:

a) Ligningen for planen α opstilles. Der opstilles to vektorer.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 3-0 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 3-0 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

I Maple foretages krydsprodukt.

$restart :; with(Gym) :$

$\overrightarrow{AB} := \langle 0, 3, -1 \rangle :; \overrightarrow{AC} := \langle 3, 3, -3 \rangle :$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Så anvendes normalvektoren samt et fast punkt A i planens ligning, det giver

$$-6(x-0) - 3(y-0) - 9(z-4) = 0 \Leftrightarrow$$
$$-\frac{1}{3}(-6x - 3y - 9z + 36) = -\frac{1}{3} \cdot 0 \Leftrightarrow$$
$$2x + y + 3z = 12$$

Koordinatsættet til D bestemmes.

$$2 \cdot 3 + 0 + 3 \cdot z_D = 12 \Leftrightarrow z_D = 2$$

Så dermed er koordinatsættet til $D(3; 0; 2)$.

b) xz-planen har normalvektoren $\overrightarrow{n_{xz}} = \langle 0; 1; 0 \rangle$. Normalvektoren til planen α er $\overrightarrow{n_\alpha} = \langle 2; 1; 3 \rangle$

Dermed bestemmes vinklen.

$$v = \arccos\left(\frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}}\right) = 74.5^o$$

Den stumpe vinkel er

$$v_{stump} = 180^o - 74.5^o = 105.5^o$$

Som er det ønskede.

Opgave 14: [Via GeoGebra]

a) Teksten aflæses og da proportionalitetskonstanten er 0.025, så må differentialligningen være $f'(t) = 0.025 \cdot f(t)$, hvor t er tiden og $f(t)$ er daglige antal solgte kopper kaffe.

b) Forskriften bestemmes på baggrund af den oplyste differentialligning. Bemærk, at det er en logistisk differentialligning, så den fuldstændige løsning er

$$N(t) = \frac{200}{1 + ce^{-0.00017 \cdot 200 \cdot t}}$$

Så anvendes $N(0) = 50$ og c isoleres.

$$\frac{200}{1 + ce^{-0.00017 \cdot 200 \cdot 0}} = 50 \Leftrightarrow \frac{200}{1 + c} = 50 \Leftrightarrow 200 = (1 + c)50 \Leftrightarrow$$
$$\frac{200}{50} = 1 + c \Leftrightarrow c = \frac{200}{50} - 1 = 3$$

Dermed er den partikulære løsning

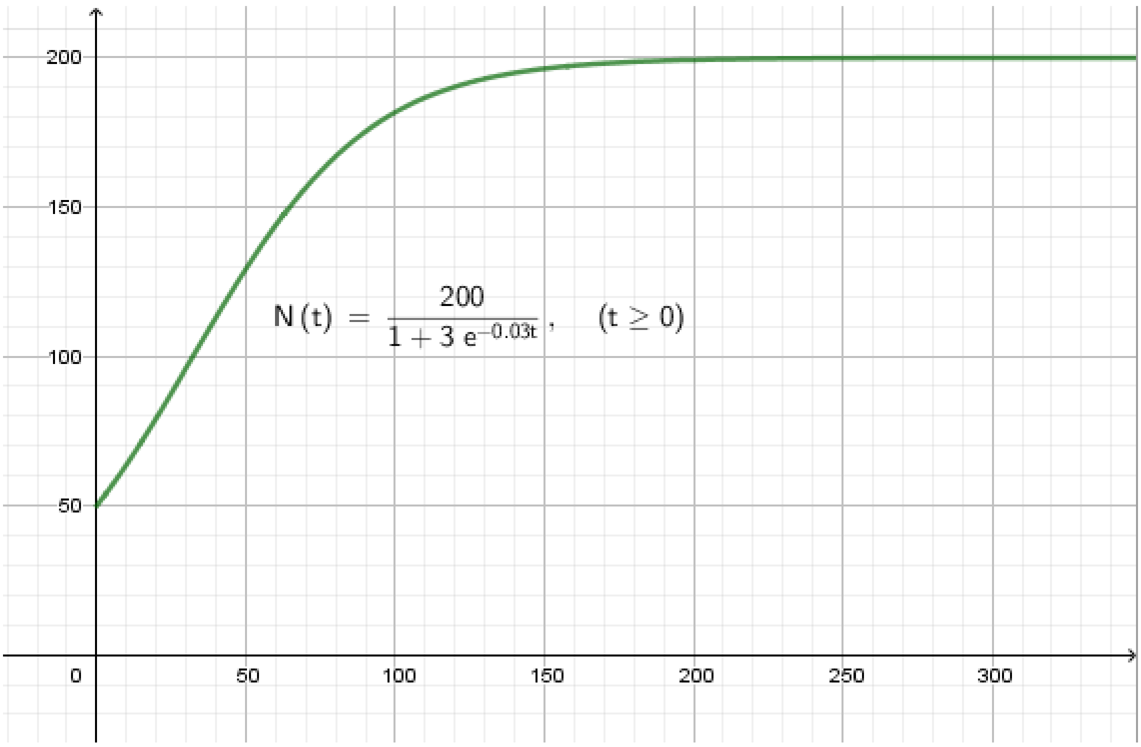
$$N(t) = \frac{200}{1 + 3e^{-0.034 \cdot t}}$$

30 dage svarer til $t = 30$, så

$$N(30) = \frac{200}{1 + 3e^{-0.034 \cdot 30}} = 96$$

Dvs. der vil være solgt 96 kopper kaffe efter 30 dage.

c) I GeoGebra skitseres grafen for $N(t)$.



Den øvre grænse er 200, eftersom linjen $y = 200$ er asymptote med $N(t)$, man kan også anvende limits hvor $t \to \infty$.

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{200}{1+3e^{\frac{0.034}{t}}}\right) = \frac{200}{\lim_{t\to\infty}\left(1+3e^{\frac{0.034}{t}}\right)} = \frac{200}{1+\lim_{t\to\infty}\left(3e^{\frac{0.034}{t}}\right)}$$

$$= \frac{200}{1+3e^{\lim_{t\to\infty}\left(\frac{0.034}{t}\right)}} = \frac{200}{1+3\cdot 0} = \frac{200}{1} = 200$$

Så dermed er den øvre grænse 200 kopper kaffe.

