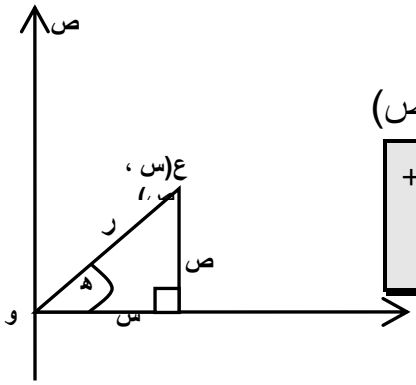
تم التحميل من مدونة ملخصات الثانوية العامة في اليمن
http://ye-thirdsecondr.blogspot.com

0 الصورة القطبية (المثلثية) للعدد المركب



(أ) مقياس (طول) العدد المركب:

إذا كان: ع = (س + ت ص)

فإن: مقياس ع = | ع | = ر = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$

(ب) زاوية أو سعة العدد (ع):

∵ سعة ع = هـ ± 2ك π : ك ∈ ص

(ج) كتابة العدد ع = (س + ت ص) بالصورة القطبية

من الرسم نلاحظ

(1) جتاهـ = $\frac{\text{س}}{\text{ر}}$ ⇐ س = ر جتاهـ

(2) جاهـ = $\frac{\text{ص}}{\text{ر}}$ ⇐ ص = ر جاهـ

∴ ع = س + ت ص = ر جتاهـ + ر ت جاهـ

ع = ر (جتاهـ + ت جاهـ) = [ر ، هـ] 0

مثال: أوجد مقياس وسعة العدد ع = 1 + $\sqrt{3}$ ت

الحل

∵ س = 1 ، ص = $\sqrt{3}$

∴ ر = $\sqrt{\text{س}^2 + \text{ص}^2}$ = $\sqrt{3+1}$ = $\sqrt{4}$ = 2

تعيين (هـ):

∵ جتاهـ = $\frac{س}{ر}$ = $\frac{1}{2}$ ، جاهـ = $\frac{ص}{ر}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∵ جتاهـ > 0 ، جاهـ > 0 ∴ هـ تقع في الربع الأول

∴ هـ = 60° ∴ ع = [ر ، هـ] = [2 ، 60° [

مثـــال: أكتب بالصورة القطبيـة كلاً من:

(1) ع = $-3+3\sqrt{3}$ت (2) ع = $\sqrt{3}-$ت

(3) ع = $-3-$ت (4) ع = $5+5\sqrt{3}$ت

الحـــل

(1) ر = $\sqrt{9+9}$ = $\sqrt{18}$ = $3\sqrt{2}$

تعيين (هـ)

∵ جتاهـ = $\frac{س}{ر}$ = $\frac{-3}{2\sqrt{3}}$ = $\frac{-1}{2}$ ∵ جاهـ = $\frac{ص}{ر}$ = $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ = $\frac{1}{2}$

∵ جتاهـ < 0 ، جاهـ > 0 ∴ هـ تقع في الربع الثاني.

∴ هـ = $-45^\circ+180^\circ \Leftarrow$ هـ = 135° ∴ ع = [$3\sqrt{2}$ ، 135°]

(2) س= $\sqrt{3}$ ، ص = -1 ر=$\sqrt{1+3}$ ⇐ ر = 2

∴ جتاهـ = $\frac{س}{ر}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، جاهـ = $\frac{ص}{ر}$ = $\frac{-1}{2}$

∵ جتاهـ > 0 ، جاهـ < 0 ∴ هـ تقع في الربع الرابع.

