Ortvay Rudolf verseny megoldások

2018/4. Feladat

Legendák szólnak róla, hogy bizonyos bennszülöttek képesek a bumerángot 100 méter távolságra eldobni úgy, hogy visszatérjen hozzájuk.
Vizsgáljuk meg ennek lehetőségét, egyszerűsítő modellezéssel! Feltételezhetjük, hogy a bumeráng dobásának időtartama alatt a gravitáció elhanyagolható, a bumeráng jó közelítéssel vizszintes síkban mozog, közelítően körpályán.
Fejezzük ki a kör sugarát a dobás paramétereivel, illetve a bumeráng tulajdonságaival! Döntsük el, hogy lehetséges-e a legenda állítása, illetve hogy min múlik ez!

(Gombkötő Ákos)

Szerkesztette: Gombkötő Ákos.
A versenyre beküldött megoldások közül felhasználásra került: -
A megoldást ellenőrizte: -

A bumerángok közül meg kell különböztetnünk a "visszatérő" és "nem visszatérő" bumerángokat. A továbbiakban –a tipikus szóhasználatnak megfelelően– a bumeráng kifejezéssel annak visszatérő típusát jelöljük, ha mást nem mondunk. Megjegyezzük, hogy a nem visszatérő bumerángok készítése nehezebb, mivel a cél az, hogy a röppálya ne térjen el (megfelelő dobás esetén) az egyenestől. [1]

A bumerángok történetéről

A bumerángok széles rétegek képzeletében kötődnek össze az Ausztrál bennszülöttekkel, ám ilyen eszközök szinte minden kontinensen előfordultak. A legrégibb, –durván 25.000 éves– mai napig fennmaradt bumerángot a Lengyelország déli határvidékén lévő Obłazowa barlangban találták.

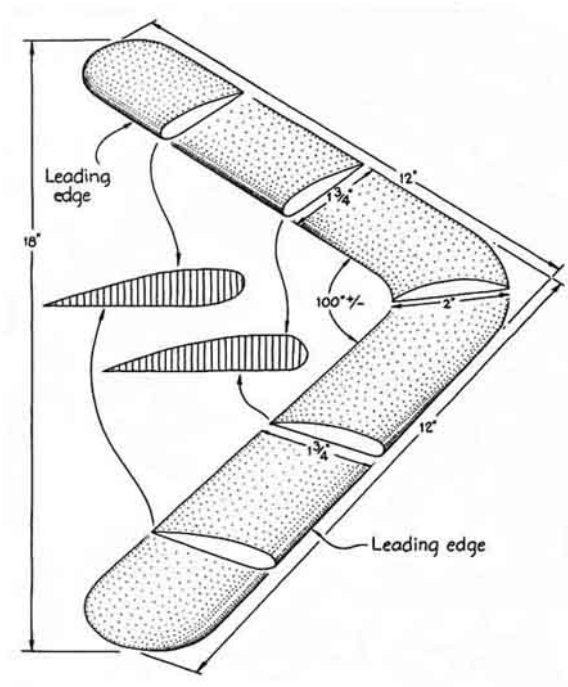
1. ábra. Az Obłazowai bumeráng. Mamutagyarból készült, feltehetően nem visszatérő típusú.

A gallok szintén használtak bumerángokat durván kétezer éve. Ez a tény is mutatja, hogy a bumerángok nem elszigetelt populációk sajátos találmányai, hanem az emberiség egésze által univerzálisan alkalmazott eszköz volt, gyakorlatilag az íjak elterjedéséig.

Mivel a nyílvesszők sokkal kiszámíthatóbb dinamikával rendelkeznek, a gyakorlati célok tekintetében jobb hatásfokú. Pontosan a bonyolultsága révén azonban –nem lebecsülve az íjászatban rejlő érdekességeket– a bumerángok nagyobb *önmagáért való* szellemi értéket képviselnek.

A bumerángokról általában

A bumerángok legalább két karral rendelkeznek, melyek valamilyen szöget zárnak be, és minden kar keresztmetszete szárnyprofil jellegű.



2. ábra. Egy bumeráng szerkezetének szemléltetése.

