INFORMATION!

Før du anvender løsningerne, så husk at læs betingelserne for løsningerne, som du kan finde på hjemmesiden, eller her:
http://matematikhfsvar.page.tl/%26%238226%3B-Betingelser-matematik-A.htm

Matematik A HHX 4. juni 2012
Løsningsforslag
www.matematikhfsvar.page.tl

De første 6 opgaver løses **uden** hjælpemidler

Opgave 1

På baggrund af tabellen, kan forskriften bestemmes.

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{600-500}{40-20}=\frac{100}{20}=\frac{10}{2}=5$$

$b=y_1-a\cdot x_1=500-5\cdot 20=500-100=400$

Hermed er forskriften

$s(x)=5\,x+400$

Alternativt kunne man løse et ligningssystem.

$600=40\cdot a+b$

$500=20\cdot a+b$

Trækker man ligningerne fra hinanden fås

$600-500=40\cdot a-20\cdot a+b-b \Leftrightarrow 100=20\,a \Leftrightarrow a=5$

$500=20\cdot 5+b \Leftrightarrow 500-20\cdot 5=b \Leftrightarrow b=400.$

Opgave 2

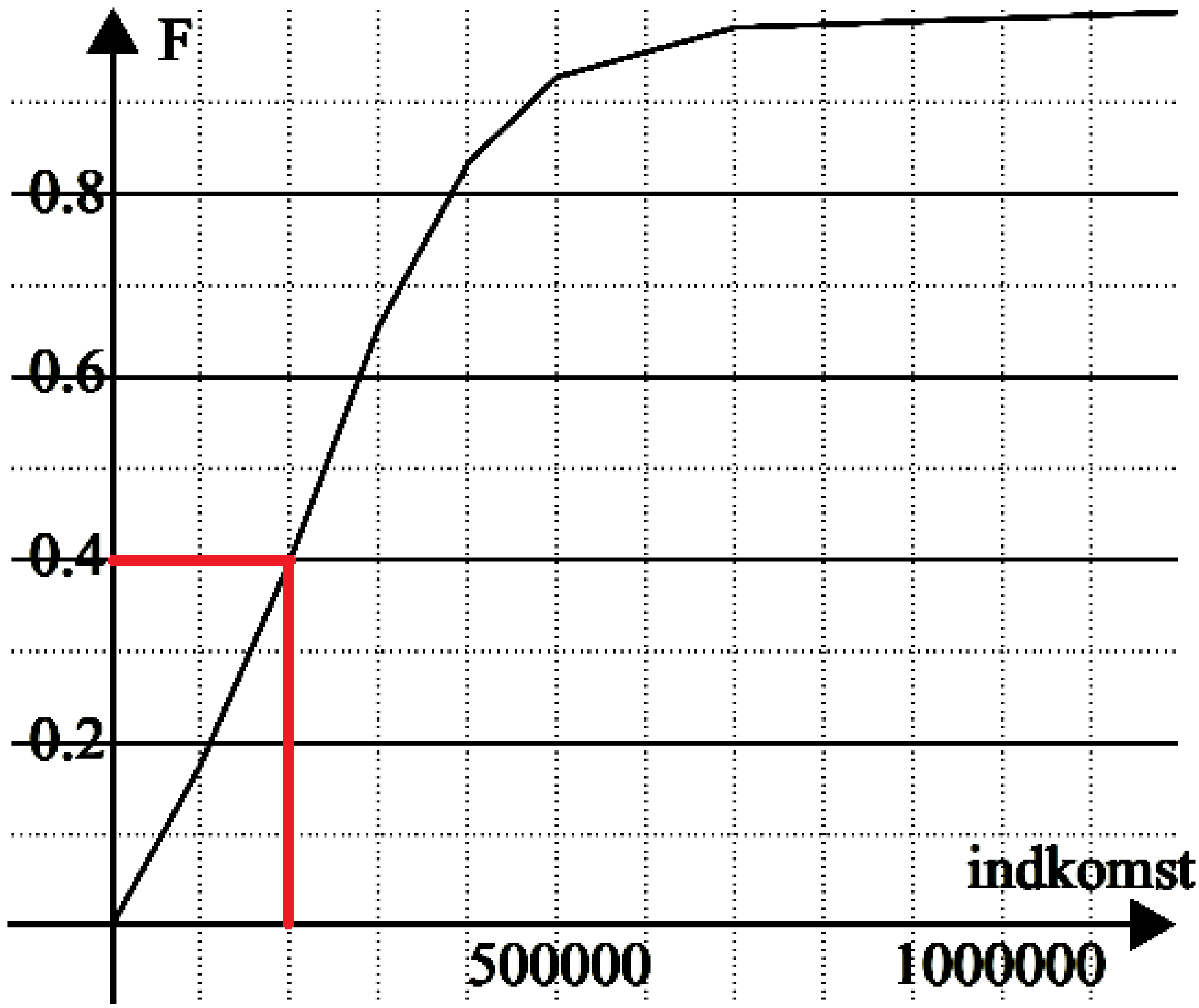
Hvis vektorerne skal være ortogonale $(\vec{a}\perp\vec{b})$, så skal skalarproduktet være $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$,
Så er:

$6\cdot t+3\cdot 2=0 \Leftrightarrow 6\,t+6=0 \Leftrightarrow t=-1.$

Opgave 3

75% fraktilen (øvre kvartil) siger, at 75% af befolkningen får en indkomst på 354 529.60kr, eller mindre.

(Er man så indehaver af opgavesættet i pdf, så vil man have det svært ved at se på grafen, men det er så utydeligt, men det kan godt aflæses.)



Så man ser, at det kun er 40% af befolkningen der højst får 200 000kr i indkomst

Opgave 4

Givet $f'(x) = \sqrt{x+7} - x$,

Her er $f'(2) = \sqrt{2+7} - 2 = 3 - 2 = 1$, dvs. hældningen for tangenten til grafen for $f(x)$ i punktet $x = 2$, er 1.

Opgave 5

Integralregning anvendes.

$$Grå = \int_{-1}^{1} (-3x^2 + 3)\,dx = [-x^3 + 3x]_{-1}^{1} = -1^3 + 3\cdot 1 - (-(-1)^3 + 3\cdot(-1)) = -1 + 3 - 1 + 3 = -2 + 6 = 4$$

De resterende opgaver løses **med** hjælpemidler

Opgave 1

restart :; *with*(*Gym*) :

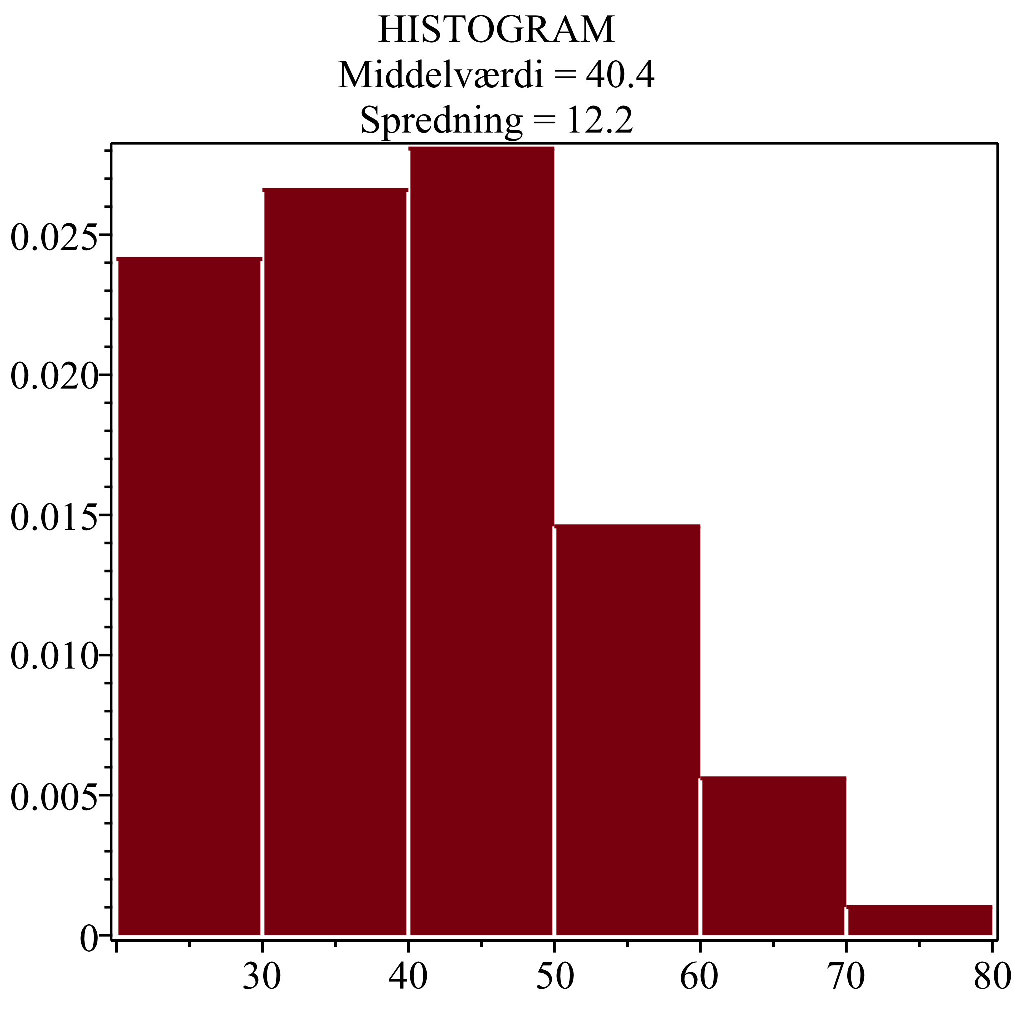
Spgm. a

Oplysningerne defineres i en 6x2 matrix.

$$obs := \begin{bmatrix} 20..30 & 48280 \\ 30..40 & 53207 \\ 40..50 & 56166 \\ 50..60 & 29191 \\ 60..70 & 11200 \\ 70..80 & 2010 \end{bmatrix}:$$

Histogram er også en slags diagram, så

plotHistogram(*obs*)



Spgm. b

I Maple kan man bestemme hele listen, dette kan også gøres pr. håndkraft. Dette overlades så til læseren.

typeinterval(*obs*)

$$[40..50] \quad \textbf{(6.2.1)}$$

$kvartiler(obs)$

$$[30.326, 39.726, 48.645] \quad \textbf{(6.2.2)}$$

$middel(obs)$

$$40.3939436352185 \quad \textbf{(6.2.3)}$$

$varians(obs)$

$$147.942572016098 \quad \textbf{(6.2.4)}$$

$spredning(obs)$

$$12.1631645559903 \quad \textbf{(6.2.5)}$$

Opgave 2