∴ هـ = $-30^\circ+360^\circ \Leftarrow$ هـ = 330°

∴ ع = [ر ، هـ] = [2 ، 330°]

(3) س= − 3 ، ص= −1

∴ ر = $\sqrt{1+3}$ = 2 ∴ جتاه = $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ ، جا ه = $\frac{-1}{2}$

∴ ه تقع في الربع الثالث. جاه < 0 ، جتاه: 0>

∴ ه = 30° + 180° = 210° ∴ ع = [2 ، 210°]

(4) س= 5 ، ص = 5 $\sqrt{3}$

∴ ر = $\sqrt{25 + 75}$ = $\sqrt{100}$ = 10 ∴ جتاه = $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

∴ ه تقع في الربع الأول. ∴ ه = 60° جاه = $\frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ ع = [10، 60°]

مثـال: أكتب بالصورة القطبية لكل الأعداد التالية:

(1) $ع_1$ = 3 (2) $ع_2$ = −3

(3) $ع_3$ = 3ت (4) $ع_4$ = −3ت

الحـل

[1] س = 3 ، ص = 0

∴ ر = $\sqrt{9+0}$ = 3 ∴ جتاه = $\frac{س}{ر} = \frac{3}{3}$ = 1

∴ جاه = $\frac{ص}{ر} = \frac{0}{3}$ = 0 ∴ ه = 0°

∴ $ع_1$ = [ر ، ه] = [3 ، 0°]

نلاحظ:

∴

العـدد	طولـه	زاويتـه	ملاحظـات

3	3	0°	حقيقي موجب
-3	3	π	حقيقي سالب
3 ت	3	90°	تخيلي موجب
-3 ت	3	270°	تخيلي سالب

مثــال: أكتب العدد ع $= \frac{1+\sqrt{3}\,ت}{2-\sqrt{3}\,ت}$:

(1) بالصورة الجبرية. (2) بالصورة القطبية.

الحــل

[1]

$\because$ ع $= \frac{1+\sqrt{3}\,ت}{2-\sqrt{3}\,ت} \times \frac{2+\sqrt{3}\,ت}{2+\sqrt{3}\,ت}$ $\because$ ع $= \frac{-14+7ت+6\sqrt{3}+ت\sqrt{3}}{13}$

$\therefore$ ع $= \frac{-13+13ت\sqrt{3}}{13} = (-\sqrt{3}+ت)$ $\therefore$ الصورة الجبرية هي ع$=(-\sqrt{3}+ت)$

[2] $\because$ س $= -\sqrt{3}$ ، ص $= 1$ $\therefore$ ر $= \sqrt{3+1} = 2$

$\because$ جتاه $= \frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\because$ جاه $= \frac{1}{2}$ $\therefore$ ه تقع في الربع الثاني.

$\therefore$ ه $= -30 + 180^\circ \Leftarrow$ ه $= 150^\circ$ $\therefore$ ع $=$ [ر ، ه] $=$ [2 ، 150°]

مثــال: أكتب بالصورة الجبرية كلاً من:

(1) $ع_1 = 6$ (جتا $30^\circ + ت$ جا 30°) (2) $ع_2 =$ [4 ، 120°]

الحــل

(1) $ع_1 = 6 (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} ت) = (3 + 3\sqrt{3}ت)$

(2) $ع_2 = 4$ (جتا$120^\circ + ت$ جا 120°)

$= 4\ (-\text{جتا}60^\circ + \text{ت جا}\ 60^\circ)$

$= 4\ (-\frac{1}{2} + \text{ت}\frac{\sqrt{3}}{2}) = (-2 + 2\sqrt{3}\ \text{ت})$

مثـــال: أوجد الصورة المثلثية والجبرية لكل الأعداد التالية:

(أ) عدد مقياسه = $3\sqrt{2}$ وسعته = $\frac{5\pi}{4}$

(ب) عدد مقياسه = $\sqrt{5}$ وسعته = هـ : ظا هـ = $\frac{1}{2}$

: هـ $\in$ $]0\ ،\ \frac{\pi}{2}[$

الحـــل

(أ) (1) الصورة المثلثية = $3\sqrt{2}\ (\text{جتا}\frac{5\pi}{4} + \text{ت جا}\frac{5\pi}{4})$

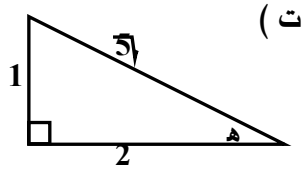
(2) الصورة الجبرية = $3\sqrt{2}\ (\text{جتا}\ 225^\circ + \text{ت جا}\ 225^\circ)$

$= 3\sqrt{2}\ (-\frac{1}{\sqrt{2}} - \text{ت}\frac{1}{\sqrt{2}}) = (-3 - 3\text{ت})$