Opgave 15:

a) Bredden er y og længden er $x-y$, så arealformlen er

$$T_R(x,y) = y\cdot(x-y) = xy - y^2$$

b) Længden af hele figuren er x og bredden af hele figuren er $x+y$, og da bredden er $\frac{3}{5}$ af længden, har man udtrykket

$$\frac{3}{5}(x+y) = x \Leftrightarrow 3(x+y) = 5x \Leftrightarrow 3x+3y = 5x \Leftrightarrow 3y = 2x \Leftrightarrow y = \frac{2x}{3}$$

Denne værdi udnyttes nu i arealformlen fra spørgsmål a, og der anvendes det totale areal, så

$$1800 = x\cdot\frac{2x}{3} - \left(\frac{2x}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 1800 = \frac{2x^2}{9} \Leftrightarrow 16200 = 2x^2 \Leftrightarrow 8100 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 90$$

Den negative længde anvendes ikke, så $x = 90$. Nu kan y bestemmes.

$$y = 2\cdot\frac{90}{3} = 60$$

Som er det ønskede.

Matematik A, STX

15. august 2017

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Arealet er 15, og $|BC| = 5$, så kan $|AC|$ bestemmes vha. arealformlen.

$$15 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot |AC| \Leftrightarrow 30 = 5 \cdot |AC| \Leftrightarrow |AC| = \frac{30}{5} = 6$$

Opgave 2:

a) Udtrykket reduceres.

$$\begin{aligned}&(x+y)^2 + (x-y)(x+y)\\ &= x^2 + y^2 + 2xy + x^2 - y^2\\ &= 2x^2 + 2xy\\ &= 2x(x+y)\end{aligned}$$

Bemærk, at første og tredje kvadratsætning blev anvendt.

Opgave 3:

a) Kvadratrodsfunktionen $f(x)$ kan skrives som $x^{1/2}$, og da potensen ligger mellem 0 og 1, så er den langsomt voksende, dermed er denne graf for B. Andengradsfunktionen $g(x)$ er derimod ligesom kvadratrodsfunktionen en voksende funktion, men da 2 er større end 1, så er denne hurtigt voksende og vokser meget stejlt, dermed er denne graf for C. Endelig er funktionen $h(x)$ en hyperbel, som er aftagende, og dermed er det graf for A.

Opgave 4:

a) Funktionen $f(x)$ differentieres.

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 1, \qquad x > 0$$

Så løses $f'(x) = 0$, så

$$\frac{2}{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 2$$

Dermed er løsningen $x = 2$. Der laves fortegnsvariation, så der vælges 1 og 3. Man får

$$f'(1) = \frac{2}{1} - 1 = 2 - 1 = 1$$
$$f'(3) = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

Dermed kan man lave et monotoniskema.

$x > 0$	0		2	
$f'(x)$	Undefined	$+$	0	$-$
$f(x)$	Undefined	↗	→	↘

Så der kan sluttes, at

- $f(x)$ er voksende i intervallet $(0; 2]$
- $f(x)$ er aftagende i intervallet $[2; \infty)$

Opgave 5:

a) Andengradsligningen har en løsning, hvis og kun hvis $d = 0$, så

$$0 = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot k \Leftrightarrow 0 = 16 - 16k \Leftrightarrow 16 = 16k \Leftrightarrow k = 1$$

Så $k = 1$ giver en løsning til andengradsligningen.

Opgave 6:

a) Indsættes P i ligningen for cirklen.

$$5^2 - 4 \cdot 5 + 5^2 - 2 \cdot 5 = 20 \Rightarrow 20 = 20$$

Så P ligger på cirklen. Cirklens ligning omskrives.

$$x^2 - 4x + (-2)^2 + y^2 - 2y + (-1)^2 = 20 + (-2)^2 + (-1)^2 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$

Så er $C(2; 1)$. Tangenten til cirklen bestemmes ved at man finder en vektor fra P til C.

$$\overrightarrow{CP} = P - C = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Benyttes linjens ligning er

$$3(x-5) + 4(y-5) = 0 \Leftrightarrow 3x - 15 + 4y - 20 = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 35 = 0$$

Som er den ønskede tangentligning.

Løsningsforslag med hjælpemidler

Opgave 7: [Via Maple]

a) Tabellens data indlæses i Maple, og der foretages eksponentielregression.

```
restart :; with(Gym) :
E1 := [1, 2, 5, 6, 7, 9, 10, 11] :
E2 := [24500, 13600, 3020, 1800, 1150, 440, 270, 166] :
N(t) := ExpReg(E1, E2, t) :
evalf[9](N(t))
                    37322.7216 0.609614518^t                    (1)
```

Dermed fik man - vha. Maple - bestemt tallene a og b, som er hhv.

$$a = 0.609614518$$
$$b = 37322.7216$$

b) Så indsættes $t = 14$, så

$$N(t) = 37322.7216 \cdot 0.609614518^{14} = 36.538 \approx 37$$

Efter 14 år er der kun 37 træer i området.

c) Halveringstiden bestemmes.

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(0.609614518)} = 1.4$$

Dvs. antallet af træerne halveres hvert 1.4 år. Den årlige vækstrate bestemmes.

$$r = 0.609614518 - 1 = -0.390385482 \approx -39\%$$

Så får hvert år der går, falder mængden af træer i området med 39%.

Opgave 8:

a) Topunktsformlerne benyttes.

$$a = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{\ln(x_2) - \ln(x_1)} = \frac{\ln(102) - \ln(17)}{\ln(5) - \ln(3)} = 3.50758$$
$$b = \frac{y_1}{x_1^a} = \frac{17}{3^{3.50758}} = 0.3605$$

Så er forskriften

$$f(x) = 0.3605 \cdot x^{3.50758}$$

b) Lad $r_x = 10\%$, så er

$$r_y = \left(\left(1 + \frac{10}{100}\right)^{3.50758} - 1\right) \cdot 100\% = 39.6973\%$$

Så når x vokser med 10%, så vokser y med 39.6973%

Opgave 9:

a) Parameterfremstillingen l omskrives.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Så $x = 1 + 2t$ og $y = 1 + t$, isoleres t i ligningen med x fås $t = \frac{x-1}{2}$, så

$$y = 1 + \frac{x-1}{2} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Omskrives m, så

$$y = 5x + 4$$

Vinklen mellem l og m kan man få ved at anvende formlen:

$$v = \arctan(5) - \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 52.12501635^o$$

Man kan også vælge at anvende retningsvektoren $\vec{r_l} = \langle 2; 1 \rangle$ fra parameterfremstillingen, og tage tværvektoren til normalvektoren for linjen m, så er

$$\overrightarrow{r_m} = \widehat{n_m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