$restart :; with(Gym) :$

Spgm. a

Vektorerne defineres.

$\vec{a} := \langle 1, 3 \rangle$

$$\vec{a} := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.1.1)}$$

$\vec{b} := \langle 1, 1+7 \rangle$

$$\vec{b} := \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.1.2)}$$

Her er

$\vec{a}.\vec{b}$

$$25 \quad \textbf{(7.1.3)}$$

Spgm. b

Kommandoen *vinkel* anvendes

$vinkel(\vec{a}, \vec{b})$

$$11.30993247 \quad \textbf{(7.2.1)}$$

Spgm. c

Vektoren $\vec{b}$ defineres igen

$\vec{b} := \langle t, t+7 \rangle$

$$\vec{b} := \begin{bmatrix} t \\ t+7 \end{bmatrix} \quad \textbf{(7.3.1)}$$

$det(\vec{a}, \vec{b}) = 15$

$$-2\,t + 7 = 15 \quad \textbf{(7.3.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t=-4]] \quad \mathbf{(7.3.3)}$$

$det(\vec{a}, \vec{b}) = -15$

$$-2\,t+7=-15 \quad \mathbf{(7.3.4)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t=11]] \quad \mathbf{(7.3.5)}$$

Så $t=-4$ og $t=11$ giver et areal på 15.

Opgave 3

restart :; *with*(*Gym*) :

Funktionen defineres.

$C(x) := 0.01\cdot x^3 - 1.02\cdot x^2 + 40\cdot x$

$$C := x \mapsto 0.01\,x^3 - 1.02\,x^2 + 40\,x \quad \mathbf{(8.1)}$$

Her er $x > 0$.

Spgm. a

Indsæt $x=50$

$C(50)$

$$700.00 \quad \mathbf{(8.1.1)}$$

Så er omkostningerne 700

Spgm. b

Her løses

$C''(x) = 0$

$$0.06\,x - 2.04 = 0 \quad \mathbf{(8.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x=34.]] \quad \mathbf{(8.2.2)}$$

Så de minimale omkostninger fås ved $x=34$.

Opgave 4

restart :; *with*(*Gym*) :

$f(x) := -x^2 + 3\,x + 2$

$$f := x \mapsto -x^2 + 3\,x + 2 \quad \mathbf{(9.1)}$$

Her er $1 \le x \le 3$.