(ب) (1) الصورة المثلثية: $= \sqrt{5}\ (\text{جتاهـ} + \text{ت جاهـ})$

(2) الصورة الجبرية $= \sqrt{5}\ (\frac{2}{\sqrt{5}} + \text{ت}\frac{1}{\sqrt{5}})$

$= (2 + \text{ت})$



*ملحوظـة تهمـك:

1) جتا (أ ± ب) = جتا أ جتا ب ∓ جا أ جا ب

2) جا (أ ± ب) = جا أ جتا ب ± جتا أ جا ب

3) $\text{جا}^2\text{هـ} + \text{جتا}^2\text{هـ} = 1$

❖ خـواص الصـورة القطبيـة (المثلثيـة):

(1) مقياس وسعة حاصل ضرب عددين مركبين.

إذا كان ع$_1$ = [ر$_1$ ، هـ$_1$] ، ع$_2$ = [ر$_2$ ، هـ$_2$]

فبرهـن أن:

$ع_1 \cdot ع_2 = [ر_1 \cdot ر_2 \ ، \ هـ_1 + هـ_2]$

البرهـــان:

$\because ع_1 = ر_1 (جتا هـ_1 + ت جا هـ_1) \quad ، \quad ع_2 = ر_2(جتا هـ_2 + ت جا هـ_2)$

$\therefore ع_1 . ع_2 = ر_1(جتا هـ_1 + ت جاهـ_1) \ . \quad ر_2(جتا هـ_2 + ت جا هـ_2)$

$= ر_1 ر_2 [جتاهـ_1 جتاهـ_2 + ت جتاهـ_1 جاهـ_2 + ت جاهـ_1 جتاهـ_2 - جاهـ_1 جاهـ_2]$

$= ر_1 ر_2 [(جتاهـ_1 . جتاهـ_2 - جاهـ_1 جاهـ_2) + ت (جتاهـ_1 جاهـ_2 + جتاهـ_1 جاهـ_2)]$

$= ر_1 ر_2 [جتا (هـ_1 + هـ_2) + ت جا (هـ_1 + هـ_2)]$

$= [ر_1 ر_2 \ ، \ هـ_1 + هـ_2]$

(2) مقياس وسعة خارج قسمة عددين مركبيـــن:

إذا كان $ع_1 = [ر_1 \ ، \ هـ_1] \quad ، \quad ع_2 = [ر_2 \ ، \ هـ_2]$

فبرهن أن: $\frac{ع_1}{ع_2} = [\frac{ر_1}{ر_1} \ ، \ هـ_1 - هـ_2]$

البرهـــان:

$$\frac{ع_1}{ع_2} = \frac{ر_1 (جتاهـ_1 + ت جا هـ_1)}{ر_2 (جتاهـ_2 + ت جا هـ_2)} \times \frac{(جتاهـ_2 - ت جا هـ_2)}{(جتاهـ_2 - ت جا هـ_2)}$$

$$= \frac{ر_1(جتاهـ_1 جتاهـ_2 - ت جتاهـ_1 جاهـ_2 + ت جاهـ_1 جتاهـ_2 + جاهـ_1 جاهـ_2)}{ر_2 (جتا^2 هـ_2 + ت جا^2 هـ_2)}$$

$= \frac{ر_1}{ر_2} [(جتا هـ_1 جتاهـ_2 + جاهـ_1 جاهـ_2) + ت (جتا هـ_1 جاهـ_2 + جاهـ_1 جتاهـ_2)]$

$= \frac{ر_1}{ر_2} [جتا (هـ_1 - هـ_2) + ت جا (هـ_1 - هـ_2)]$

$= [\frac{ر_1}{ر_1} \ ، \ هـ_1 - هـ_2]$

(3) مقياس وسعـة مرافـق عدد مركـب:

إذا كان ع= [ر ، هـ] فبرهـن أن: $\bar{ع}$ = [ر ، - هـ]

البرهـــان:

∵ ع = ر (جتاه + ت جاه)

∴ $\bar{ع}$ = ر (جتا ه − ت جاه) = ر (جتا− ه + ت جا − ه)