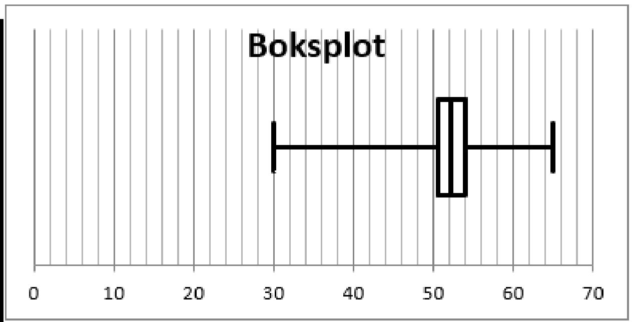
Dermed er vinklen

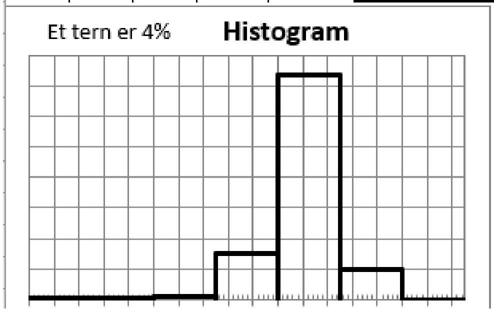
$$v = \arccos\left(\frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 5}{\sqrt{1^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}}\right) = 52.12501635^o$$

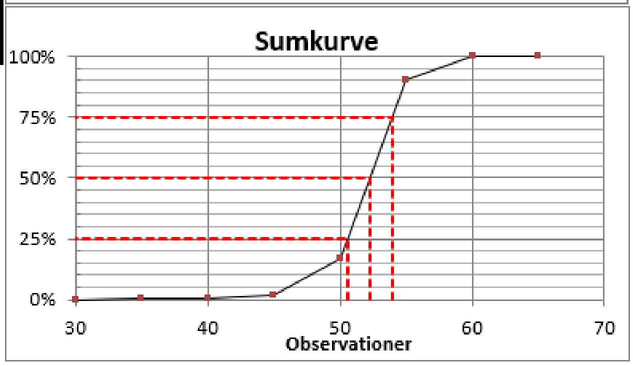
Opgave 10: [Via WordMat og Maple]

a) Denne opgave kan nemt laves vha. WordMat, som har et integreret Excel-ark, som kan anvendes. Gå i ”WordMat -> Statistik -> Grupperede...” og indtast tabellen. Så regner den det hele.

Grupperede observationer					Deskriptorer	
Interval					Kvartilsæt	
Fra	Til	Hyp.	Frekvens	Kum. Frekv	Mindste	30
30	35	138	0%	0,25%	Nedre	50,56
35	40	166	0%	0,55%	Median	52,26
40	45	699	1%	1,81%	Øvre	53,97
45	50	8333	15%	16,85%	Største	65
50	55	40611	73%	90,14%	Observatior	Fraktil
55	60	5433	10%	99,95%		
60	65	29	0%	100,00%		
					Middeltal	52,02
					Spredning	2,995







Ifølge Excel-arket er de kumulerede frekvenser:

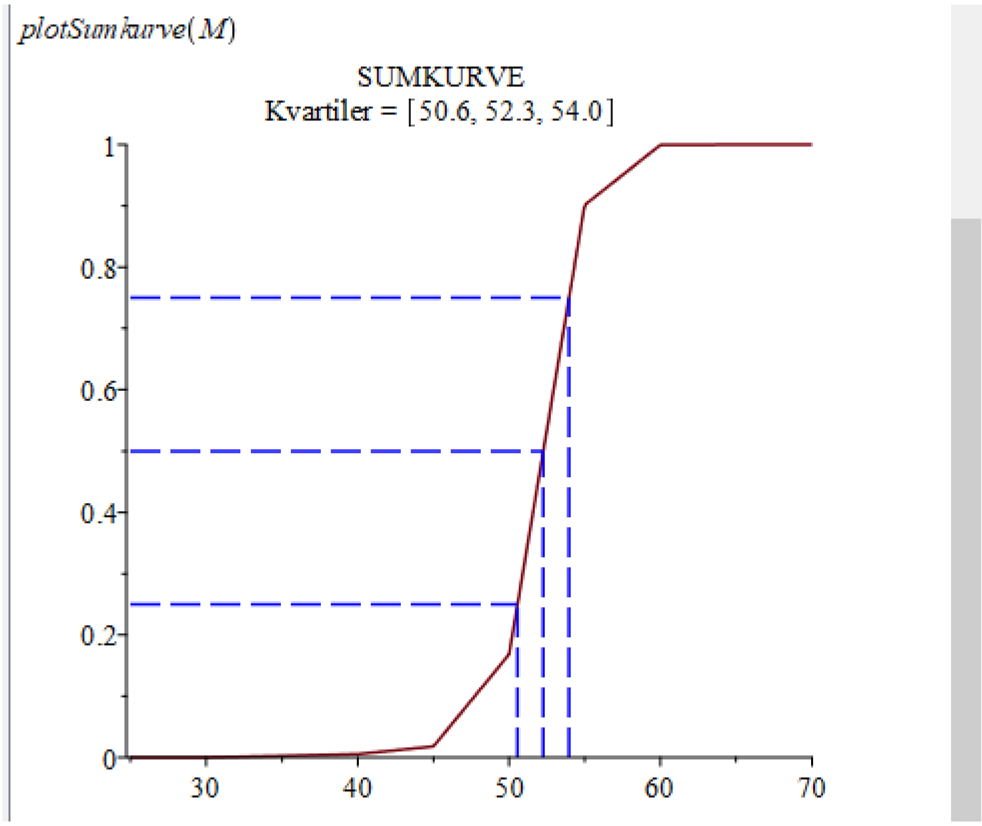
$$0.25\%,\quad 0.55\%,\quad 1.81\%,\quad 16.85\%,\quad 90.14\%,\quad 99.95\%,\quad 100\%$$

Og sumkurven ses fra Excel-arket. Maple ville også kunne klare denne type opgave.

```
restart :; with(Gym) :
M := ⟨⟨30 ..35, 35 ..40, 40 ..45, 45 ..50, 50 ..55, 55 ..60, 60 ..65|138, 166, 699, 8333,
   40611, 5433, 29⟩⟩ :
frekvensTabel(M)
```

observation	hyppighed	frekvens (%)	kumuleret (%)
30 .. 35	138	0.2491	0.249
35 .. 40	166	0.2996	0.549
40 .. 45	699	1.262	1.81
45 .. 50	8333	15.04	16.8
50 .. 55	40611	73.29	90.1
55 .. 60	5433	9.805	99.9
60 .. 65	29	0.05234	100

Og man fik bestemt de kumulerede frekvenser. Maple kan også tegne en sumkurve.