Spgm. a

Området er:

$A = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$

$$A = \frac{22}{3} \quad \mathbf{(9.1.1)}$$

Spgm. b

Området B bestemmes.

$$\int_0^1 (4x)\,dx + \int_1^3 f(x)\,dx - \int_2^3 (2x-4)\,dx$$

$$\frac{25}{3} \tag{9.2.1}$$

Opgave 5

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Renten bestemmes således:

$$12000 = \frac{491 \cdot \left(1 - (1+r)^{-36}\right)}{r}$$

$$12000 = \frac{491 - \frac{491}{(1+r)^{36}}}{r} \tag{10.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$0.02264196788 \tag{10.1.2}$$

$\% \cdot 100$

$$2.264196788 \tag{10.1.3}$$

Dermed er renten $r = 2.2642\ \%$ pr. måned.

Spgm. b

Her anvendes formlen for restgæld:

$$R_{16} = 12000 \cdot (1 + 0.02264196788)^{16} - 491 \cdot \frac{(1 + 0.02264196788)^{16} - 1}{0.02264196788}$$

$$R_{16} = 7827.568684 \tag{10.2.1}$$

Opgave 6

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Linje 1: $f'(x)$ sættes lig nul.

Linje 2: e^{-x} faktoriseres ud, da e^{-x} indgår i begge led.

Linje 3: Nulreglen anvendes.

Linje 4: Kun $x = -1$ løser ligningen, da $e^{-x} = 0$ er udefineret.

Spgm. b

Vi bestemmer den dobbelte afledede af $f(x)$, så

$f''(x) = -x\,e^{-x}$

Og indsætter $x = -1$.

$f''(-1) = -(-1) \cdot e^{-(-1)} = e$

Da tallet er positivt, så har vi minimum. Dermed er $f(x)$ aftagende i intervallet $-]\infty; -1]$ og voksende i intervallet $[-1; \infty[$.

Opgave 7

restart :; *with*(*Gym*) :

Spgm. a

Givet

$P(x, y) := -0.25 \cdot x^2 + 30 \cdot x - y^2 + 170 \cdot y - 6500$

$$P := (x, y) \mapsto -0.25\, x^2 + 30\, x - y^2 + 170\, y - 6500 \qquad \textbf{(12.1.1)}$$

$P(x, y) = 1525$

$$-0.25\, x^2 + 30\, x - y^2 + 170\, y - 6500 = 1525 \qquad \textbf{(12.1.2)}$$

Omskrives til en ligning for ellipsen.

$-0.25\, x^2 + 30\, x - y^2 + 170\, y - 6500 = 1525 \Leftrightarrow$

$-4 \cdot \left(-0.25\, x^2 + 30\, x - y^2 + 170\, y - 6500\right) = -4 \cdot 1525 \Leftrightarrow$

$x^2 + 4\, y^2 - 120\, x - 680\, y + 26000 = -6100 \Leftrightarrow$

$x^2 + 4\, y^2 - 120\, x - 680\, y = -6100 - 26000 \Leftrightarrow$

$x^2 + 4\, y^2 - 120\, x - 680\, y = -32100 \Leftrightarrow$

$(x - 60)^2 - 3600 + 4(y - 85)^2 - 28900 = -32100 \Leftrightarrow$

$(x - 60)^2 + 4(y - 85)^2 = -32100 + 28900 + 3600$

$(x - 60)^2 + 4(y - 85)^2 = 400 \Leftrightarrow$

$\frac{(x - 60)^2}{400} + \frac{(y - 85)^2}{100} = 1$

Hermed har vi fået ellipsen.

Spgm. b

Heri indsættes uligheden i $P(x, y)$ på y, så

$x + y \leq 100$

$$x + y \leq 100 \qquad \textbf{(12.2.1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for y}}$

$$[[y \leq 100 - x]] \qquad \textbf{(12.2.2)}$$

En alternativ forskrift opstilles.

$AP(x) := -0.25 \cdot x^2 + 30 \cdot x - (100 - x)^2 + 170 \cdot (100 - x) - 6500$

$$AP := x \mapsto -0.25\, x^2 - 140\, x - (100 - x)^2 + 10500 \qquad \textbf{(12.2.3)}$$

$AP'(x) = 0$

$$-2.50\, x + 60 = 0 \qquad \textbf{(12.2.4)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 24.]] \qquad \textbf{(12.2.5)}$$

$AP''(24)$

$$-2.50 \qquad \textbf{(12.2.6)}$$

Tallet er negativt, hvilket vil sige, at $x = 24$ er maksimal, så er

$y \leq 100 - 24$

$$y \leq 76 \qquad \textbf{(12.2.7)}$$

Så der skal være $x = 24$ og $y = 76$.