∴ $\bar{ع}$ = [ر ، − ه]

(4) مقياس وسعــة مقلوب العدد ع

إذا كان ع = [ر ، ه] فبرهن أن: $\frac{1}{ع}$ = [$\frac{1}{ر}$ ، − ه]

البرهـــان:

$$\frac{1}{ع} = \frac{1}{ر(\text{جتاه} + ت\ \text{جا}\ ه)} = \frac{1}{ر(\text{جتاه} + ت\ \text{جا}\ ه)} \times \frac{\text{جتاه} - ت\ \text{جا}\ ه}{\text{جتاه} - ت\ \text{جا}\ ه}$$

$$= \frac{(\text{جتاه} - ت\ \text{جا}\ ه)}{ر(\text{جتا}^2 ه + \text{جا}^2 ه)} \qquad : \text{جتا}^2 ه + \text{جا}^2 ه = 1$$

∴ $\frac{1}{ع} = \frac{1}{ر}$ (جتاه− ت جا ه(= $\frac{1}{ر}$ (جتا − ه + ت جا − ه(= [$\frac{1}{ر}$ ، − ه]

مثـــال: إذا كان $ع_1$ = [6،70°] ، $ع_2$ = [3 ، 50°]

أوجد: (1) $ع_1$ ▪ $ع_2$ (2) $\frac{ع_1}{ع_2}$ (3) $\bar{ع_1}$

(4) $\frac{1}{ع_2}$ (5) $2-ع_1$ (6) $\frac{ت}{ع_1}$

الحـــل:

(1) $ع_1$ ▪ $ع_2$ = [18 ،120°] (2) $\frac{ع_1}{ع_2}$ = $\frac{[6،70°]}{[3،50°]}$ = [2 ، 20°]

(3) $\bar{ع_1}$ = [6 ، −70°] (4) $\frac{1}{ع_2}$ = [$\frac{1}{3}$ ، −50°]

(5) $2 - ع_1$ = − 2 × [6 ، 70°] = [2 ، π] . [6 ، 70°] = [12، 250°]

(6) $\frac{ت}{ع_1}$ = $\frac{[1،90°]}{[6،70°]}$ = [$\frac{1}{6}$ ، 20°]

مثـــال: إذا كان $ع_1$ = (1+ ت) ، $ع_2$ = [2،5 ، 22°]

أوجد بالصورة القطبية كلاً من:

(1) $ع_1 \cdot ع_2$ (2) $\frac{ع_2}{ع_1}$

(3) $\overline{ع_1}$ (4) $ع_2^2$

الحـــل:

∵ $ع_1 = 1 + ت$ ∴ س = 1 ، ص = 1

∴ ر = $\sqrt{1+1}$ ⇐ ر = $\sqrt{2}$

∵ جتاه = $\frac{س}{ر} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، ∵ جاه = $\frac{ص}{ر} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ ه تقع في الربع الأول. ∴ ه = 45°

∴ $ع_1$ = [$\sqrt{2}$ ، 45°]

(1) $ع_1 \cdot ع_2$ = [10، 67°] (2) $\frac{ع_2}{ع_1}$ = [5 ، -23°]

(3) $\overline{ع_1}$ = [$\sqrt{2}$ ، -45°] (4) $ع_2^2$ = [50 ، 44°]

مثـــال: إذا علمت أن ع = [2 ، ه] أوجد بالصورة القطبية كلاً من:

(1) $\overline{ع}$ (2) $-ع$ (3) $\frac{1}{ع}$

(4) $\frac{1}{\overline{ع}}$ (5) $\frac{3ت}{\overline{ع}}$

الحـــل:

(1) $\overline{ع}$ = [2، $-ه$]

(2) $-ع$ = -1 [2 ، ه] = [1، π] . [2 ، ه] = [2 ، π + ه]

(3) $\frac{1}{ع} = \frac{1}{2}$ [، $-ه$] (4) $\frac{1}{\overline{ع}} = \frac{1}{2}$ [، ه]

(5) $\frac{[3 ، \frac{\pi}{2}]}{[2 ، -ه]} = [\frac{3}{2} ، \frac{\pi}{2} + ه]$

مثـــال: إذا كان ع = [5 ، ه]