Men det hele kan også udregnes i hånden, netop ved at anvende summen af hyppighederne, som deles med de enkelte hyppigheder, multipliceret med 100%, så

Int	Hyp	Frekvens	Kumuleret frekvens
30-35	138	$\frac{138}{55409} \cdot 100\% = 0.249\%$	0.249%
35-40	166	$\frac{166}{55409} \cdot 100\% = 0.299\%$	$0.249\% + 0.299\% = 0.548\%$
40-45	699	$\frac{699}{55409} \cdot 100\% = 1.262\%$	$1.262\% + 0.548\% = 1.81\%$
45-50	8333	$\frac{8333}{55409} \cdot 100\% = 15.039\%$	$15.039\% + 1.81\% = 16.849\%$
50-55	40611	$\frac{40611}{55409} \cdot 100\% = 73.293\%$	$73.293\% + 16.849\% = 90.142\%$
55-60	5433	$\frac{5433}{55409} \cdot 100\% = 9.805\%$	$9.805\% + 90.142\% = 99.947\%$
60-65	29	$\frac{29}{55409} \cdot 100\% = 0.052\%$	$0.052\% + 99.947\% = 99.999\% \approx 100\%$

Summen total af hyppigheder: 55409

Og derfra kan man tegne sin sumkurve.

b) Her fortsættes brugen af Maple. Kvartilsættet kan findes via kommandoen $kvartiler(M)$, så

kvartiler(*M*)

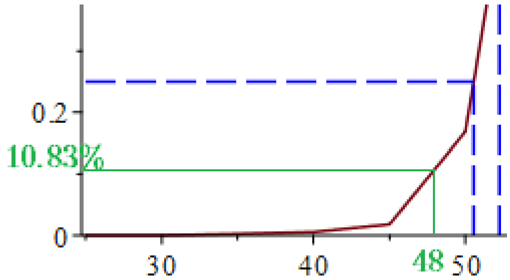
$[50.556, 52.262, 53.967]$ **(2)**

Dermed blev kvartilsættet fundet vha. Maple, hvor nedre er 50.6cm, median er 52.3cm og øvre er 53.7cm. Den procentdel af børnene der har højst 48cm i længde er vha. Maple:

sumkurve(*M*, 48)

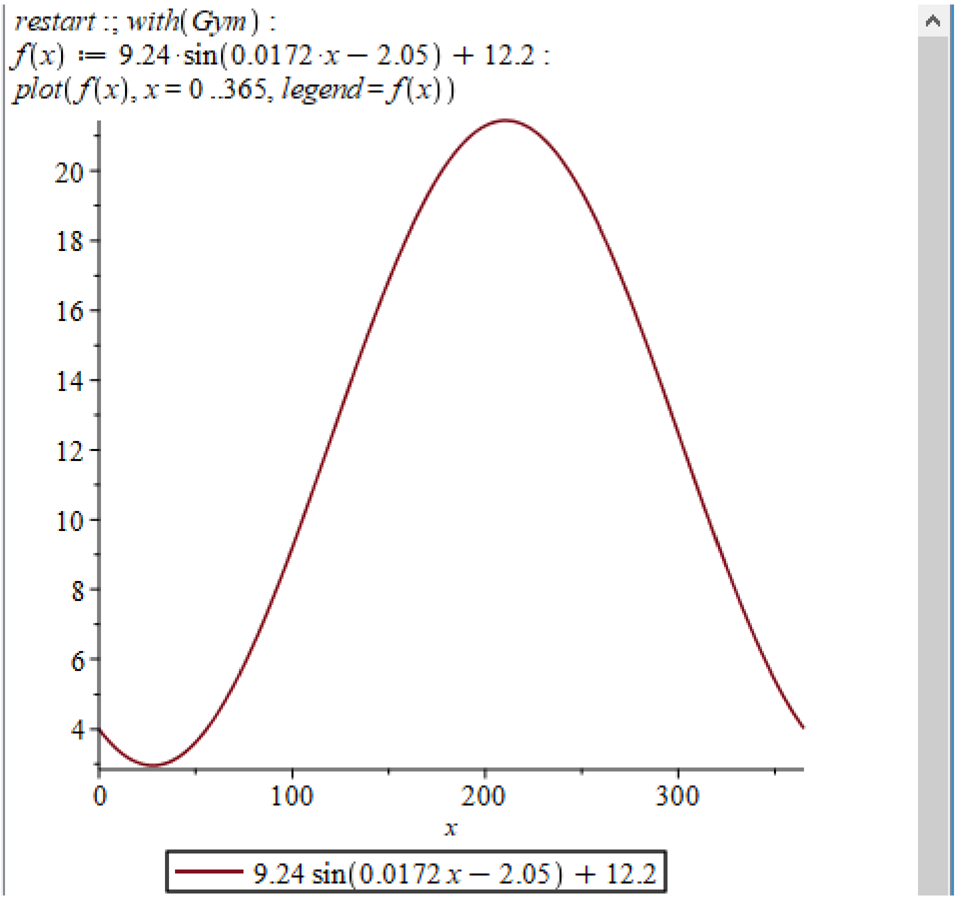
0.108336190871519 **(3)**

Dvs. 10.83% af børnene har en højde på 48cm. Man kan også aflæse dette tal ved at se på sin sumkurve.



Opgave 11: [Via Maple]

a) Grafen tegnes i Maple.



Sinus antager sit maksimum i $y = 1$ og minimum i $y = -1$, så

$$Maks = 9.24 \cdot 1 + 12.2 = 21.44$$
$$Min = 9.24 \cdot (-1) + 12.2 = 2.96$$

Temperaturforskel: $21.44^oC - 2.96^oC = 18.48^oC$.

b) Så differentieres funktionen.

$$f'(x) = 9.24 \cdot \cos(0.0172 \cdot x - 2.05) \cdot 0.0172$$

Og indsættes $x = 90$ fås

$$f'(90) = 9.24 \cdot \cos(0.0172 \cdot 90 - 2.05) \cdot 0.0172 = 0.13931$$

Det betyder, at efter 90 dage fra årsskifte stiger temperaturen med 0.14^oC pr. dag.