Spgm. c

$p(x) := -0.25 \cdot x + 35$

$$p := x \mapsto -0.25\,x + 35 \tag{12.3.1}$$

$q(y) := -y + 215$

$$q := y \mapsto -y + 215 \tag{12.3.2}$$

$p(24)$

$$29.00 \tag{12.3.3}$$

$q(76)$

$$139 \tag{12.3.4}$$

Så der skal være $x = 29$ og $y = 139$ når man har $p(x)$ og $q(y)$ med.

Opgave 8A

$restart$:; $with(Gym)$:

$f(x) := x^3 + 3\,x^2 - 10\,x$

$$f := x \mapsto x^3 + 3\,x^2 - 10\,x \tag{13.1}$$

Spgm. a

Nulpunkter:

$f(x) = 0$

$$x^3 + 3\,x^2 - 10\,x = 0 \tag{13.1.1}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 0], [x = 2], [x = -5]] \tag{13.1.2}$$

Fortegnsvariation:

$f(-6); f(-3); f(1); f(3)$

$$-48$$
$$30$$
$$-6$$
$$24 \tag{13.1.3}$$

Så $f(x)$ er negativ i intervallet $]-\infty;-5[$ og $]0:2[$

$f(x)$ er positiv i intervallet $]-5;0[$ og $]2;\infty[$

Monotoniforhold:

$f'(x) = 0$

$$3\,x^2 + 6\,x - 10 = 0 \tag{13.1.4}$$

$\xrightarrow{\text{solve}}$

$$-3.081665999, 1.081665999 \tag{13.1.5}$$

$f''(-3.081665999)$

$$-12.48999599 \tag{13.1.6}$$

$f''(1.081665999)$

$$12.48999599 \tag{13.1.7}$$

Her er

$f(x)$ voksende i intervallet $]-\infty;-3.081]$ og $[1.081;\infty[$

$f(x)$ er aftagende i intervallet $[-3.081; 1.081]$.

Ekstrema:

Maksimum i $x=-3.081$ med maksimumspunkt

$f(-3.081665999)$

$$30.04110533 \quad (13.1.8)$$

Minimum i $x = 1.081$ med minimumspunkt

$f(1.081665999)$

$$-6.041105330 \quad (13.1.9)$$

Krumningsforhold:

$f''(x) = 0 \xrightarrow{\text{solve for x}} [[x = -1]]$

Konkav i intervallet $]-\infty;-1[$ og konveks i intervallet $]-1;\infty[$.

Spgm. b

Da hældningen er -1, så løser man ligningen

$f'(x) = -1$

$$3x^2 + 6x - 10 = -1 \quad (13.2.1)$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 1], [x = -3]] \quad (13.2.2)$$

Her ser vi, at -3 er givet, så røringspunktet for den anden tangent er $(1, -6)$.

Da :

$f(1)$

$$-6 \quad (13.2.3)$$

Opgave 8B

restart :; *with*(*Gym*) :

$f(x, y) := 75x + 100y$:

Spgm. a

Her anvendes hjørnemetoden.

Vi tester flg. punkter:

$(20, 50)$

$(80, 20)$

$(0, 70)$

$(160, 0)$

Og indsætter i forskriften.

$f(20, 50)$

$$6500 \quad (14.1.1)$$

$f(80, 20)$

$$8000 \quad (14.1.2)$$

$f(0, 70)$

$$7000 \quad (14.1.3)$$

$f(160, 0)$

$$12000 \quad (14.1.4)$$

Vi ser, at det første punkt giver en minimal, når $x = 20$ og $y = 50$.

Spgm. b

Vi skriver funktionen igen, uden $a = 75$, så

$f(x, y) := a \cdot x + 100 \cdot y$

$$f := (x, y) \mapsto a\,x + 100\,y \quad (14.2.1)$$

$f(20, 50) \leq f(0, 70)$

$$20\,a \leq 2000 \qquad \textbf{(14.2.2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for a}}$

$$[[a \leq 100]] \qquad \textbf{(14.2.3)}$$

$f(20, 50) \leq f(80, 20)$

$$20\,a \leq 80\,a - 3000 \qquad \textbf{(14.2.4)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for a}}$

$$[[50 \leq a]] \qquad \textbf{(14.2.5)}$$

$50 \leq a \leq 100$, så koefficienten skal være i mellem 50 og 100, begge inkluderet.