: هـ ∈] π ، $\frac{3\pi}{2}$ [، ظا هـ = $\frac{3}{4}$ أوجد بالصورة القطبية والجبرية كل من:

(1) $\bar{ع}^2$ (2) $\frac{1}{\bar{ع}}$

الحل

∵ ع = 5 (جتا هـ + ت جا هـ) = 5 (− $\frac{4}{5}$ − $\frac{3}{5}$ ت)

= (−4 − 3ت)

[1] $\bar{ع}^2$ بالشكل المثلثي = [5 (جتاهـ − ت جاهـ)]^2 = 25 (جتا 2 هـ − ت جا2هـ)

∴ $\bar{ع}^2$ بالشكل الجبري = (−4 + 3ت)^2 = 16 − 24 ت − 9

= (7 − 24 ت)

[1] $\frac{1}{ع}$ بالشكل المثلثي = $\frac{1}{5}$ (جتاهـ + ت جاهـ)

$\frac{1}{ع}$ بالشكل الجبري = $\frac{1}{-4+3\text{ت}} \times \frac{-4-3\text{ت}}{-4-3\text{ت}}$ = $\frac{-4-3\text{ت}}{9+16}$ = $\left(\frac{3}{9} - \frac{4-}{25}\right)$ ت

مثـال: أوجد المقياس والسعة لكل من:

(1) 4 (جتا30° + ت جا 30°) (3) 2 (جتا هـ − ت جا هـ)

(3) 5 (جا 20° + ت جتا20°) (4) 3− (جتا هـ + ت جا هـ)

(5) 2 (جتا 30° + ت جا 30°) × 5 (جتا 40° − ت جا40°)

(6) 10 (جتا300° − ت جا300°) ÷ 5 (جا300° − ت جتا300°)

الحل

(1) ر = 4 ، هـ = 30°

(2) = 2 (جتا − هـ + ت جا − هـ) ∴ ر = 2 ، (السعة(= − − هـ

(3) = 5 (جتا70° + ت جا 70°) ∴ ر = 5 ، هـ = 70°

(4) = [3 ، π] . [1 ، هـ] = [3 ، π + هـ]

∴ ر = 3 ، سعة = π + هـ

(5) = [2، 30°] × 5 (جتا−40° + ت جا − 40°)

= [2 ، 30°] × [5 ، −40°] = [10 ، −10°]

(6) = 10 (جتا60° − ت جا −60°) ÷ 5 (− جا60° − ت جتا60°)

[10 ، 60°] ÷ −5 (جا60° + ت جتا 60°)

= [10 ، 60°] ÷ [5، π] (جتا30° + ت جا30°)

= [10 ، 60°] ÷ [5 ، 210°]

= [2 ، −150°]

مثـــال: إذا كان ع = −8 ت أوجد بالصورة القطبية كلاً من:

(1) −ع (2) $\bar{ع}$ (3) $\frac{1}{ع}$ (4) $\frac{1}{\bar{ع}}$

الحـــل

∵ ع = [8 ، $\frac{\pi 3}{2}$] ∴ (1) − ع = −1 × [8 ، $\frac{\pi 3}{2}$]

= [1 ، π] . [8، $\frac{\pi 3}{2}$] = [8 ، $\frac{\pi 3}{2}$ + π] = [8 ، $\frac{\pi 5}{2}$]

(2) $\bar{ع}$ = [8 ، $\frac{\pi 3-}{2}$] (3) $\frac{1}{ع}$ = [$\frac{1}{8}$ ، $\frac{\pi 3-}{2}$]

(4) $\frac{1}{\bar{ع}}$ = [$\frac{1}{8}$ ، $\frac{\pi 3}{2}$]

مثـــال: قارن بين سعة العددين (1+ ت) ، 7 (1+ ت)

الحـــل

∵ ع$_1$ = 1 + ت

∴ ر$_1$ = 1 + 1 = 2

جتاه$_1$ = $\frac{1}{2}$ ، جاه$_1$ = $\frac{1}{2}$

∵ ع$_2$ = 7 (1+ ت)

س = 7 ، ص = 7

ر $_2$ = 49+49 =98 = 7 2

∴ $هـ_1$ = [45°]

∴ جتاه= $\frac{1}{2}$ ، جاه= $\frac{1}{2}$

∴ $هـ_2$=45° ∴السعة مستاوية

حل تمارين ومسائل (1 - 4)

1 محلول كمثال.