Opgave 12: [Via Maple]

a) Først løses ligningen $f(x) = 0.2$, så

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Så er

$$M = \int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2+1} - 0.2\,dx = [\arctan(x) - 0.2x]_{-2}^{2}$$
$$= \arctan(2) - 0.2 \cdot 2 - \big(\arctan(-2) - 0.2 \cdot (-2)\big) = 1.4143$$

Som er M.

b) Volumen bestemmes. Først drejes hele $f(x)$ rundt, og dernæst $y = 0.2$, så

$$V = \mathrm{Pi} \cdot \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2 dx - \mathrm{Pi} \cdot \int_{-2}^{2} (0.2)^2\, dx$$

$$V = \pi\left(\arctan(2) + \frac{2}{5}\right) - 0.5026548246 \qquad (1)$$

$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$

$$V = 4.2320 \qquad (2)$$

Opgave 13:

a) Man indsætter 2500 på $M(t)$'s plads, så

$$M'(t) = 123 - 0.06 \cdot 2500 = -27$$

Stegens vægttab pr. døgn er 27g, når den er tørret ind til 2500g.

b) Den fuldstændige løsning til differentialligningen kan findes i en hver tekstbog i matematik A.

$$M(t) = \frac{123}{0.06} + ce^{-0.06t}$$

Den partikulære løsning bestemmes.

$$2650 = \frac{123}{0.06} + ce^{-0.06 \cdot 0} \Leftrightarrow c = 2650 - \frac{123}{0.06} = 600$$

Dermed er

$$M(t) = \frac{123}{0.06} + 600e^{-0.06t}$$

Indsættes $t = 30$ i modellen fås

$$M(30) = \frac{123}{0.06} + 600e^{-0.06 \cdot 30} = 2149.18$$

Så efter 30 dage er stegens vægt faldet til 2149g.

Opgave 14:

a) Grundlinjen $|AC|$ har længde $2y$, hvor halvvejs vil man have y. Det svarer til 2 retvinklede trekanters grundlinjer. Man kan udtrykke h vha. Pythagoras, så

$$h = \sqrt{x^2 - y^2}$$

Arealet af trekanten er

$$T = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$$

Her er $h = \sqrt{x^2 - y^2}$ og $g = 2y$, dermed er

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x^2 - y^2} \cdot 2y = y \cdot \sqrt{x^2 - y^2}$$

Som ønsket.

b) Omkredsen af trekanten ABC er 10, så

$$x + x + 2y = 10 \Leftrightarrow 2y = 10 - 2x \Leftrightarrow y = 5 - x$$

Så indsættes $y = 5 - x$ i arealformlen fra spørgsmål a, så

$$T(x) = (5 - x) \cdot \sqrt{x^2 - (5 - x)^2} = (5 - x) \cdot \sqrt{10x - 25}$$

Dernæst differentieres $T(x)$, og ligningen $T'(x) = 0$ løses. Via produktreglen og kædereglen kan man få den afledede.

$$T'(x) = -1 \cdot \sqrt{10x - 25} + (5 - x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{10x - 25}} \cdot 10$$
$$= \frac{25 - 5x}{\sqrt{10x - 25}} - \sqrt{10x - 25} = \frac{50 - 15x}{\sqrt{10x - 25}}$$

Så løses ligningen $T'(x) = 0$, dvs.

$$\frac{50 - 15x}{\sqrt{10x - 25}} = 0 \Leftrightarrow 50 - 15x = 0 \Leftrightarrow 15x = 50 \Leftrightarrow x = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}$$

Hvor tallet er indenfor intervallet $2.5 < x < 5$, så der laves fortegnsvariation.

$$T'(3) = \frac{50 - 15 \cdot 3}{\sqrt{10 \cdot 3 - 25}} = 2.2361$$
$$T'(4) = \frac{50 - 15 \cdot 4}{\sqrt{10 \cdot 4 - 25}} = -2.5820$$

Dermed er $x = 10/3$ den maksimale værdi, der giver det største areal.

Opgave 15: [Via Maple]

a) Det ses umiddelbart på figuren, at kantlængderne er 2. Det vides, at A, B, C og D er midtpunkter i figuren, dermed er koordinatsættene til hvert af punkterne:

$$A(1;0;0), \qquad B(1;2;0), \qquad C(2;1;2), \qquad D(0;1;2)$$

b) I Maple opstilles to vektorer $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$, så der efterfølgende kan laves krydsprodukt.

$restart :; with(Gym) :$

$\overrightarrow{AB} := \langle 1-1, 2-0, 0-0 \rangle :$

$\overrightarrow{AC} := \langle 2-1, 1-0, 2-0 \rangle :$

Krydsprodukt:

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Arealet af trekanten ABC bestemmes vha. formlen

$$T = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

Så arealet er

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} = 2.236$$

c) Krydsproduktet fra spørgsmål b anvendes til opstilling af en plans ligning for ABC. Dermed er ligningen med udgangspunkt i punktet A:

$$4(x-1) + 0(y-0) - 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow 4x - 4 - 2z = 0$$

En parameterfremstilling for D opstilles, hvor krydsproduktet fra spørgsmål b anvendes. Dermed er

$$\langle x; y; z \rangle = \langle 0; 1; 2 \rangle + t \cdot \langle 4; 0; -2 \rangle$$

Indsættes parameterfremstillingen i planen kan man isolere t.

$$4(4t) - 4 - 2(2 - 2t) = 0 \Leftrightarrow 20t = 8 \Leftrightarrow t = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

Denne værdi af t indsættes i parameterfremstillingen, så man kan få koordinatsættet til projektionen af D på ABC.

$$\langle x; y; z \rangle = \langle 0; 1; 2 \rangle + \frac{2}{5} \cdot \langle 4; 0; -2 \rangle = \langle 8/5; 1; 6/5 \rangle$$

Dvs. koordinatsættet er

$$\left(\frac{8}{5}; 1; \frac{6}{5}\right)$$

Matematik A, STX

07. december 2017

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Udtrykket reduceres.

$$(p+2q)^2 - 2q(q+2p)$$
$$= p^2 + 4q^2 + 4pq - 2q^2 - 4pq$$
$$= p^2 + 2q^2$$

Opgave 2:

a) **Grafen for A**

Denne graf har den mindste værdi af a, idet parablen er langsomt voksende, og dens grene er langt fra hinanden, hver gang man øger y-værdien. Det ses, at parablen skærer y-aksen, hvilket er mindre end de to andre parabler, dermed er den minimale værdi af b for grafen A.