A bumerángra hat egyrészről a gravitáció, másrészről a bumerángnak a légtérrel való kölcsönhatása: közegellenállás, felhajtóerő, és a szél által kifejtett erő. A lokális felhajtóerő a szárnyprofil alakjától függ, és –bizonyos, elfogadható közelítések mellett– iránya merőleges egyrészről a kar tengelyére, másrészről a bumeráng adott darabjához rendelhető, a levegőhöz viszonyított sebességének a profil hosszirányával párhuzamos irányú $\vec{v_t}$ komponensére. Nagysága közelítően:

$$F_{fel} \approx C_f \rho v_t^2 = C v_t^2,$$

ahol minden komplex, geometriától és orientációtól függő tényezőt a C_f, C együtthatókban egyesítünk. A levegő sűrűségét ρ jelöli.

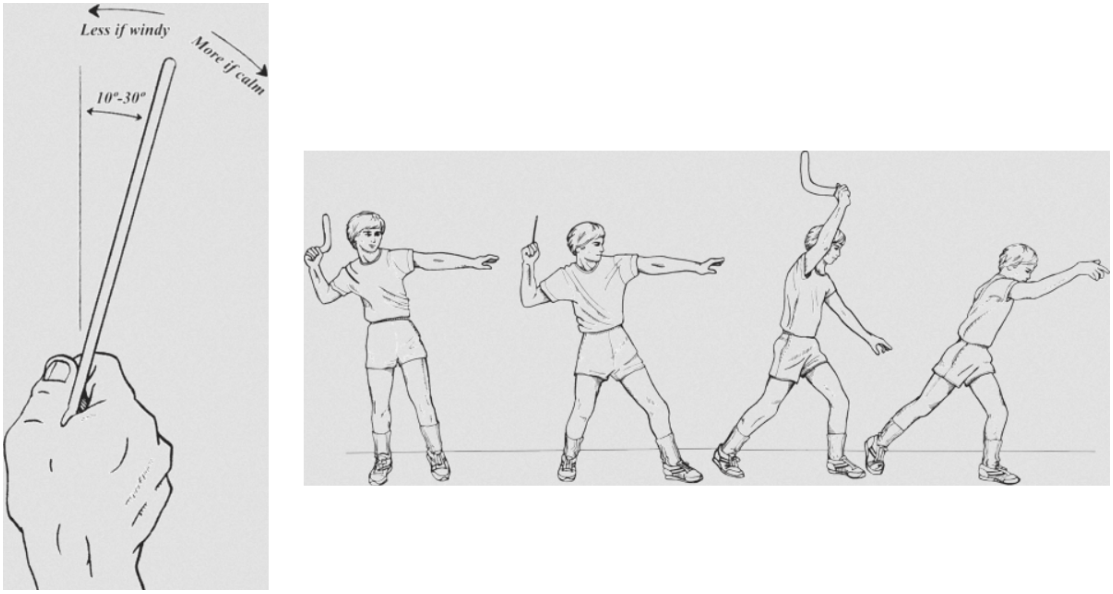
A bumerángok pályája

Nyilvánvalóan a bumerángok pályája roppant sokféle lehet. A bumeráng aerodinamikai tulajdonságain kívül a dobás, illetve a szél erőssége és iránya mind jelentősen befolyásolják a dinamikát.

A tömegközéppont trajektóriája általában nem egyetlen síkban fog elhelyezkedni. Mint általában a merev testek esetén, a tömegközépponti és forgási dinamika csatolt, csak ezek együttes vizsgálatával lehet a teljes dinamikát leírni.