2 أكتب كلاً مما يلي من الأعداد المركبة في الصورة القطبية (المثلثية).

(أ) $-2 + 2$ت (ب) ت $(1 + $ت$)$ (ج) جا60° + ت جتا 60°

(د) $\frac{1 - \text{ت}}{1 + \text{ت}}$ (هـ) $\frac{8}{-1 - 3\text{ت}}$ (و) $(1 + $ت$)(1 - $ت$)$

(ز) $2(1 + $ت$)$ (ح) $-4\sqrt{3}$ ت (ط) $\frac{2 + 5\text{ت}}{-5 - 2\text{ت}}$

الحل

(أ) س $= -2$ ، ص $= 2$ ، ر $= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

جتاه $= \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، جاه $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ ه في الربع الثاني. ∴ ه $= 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

∴ $-2+2$ت $= 2\sqrt{2}$(جتا135° + ت جا135°) $= [2\sqrt{2}, 135^\circ]$

(ب) ت $(1 + $ت$)$ = ت$+$ ت^2 $= -1 +$ ت

س $= -1$ ، ص $= 1$

ر $= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

جتا ه $= \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، جا ه $= \frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ ه في الربع الثاني ∴ ه $= 135^\circ$

ت $(1 + $ت$)$ $= [\sqrt{2}, 135^\circ]$

(جـ) جا60° + ت جتا60°

= جتا $(90^\circ - 60^\circ)$ + ت جا $(90^\circ - 60^\circ)$

= (جتا30° + ت جا30°) = [1 ، 30°]

(د) $\frac{-1+ت}{1+ت} = \frac{-1+ت}{1+ت} \times \frac{-1+ت}{-1+ت} = \frac{-2+1-ت}{2} = -ت$

= [1 ، 270°]

(هـ) $= \frac{8}{-1+\sqrt{3}ت} = \frac{8(1+3ت)}{4} = \frac{1+\sqrt{3}ت}{1+\sqrt{3}ت} \times 2 = 2(1+\sqrt{3}ت) = 2+2\sqrt{3}ت$

س= 2 ، ص = $2\sqrt{3}$

ر = $\sqrt{4+12} = 4$

جتاه = $\frac{1}{2}$ ، جاه = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴ ه في الربع الأول. ∴ ه = 60°

∴ $\frac{8}{-1+3ت} = [4 ، 60°]$

(و) (1+ت) (1−ت) = 1+1 = 2 حقيقي صرف

2 = [2 ، 0°]

والباقي بنفس الطريقة.

---

3 أكتب الأعداد المركبة الآتية بالصورة الجبرية:

(أ) $2(جتا120° + ت جا120°)$ (ب) $3(جتا\frac{\pi}{2} + ت جتا\frac{\pi}{2})$

(جـ) $(جتا\pi + ت جا\pi)$ (د) $جا240° + ت جتا240°$

(هـ) $2\sqrt{3}(جتا60° + ت جا60°)$ (و) $[2 ، \frac{5\pi}{4}]$

الحـــل

أ) ع = 2 (جتا (180−60°) + ت جا (180−60°))

$= 2(-جتا60° + ت جا 60°) = 2(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}ت) = -1 + \sqrt{3}ت$

ب) ع = 3 (0 + ت × 1) = 3 ت جـ(ع = (−1 + ت ×0) = −1

د) ع = (جا180° +60°)+ ت جتا(180° +60°) = جا 60^5 – ت جتا60^5

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$ ت

هـ) ع = $2\sqrt{3}$ ($\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ت) = $\sqrt{3}$ + 3ت

و) ع = $\sqrt{2}$ (جتا ($\frac{\pi}{4} + \pi$) + ت جا ($\frac{\pi}{4} + \pi$)