Grafen for B

Denne graf har en a-værdi der er større end a-værdien fra grafen for A, men mindre for grafen for C. Så det er ikke denne graf. Det ses, at b-værdien er større end b-værdien fra grafen for A, så det er heller ikke denne graf.

Grafen for C

Det ses, at a er hurtigt voksende og er større end de foregående a-værdier. Dermed har grafen for C den største a-værdi, men også den største b-værdi da grafen skærer længere oppe af y-aksen.

	Største a-værdi	Mindste b-værdi
A		✓
B		
C	✓	

Opgave 3:

a) Længden $|AB|$ bestemmes vha. Pythagoras.

$$|AB| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

Da trekanterne er ensvinklede, så ses det, at $|BC|$ i trekanten ABC er højden, men grundlinjen i BCD. Så forholdet udregnes.

$$k = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Dermed er $|CD|$, som er højden i trekanten BCD udregnet ved

$$|CD| = \frac{|BC|}{k} = \frac{6}{\frac{4}{3}} = \frac{6 \cdot 3}{4} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} = 4.5$$

Opgave 4:

a) Andengradsligningen løses.

$$(x+3)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+3)^2 = 1 \Leftrightarrow x + 3 = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 - 3$$

Det giver løsningerne $x = -4 \vee x = -2$.

Opgave 5:

a) Omskrives l, er $y = 4 - \frac{4}{3}x$, og m har ligningen $y = cx + d$, så bestemmes c, da man kender $a = -4/3$, så ligningen er

$$-\frac{4}{3} \cdot c = -1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}$$

Og så kan d bestemmes vha. punktet og c, så

$$10 = 8 \cdot \frac{3}{4} + d \Leftrightarrow d = 4$$

Linjerne er $y = 4 - \frac{4}{3}x$ og $y = \frac{3}{4}x + 4$, skæringspunktet findes.

$$4 - \frac{4}{3}x = \frac{3}{4}x + 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}x = \frac{3}{4}x \Leftrightarrow x = 0$$

Og $y = 4$, dermed er koordinatsættet $Q(0; 4)$.

Opgave 6:

a) Tegn på bilaget. Man kan tilnærmelsesvis vælge to punkter $(50; 300)$ og $(90; 700)$, da er

$$N'(90) = \frac{700 - 300}{90 - 50} = 10$$

Så for hvert år efter år 1990, steg antallet af grundskolebørn i verden med 10 mio. Se bilag på sidste side i løsningsamlingen for at se, hvordan dette er blevet gjort.

Løsningsforslag med hjælpemidler

Opgave 7: [Via Maple]

a) Tabellens data indlæses i Maple, og der foretages potensregression.

```
restart :; with(Gym) :
P1 := [11, 19, 32, 44] :
P2 := [1554, 777, 518, 388] :
f(x) := PowReg(P1, P2, x) :
f(x)
```

$$\frac{15478.2282774928}{x^{0.982647316468958}} \tag{1}$$

Dermed fik man - vha. Maple - bestemt tallene a og b, som er hhv.

$$a = 0.982647316468958$$
$$b = 15478.2282774928$$

OBS: Hvis man skriver $f(x) = \frac{b}{x^a}$, så er den angivende a-værdi OK, men hvis man skriver $f(x) = b \cdot x^a$, så skal man anvende et negativt fortegn for a i dette tilfælde. Dvs.

$$f(x) = 15478.2282774928 \cdot x^{-0.982647316468958}$$

b) I Maple løses ligningen $f(x) = 600$.

```
f(x) = 600
```

$$\frac{15478.2282774928}{x^{0.982647316468958}} = 600 \tag{2}$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}} \quad [[x = 27.32103045]] \tag{3}$$

Hvis det årlige forbrug af fjernvarmevand skal være på 600m^3, så skal den gennemsnitlige afkøling af fjernvarmevandet være 27.32^oC.

Opgave 8: [Via Maple]

a) Tangentens ligning ønskes bestemt. Først differentieres $f(x)$. Ved anvendelse af produktreglen og kædereglen får man

$$f'(x) = -(x^2 + x - 11)\text{e}^{-x} + (2x + 1) \cdot \text{e}^{-x}$$

Dernæst udregnes $f(0)$ og $f'(0)$, så

$$f(0) = (0^2 + 0 - 11)\text{e}^{-0} = -11$$
$$f'(0) = -(0^2 + 0 - 11)\text{e}^{-0} + (2 \cdot 0 + 1) \cdot \text{e}^{-0} = 12$$

Så tangenten er

$$\begin{aligned} y &= 12(x - 0) - 11 \\ &= 12x - 11 \end{aligned}$$

I Maple:

```
restart :; with(Gym) :
f(x) := (x^2 + x - 11)·exp(-x) :
y = f'(0)·(x - 0) + f(0)
```

$$y = 12\,x - 11 \tag{1}$$

b) I Maple laves der monotoniforhold. Undervejs bliver den anden afledede anvendt, så den normale vej overlades til læseren.

$restart :; with(Gym) :$

$f(x) := (x^2 + x - 11) \cdot \exp(-x) :$

$f'(x) = 0$

$$(2x + 1)\,e^{-x} - (x^2 + x - 11)\,e^{-x} = 0 \qquad (1)$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 4], [x = -3]] \qquad (2)$$

$f''(-3)$

$$7\,e^3 \qquad (3)$$

Da $7\,e^3 > 0$, så følger det at der er minimum i $x = -3$

$f''(4)$

$$-7\,e^{-4} \qquad (4)$$

Da $-7\,e^{-4} < 0$, så følger det at der er maksimum i $x = 4$

Dermed kan der sluttes, at

- $f(x)$ er aftagende i intervallet $(-\infty; -3] \cup [4; \infty)$
- $f(x)$ er voksende i intervallet $[-3; 4]$.