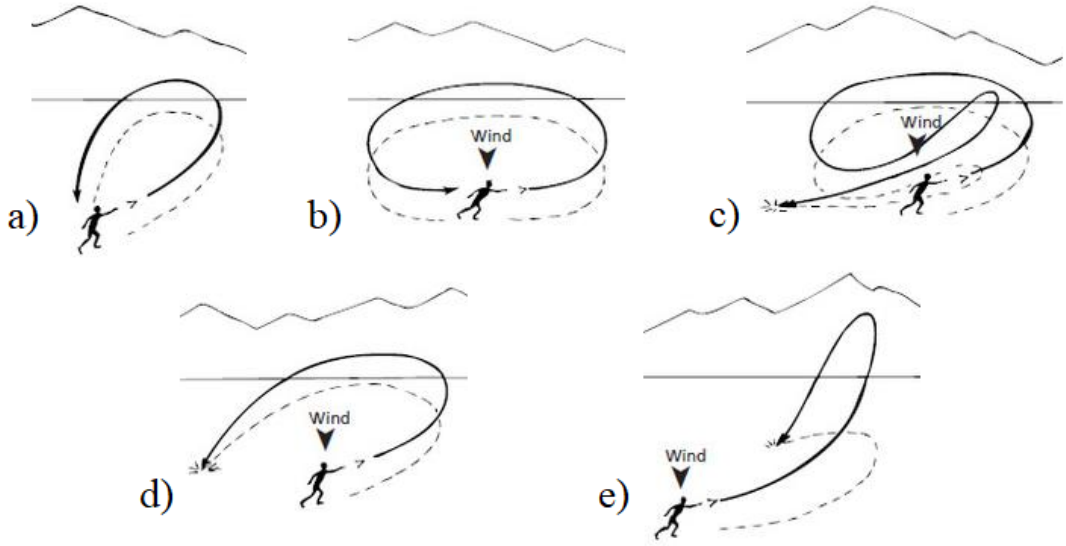
Alább néhány, a dobással kapcsolatos gyakorlati eredményt sorolunk fel.
A bumerángok túlnyomó többségét (tehát eltekintve bizonyos speciális célra készült sportváltozatoktól) úgy szokás dobni, hogy a bumeráng síkja közel függőleges. A dobás során alapvető fontosságú a bumeráng megpörgetése.

A bumeráng trajektóriájának néhány tipikus alakja látható az (4.) ábrán:
a) Kissé elnyújtott pálya, mely tipikus kicsit nagyobb dőlésszögű dobások esetén, szélcsendes időben.



3. ábra. A bumeráng dobásánk sematikus ábrázolása. A dőlésszög tipikusan 10-30 fok. [2]

b) Kör alakú pálya enyhe szélben, kis dőlésszög, és gyöngéd dobás esetén alakul ki.
c) Azonos körülmények között, de túl erős dobás mellett a pálya erősen módosul a visszatérés előtti szakaszon.
d) Túl gyenge dobás esetén a bumeráng azelőtt ér földet, hogy visszatérhetne hozzánk.
e) Túl nagy dőlésszög esetén a pálya függőleges kiterjedése összemérhetővé válik a vizszintessel.

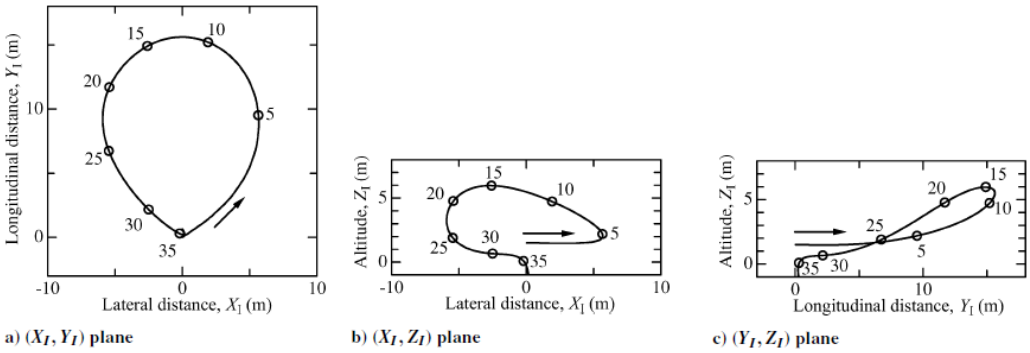


4. ábra. Néhány tipikus pályalak. [2]

Megjegyezzük, hogy a bumerángok súlytalanság állapotában is kvalitatívan azonos pályákat írnak le [1].

A bumeráng modellezése

A bumeráng dinamikájának modellezése a konkrét geometria rögzítése után, pontosan csak numerikusan oldható meg. Ilyen számítások találhatóak kétkarú bumeráng esetén például [3-5]-ben.