$= \sqrt{2}$ (− جا $\frac{\pi}{4}$ − ت جا $\frac{\pi}{4}$) = $\sqrt{2}$ ($\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ت) = − 1− ت

---

4 أوجـد كـلاً من – ع ، $\bar{ع}$ ، $\frac{1}{ع}$ ، $\frac{1}{\bar{ع}}$ بالصـورة القطبيـة:

(أ) ع = 2 (جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت $\frac{\pi}{3}$) (ب) ع = −3 + ت

(جـ(ع = −2 2 ت (د) ع = −8 ت

الحـــل

أ) ع = [2 ، $\frac{\pi}{3}$] ∴ − ع = −1 × [2 ، $\frac{\pi}{3}$]

= [1 ، π] × [2 ، $\frac{\pi}{3}$]

= [2 ، $\frac{4\pi}{3}$]

$\bar{ع}$ = [2 ، $-\frac{\pi}{3}$] ، $\frac{1}{ع}$ = [$\frac{1}{2}$ ، $-\frac{\pi}{3}$]

= $\frac{1}{\bar{ع}}$ = [$\frac{1}{2}$ ، $\frac{\pi}{3}$]

ب) نحول− $\sqrt{3}$ + ت أولاً للصورة القطبية:

− $\sqrt{3}$ + ت = [2 ، 150°] ∴ − ع = −1 × [2 ، 150°]

= [2 ، 330°]

$\therefore \bar{ع} = [2 ، -330^\circ] ، ع = \frac{1}{2}[-330^\circ ، \frac{1}{2}] = \frac{1}{\bar{ع}}[330^\circ ، \frac{1}{2}]$

وتُحل باقي المسائل بنفس الطريقة السابقة.

5 أوجد: $(ع_1 \, ع_2 \, 0)$ ، $(ع_1 \div ع_2)$ لكل مما يلي في الصورة القطبية:

(أ) $ع_1 = 2$ (جتا3هـ + ت جا3هـ) ، $ع_2 = 3$(جتا4هـ + ت جا4هـ)

(ب) $ع_1 = 5$ (جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت جا $\frac{\pi}{3}$) ، $ع_2$ (جتا $\frac{\pi}{6}$ + ت جا $\frac{\pi}{6}$)

(جـ) $ع_1 = 12$ (جتا120° + ت جا120°) ، $ع_2 = \frac{3}{4}$ (جتا150° − ت جا150°)

(د) $ع_1 = -3$ ت ، $ع_2 = 4$ (جتا150° + ت جا 150°)

الحـــل

أ) $ع_1 \, ع_2 = 3 \times 2$ [جتا (3 هـ + 4هـ) + ت جا (3هـ+4هـ)]

$= 6$ (جتا 7 هـ + ت جا 7 هـ)

$ع_1 \div ع_2 = \frac{2}{3}$ [جتا(3هـ−4هـ)+ ت جا(3هـ−4هـ)] = $\frac{2}{3}$(جتا−هـ + ت جا−هـ)

ب) $ع_1 \, ع_2 = 2 \times 5$ [جتا ($\frac{\pi}{6}$ + $\frac{\pi}{3}$) + ت جا ($\frac{\pi}{6}$ + $\frac{\pi}{3}$)]

$= 10$ (جتا $\frac{\pi}{2}$ + ت جا $\frac{\pi}{2}$)

$ع_1 \div ع_2 = \frac{5}{2}$ [جتا ($\frac{\pi}{6}$ − $\frac{\pi}{3}$) +ت جا ($\frac{\pi}{6}$ − $\frac{\pi}{3}$)] = $\frac{5}{2}$ (جتا $\frac{\pi}{3}$ + ت جا $\frac{\pi}{3}$)

وتُحل باقي المسائل بنفس الطريقة السابقة.

66 لتكن: أ = (جتا2$هـ_1$ + ت جا2 $هـ_1$) ، (ب = جتا2$هـ_2$ + ت جا2$هـ_2$)

حيث $هـ_1$ ، $هـ_2 \in$]0 ، $\frac{\pi}{2}$ [أثبت أن:

(1) أ + ب = 2 جتا ($هـ_1$ − $هـ_2$) [جتا ($هـ_1$+ $هـ_2$) + ت جا ($هـ_1$ + $هـ_2$)]

(2) $\frac{أ - ب}{أ + ب}$ = ت ظا ($هـ_1$−$هـ_2$).