Opgave 9:

a) Ligningen for cirklen bestemmes ud fra oplysningerne.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Så man får

$$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 8$$

b) Udnytter man vektoren $\vec{r} = \langle 1; 1 \rangle$ og linjens ligning fås

$$1(x - 4) + 1(y - 3) = 0 \Leftrightarrow y = 7 - x$$

Indsættes denne i cirklens ligning fås

$$(x - 4)^2 + \left((7 - x) - 3\right)^2 = 8 \Leftrightarrow (x - 4)^2 + (4 - x)^2 = 8 \Leftrightarrow$$
$$2(x - 4)^2 = 8 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 4 \Leftrightarrow x - 4 = \pm 2 \Leftrightarrow x = 4 \pm 2$$

Så førstekoordinaten til m_1 er $x = 2$ og førstekoordinaten til m_2 er $x = 6$. Man kan finde y-koordinaterne vha. linjens ligning, så

$$y = 7 - 2 = 5$$
$$y = 7 - 6 = 1$$

Dermed er koordinatsættene for m_1 og m_2 hhv.

$$A(2; 5), \qquad B(6; 1)$$

Opgave 10:

a) Taghældningen $\angle B$ udregnes vha. cosinusrelationerne.

$$\angle B = \arccos\left(\frac{4.2^2 + 2.4^2 - 3.9^2}{2 \cdot 4.2 \cdot 2.4}\right) = 66.030^o$$

b) Først bestemmes vinkel C vha. vinkelsummen, så

$$\angle C = 180^o - \angle D - \angle B = 180^o - 58^o - 66.030^o = 55.970^o$$

Dernæst bestemmes $|BD|$ vha. sinusrelationerne.

$$\frac{\sin(55.970)}{|BD|} = \frac{\sin(58)}{2.4} \Leftrightarrow \sin(55.970) \cdot 2.4 = |BD| \cdot \sin(58) \Leftrightarrow$$

$$|BD| = \frac{\sin(55.970) \cdot 2.4}{\sin(58)} = 2.34537$$

Så udregnes $|AD| = 4.2 - 2.34537 = 1.85463$. Vinkel A udregnes vha. sinusrelationerne.

$$\frac{\sin(A)}{2.4} = \frac{\sin(66.030)}{3.9} \Leftrightarrow \sin(A) \cdot 3.9 = 2.4 \cdot \sin(66.030) \Leftrightarrow$$

$$\sin(A) = \frac{2.4 \cdot \sin(66.030)}{3.9} \Leftrightarrow \angle A = \arcsin\left(\frac{2.4 \cdot \sin(66.030)}{3.9}\right) = 34.216^o$$

Så kan $|DE|$ bestemmes vha. anvendelse af tangens.

$$|DE| = \tan(34.216) \cdot 1.85463 = 1.261$$

Dvs. længden $|DE\ |$ er 1.261m.

Opgave 11:

a) Halveringstiden er 2.5 døgn, og man har $b = 25$mg, så a-værdien er fundet ved halveringskonstanten, så

$$2.5 = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\ln(a)} \Leftrightarrow 2.5\ln(a) = -\ln(2) \Leftrightarrow \ln(a) = -\frac{\ln(2)}{2.5} \Leftrightarrow a = \mathrm{e}^{-\frac{\ln(2)}{2.5}}$$

Afrundet giver det $a = 0.75786$. Dermed er forskriften

$$f(t) = 25 \cdot 0.75786^t$$

Hvor $f(t)$ beskriver mængden af THC i personens krop til tidspunktet t, målt i døgn efter rygning.

b) Hvis man skal undersøge hvornår personen ikke testes positiv, så løses ligningen $f(t) = 3$, dvs.

$$25 \cdot 0.75786^t = 3 \Leftrightarrow 0.75786^t = \frac{3}{25} \Leftrightarrow t\ln(0.75786) = \ln\left(\frac{3}{25}\right) \Leftrightarrow$$

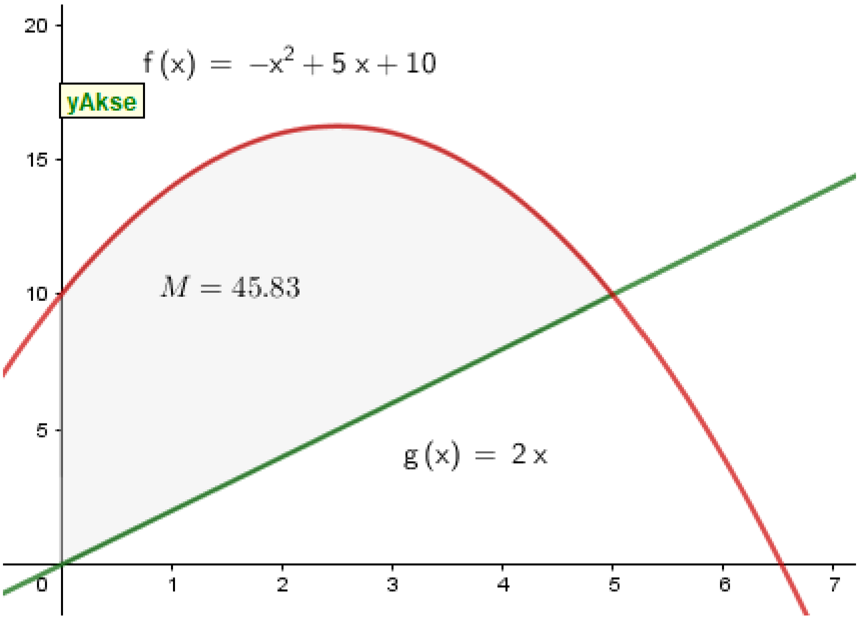
$$t = \frac{\ln\left(\frac{3}{25}\right)}{\ln(0.75786)} = 7.647$$

Så der vil gå ca. lidt over en uge før man ikke bliver testet positiv, hvis man indtager 3mg THC.

Opgave 12: [Via GeoGebra og Maple]

a) Tegn graferne. Anvend kommandoen:

Integral(f(x), g(x), 0, 5)



Så ifølge GeoGebra er arealet af $M = 45.83$, som også kan udregnes i hånden.

Dette kunne også løses via Maple.

$restart:; with(Gym):$

$f(x) := -x^2 + 5x + 10:$

$g(x) := 2x:$

$f(x) = g(x)$

$$-x^2 + 5x + 10 = 2x \quad (1)$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = -2], [x = 5]] \quad (2)$$

$$M = \int_0^5 (f(x) - g(x))\,dx \xrightarrow{\text{at 5 digits}} M = 45.833$$

b) I Maple bestemmes volumen, når funktionerne drejes om førsteaksen.

$$V_M = \text{Pi} \cdot \int_0^5 \left(f(x)^2\right) dx - \text{Pi} \cdot \int_0^5 \left(g(x)^2\right) dx$$

$$V_M = \frac{5125\,\pi}{6} \quad (3)$$

$evalf[5](\%)$

$$V_M = 2683.5 \quad (4)$$

Så ifølge Maple er $V_M = 2683.5$.