5. ábra. Kétkarú bumeráng numerikusan számolt trajektóriájának három vetülete, adott kezdeti feltételek esetén. [3]

Amennyiben a célunk a visszatérő bumeráng hatótávolságának becslése, egyrészről elhanyagolhatjuk a közegellenállást, másrészről élhetünk azzal az egyszerűsítéssel, mely a feladat szövegében is szerepel: hogy a bumeráng jó közelítéssel vizszintes síkban mozog, körpályán.

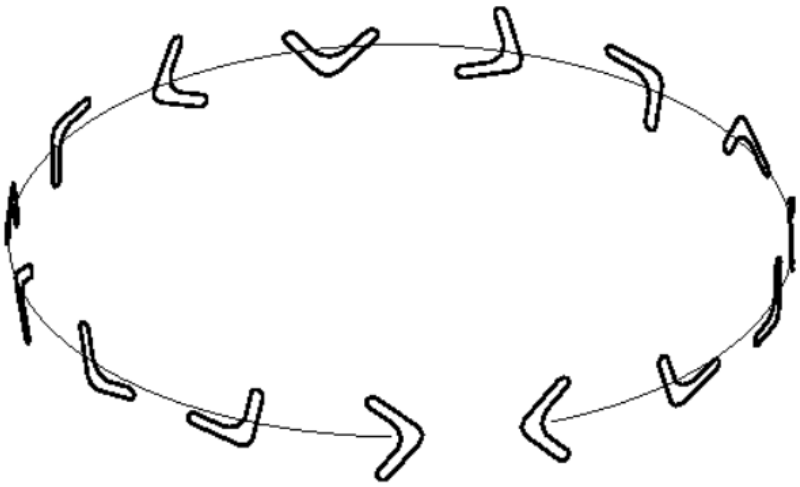
Fizikailag ez a következőt jelenti:

1) A bumerángra ható erők eredőjének, –vagyis a nehézségi erő és a felhajtóerő együttesének– függőleges komponense a trajektórián végig közelítően nulla.

2) Mivel ez függ a bumeráng síkjának dőlésszögétől, következik belőle, hogy a bumeráng dőlésszöge a trajektória mentén nem változik.

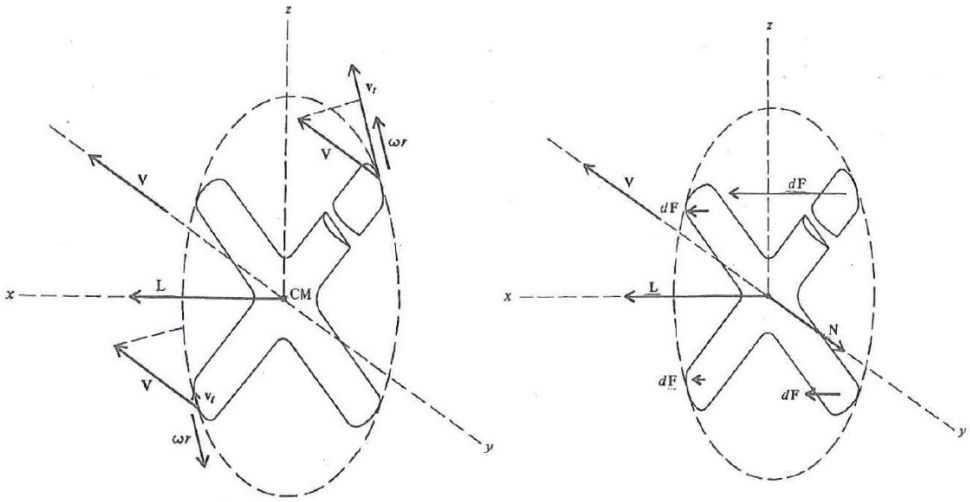
3) A felhajtóerő vizszintes komponense a körpályához szükséges centripetális erőt adja (természetesen a bumeráng síkjának is minden pontban érintenie kell a trajektóriát).