الحـــل

1) أ + ب = جتا2هـ$_1$ + ت جا2هـ$_1$ + جتا2هـ$_2$ + ت جا2هـ$_2$

= (جتا2هـ$_1$+ جتا2هـ$_2$) + ت (جا2هـ$_1$+جا2هـ$_2$)

= [2جتا (هـ$_1$+هـ$_2$) جتا (هـ$_1$ − هـ$_2$)] + ت [2جا(هـ$_1$ + هـ$_2$) جتا (هـ$_1$−هـ$_2$)]

= 2جتا (هـ$_1$ − هـ$_2$) [جتا (هـ$_1$+ هـ$_2$) + ت جا(هـ$_1$+ هـ[.

2) $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{أ} + \text{ب}} = \frac{\text{(جتا2هـ}_1 + \text{ت جا2 هـ}_1) - \text{(جتا2هـ}_2 + \text{ت جا2 هـ}_2)}{\text{(جتا2هـ}_1 + \text{ت جا2هـ}_1) + \text{(جتا2هـ}_2 + \text{ت جا2هـ}_2)}$

$= \frac{-2\text{جا (هـ}_1+\text{هـ}_2)\text{ جا (هـ}_1-\text{هـ}_2) + 2\text{ت جتا (هـ}_1-\text{هـ}_2)\text{ جا (هـ}_1-\text{هـ}_2)}{2\text{جا (هـ}_1+\text{هـ}_2)\text{ جا (هـ}_1-\text{هـ}_2) + 2\text{ت جتا (هـ}_1-\text{هـ}_2)\text{ جا (هـ}_1-\text{هـ}_2)}$

∴ $\frac{\text{أ} - \text{ب}}{\text{أ} + \text{ب}} = \frac{2\text{جا(هـ}_1-\text{هـ}_2)[-\text{ جا (هـ}_1+\text{هـ}_2)+ \text{ت جتا(هـ}_1+\text{هـ}_2)]}{2\text{جتا(هـ}_1-\text{هـ}_2)[\text{ جتا(هـ}_1+\text{هـ}_2)+ \text{ت جا(هـ}_1+ \text{هـ}_2)]}$

$= \text{ظا (هـ}_1-\text{هـ}_2) \times \frac{[\text{جتا}(\frac{\pi}{2} + \text{هـ}_1+\text{هـ}_2) + \text{ت جا} (\frac{\pi}{2} + \text{هـ}_1+\text{هـ}_2)]}{[\text{جتا (هـ}_1+ \text{هـ}_2) + \text{ت جا (هـ}_1 + \text{هـ}_2)]}$

= ظا (هـ$_1$ − هـ$_2$) [1 ، $\frac{\pi}{2}$ + هـ$_1$ +هـ$_2$ − هـ$_1$ − هـ$_2$]

= ظا (هـ$_1$ − هـ$_2$) [1، $\frac{\pi}{2}$] = ت ظا (هـ$_1$ + هـ$_2$) #

---

67 أكتب العدد المركب $\frac{\text{ت} + 5}{3\text{ت} + 2}$ بالصورة: 1- الجبرية: 2- القطبية:

الحـــل

(1) ع = $\frac{\text{ت} + 5}{3\text{ت} + 2} \times \frac{2 - 3\text{ت}}{2 - 3\text{ت}} = \frac{10 - 15\text{ت} + 2\text{ت} - 3\text{ت}^2}{9 + 4} = \frac{13 - 13\text{ت}}{13}$

∴ ع = 1 − ت وهي الصورة الجبرية.

(2) الصورة القطبية: س = 1 ، ص = −1 ، ر = $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

جتاه = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، جاه = $\frac{-1}{\sqrt{2}}$

∴ ه تقع في الربع الرابع ∴ ه = −45° +360°=315°

ع = [$\sqrt{2}$ ، 315°]

8 محلول كمثال.
9 محلول كمثال.