Opgave 13: [Via Maple]

a) En mulig nulhypotese:

Der er ingen sammenhæng mellem alderen og holdning til at spise insekter.

I Maple foretages udregningerne. Der opstilles en 2×5 matrix med de observerende værdier.

restart :; *with*(*Gym*) :

$obs := \begin{bmatrix} 12 & 42 & 27 & 43 & 23 \\ 10 & 15 & 5 & 7 & 11 \end{bmatrix}$:

De forventede værdier beregnes ved kommandoen

forventet(*obs*)

$$\begin{bmatrix} 16.585 & 42.969 & 24.123 & 37.692 & 25.631 \\ 5.4154 & 14.031 & 7.8769 & 12.308 & 8.3692 \end{bmatrix} \quad \mathbf{(1)}$$

evalf[2](%)

$$\begin{bmatrix} 17. & 43. & 24. & 38. & 26. \\ 5.4 & 14. & 7.9 & 12. & 8.4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{(2)}$$

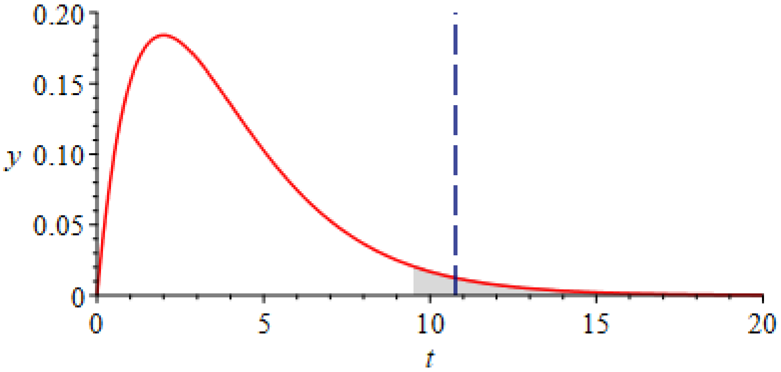
Ligesom i de forrige sæt kan man bestemme de forventede værdier ved formlen

$$forventet = \frac{rækkesum \cdot kolonnesum}{sum\ total}$$

b) Der anvendes nu en statistisk test til udregning af teststørrelsen.

ChiKvadratUtest(*obs*, *level* = 0.05)

χ^2-teststørrelse = 10.765
Frihedsgrader = 4
Kritisk værdi = 9.4877
p-værdi = 0.029340



Da p-værdien er mindre end 5%, så forkastes nulhypotesen. Der er ingen sammenhæng mellem alder og holdning til, om man ville spise insekter.

Opgave 14: [Via Maple]

a) Først opstilles to vektorer $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BC}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \begin{pmatrix} -3-(-4) \\ 1-(-1) \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = \begin{pmatrix} -2-(-3) \\ 1-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Vinklen bestemmes mellem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BC}$.

$$v = \arccos\left(\frac{1\cdot 1 + 2\cdot 0 + (-1)\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2+(-2)^2}}\right) = 56.789^o$$

Der søges efter en stump vinkel, så

$$w = 180 - v = 180^o - 56.789^o = 123.211^o$$

Som er vinklen mellem de to rørstykker AB og AC.

b) I Maple opstilles en vektor $\overrightarrow{BD}$, så der kan foretages krydsprodukt mellem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{BD}$.

restart :; *with*(*Gym*) :

$\overrightarrow{AB} := \langle 1, 2, -1 \rangle$:

$\overrightarrow{BD} := \langle 0-(-3), 3-1, 0-3 \rangle$:

Så laves krydsprodukt

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BD}$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \textbf{(1)}$$

Anvendes D som fast punkt er planens ligning

$$-4(x-0) + 0(y-3) - 4(z-0) = 0 \Leftrightarrow -4x - 4z = 0 \Leftrightarrow x + z = 0$$

Alle koordinater testes for at se, om de alle ligger i planen.

$$-4 + 4 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$
$$-3 + 3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$
$$-2 + 1 = 0 \Rightarrow -1 \neq 0$$
$$0 + 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Så det ses, at hele smeltevandsledningen ikke ligger i planen, da det går galt ved punktet C.

Opgave 15: [Via Maple]

a) Stegens indre temperatur udtrykt ved x og A svarer til at løse differentialligningen

$$T'(x) = 0.0045 \cdot \big(A - T(x)\big)$$

Dette sker i Maple.

$restart :; with(Gym) :$
$dsolve(\{T'(x) = 0.0045 \cdot (A - T(x)), T(0) = 12\}, T(x))$

$$T(x) = A + e^{-\frac{9\,x}{2000}}(12 - A) \qquad \textbf{(1)}$$

Dermed er stegens indre temperatur udtrykt ved x og A.

b) Her løses en ligning for t, når $T(x) = 62$ og $A = 80$, så

$$62 = 80 + \mathrm{e}^{-\frac{9x}{2000}}(12 - 80) \Leftrightarrow 18 = 68\mathrm{e}^{-\frac{9x}{2000}} \Leftrightarrow \frac{9}{34} = \mathrm{e}^{-\frac{9x}{2000}} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(\frac{9}{34}\right) = -\frac{9x}{2000} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{9}{34}\right) = -\frac{9x}{2000} \Leftrightarrow x = -\frac{2000\ln\left(\frac{9}{34}\right)}{9}$$

Afrundet giver det $x = 295.35$, så der vil gå 295.35 før ovntemperaturen er 80^oC og stegens indre temperatur er 62^oC.

c) Her løses en ligning for A, når $T(x) = 62$ og $x = 120$, så

$$62 = A + \mathrm{e}^{-\frac{9\cdot 120}{2000}}(12 - A) \Leftrightarrow 62 = A - A\mathrm{e}^{-\frac{27}{50}} + 12\mathrm{e}^{-\frac{27}{50}} \Leftrightarrow$$

$$62 - 12\mathrm{e}^{-\frac{27}{50}} = A - A\mathrm{e}^{-\frac{27}{50}} \Leftrightarrow 62 - 12\mathrm{e}^{-\frac{27}{50}} = A\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{27}{50}}\right) \Leftrightarrow$$

$$A = \frac{62 - 12\mathrm{e}^{-\frac{27}{50}}}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{27}{50}}}$$

Afrundet giver det $A = 131.83$, så temperaturen skal sættes på 132^oC før stegens indre temperatur er 62^oC på 120 minutter.

Opgave 6: Bilag