Effektíven tehát, mivel a függőleges irányú erők nem játszanak szerepet, a gravitációt figyelmen kívül hagyhatjuk, miközben a bumeráng síkjának dőlésszögéről feltételezhetjük hogy kicsi. A felhajtóerő vizszintes komponense gyakorlatilag akkora, mintha a dőlésszög nulla lenne.



6. ábra. A bumeráng pályája a modellünkben.

A következőkben az egyszerűség kedvéért négykarú bumerángra vonatkozóan írjuk fel a modell egyenleteit. Vegyük fel a koordináta-rendszerünket a (7). képnek megfelelően. A tömegközéppont sebessége a levegőhöz



7. ábra. Négykarú bumeráng alkotórészeinek sebességei (bal oldal), illetve a rá eső felhajtóerők (jobb oldal). [4]

képest:

$$\vec{V} = -V\vec{e}_y. \tag{1}$$

A bumeráng az x tengely körül forog ω szögsebességgel. A karok azonos l hosszúságúak, egyenként $M/4$ tömegűek. Karokat kvázi-egydimenziós testeknek tekintjük, a kis részeikhez (vagyis kicsi, szárnyprofil alapú hasábokhoz átlagosan) rendelt, tömegközépponthoz viszonyított helyvektorait úgy írjuk fel, mint:

$$\vec{r} = r\big(\vec{e}_y \cos(\omega t + \phi) + \vec{e}_z \sin(\omega t + \phi)\big); \qquad \phi \in (\phi_0, \phi_0 + \pi/2, \phi_0 + \pi, \phi_0 + 3\pi/2) \tag{2}$$

ahol ϕ különböző értékeket vesz fel különböző karoknál. A felhajtóerőt a bumeráng minden pontjában ki kell értékelnünk. Ehhez tudnunk kell, hogy a kis részeihez mekkora, közeghez viszonyított és a szárnyprofil hosszával párhuzamos v_t sebességkomponenst rendelhetünk. A továbbiakban r-el jelöljük a kicsiny résznek a tömegközépponttól való távolságát.

$$|v_t(r, t, \phi)| = \omega r + V \sin(\omega t + \phi) \tag{3}$$

A kis részekre ható felhajtóerő ennek megfelelően:

$$d\vec{F}(r, t, \phi) = \vec{e}_x C v_t^2 dr = \vec{e}_x C\big(\omega^2 r^2 + 2\omega r V \sin(\omega t + \phi) + V^2 \sin^2(\omega t + \phi)\big) dr \tag{4}$$

A négy kar által összesítetten kifejtett felhajtóerő:

$$\vec{F} = \int_0^l \vec{e}_x C\big(4\omega^2 r^2 + 2V^2\big) dr = \vec{e}_x 4Cl\left(\frac{4\omega^2 l^2}{3} + \frac{V^2}{2}\right) \tag{5}$$

Mivel körpályát tételezünk fel, a tömegközépponti dinamikára vonatkozóan teljesülnie kell, hogy:

$$4Cl\left(\frac{\omega^2 l^2}{3} + \frac{V^2}{2}\right) = \frac{mV^2}{R}, \tag{6}$$

ahol R a körpálya sugara. A tömegközépponti dinamika vizsgálata önmagában nem elegendő ahhoz, hogy ezt expliciten ki tudjuk fejezni, viszont a fenti összefüggés fontos annak megállapításához, hogy milyen volna az

optimális dobás a tárgyalt modellben.
Vizsgáljuk meg a forgási dinamikát is. Ehhez ki kell fejeznünk –majd összegeznünk– a kis részekre ható forgatónyomatékokat.

$$d\vec{M}(r,t,\phi) = \vec{r} \times d\vec{F} =$$
$$= r\big(\vec{e}_y \cos(\omega t + \phi) + \vec{e}_z \sin(\omega t + \phi)\big) \times \vec{e}_x C\big(\omega^2 r^2 + 2\omega r V \sin(\omega t + \phi) + V^2 \sin^2(\omega t + \phi)\big) dr =$$
$$= rCdr\big(\vec{e}_y \sin(\omega t + \phi) - \vec{e}_z \cos(\omega t + \phi)\big)\big(\omega^2 r^2 + 2\omega r V \sin(\omega t + \phi) + V^2 \sin^2(\omega t + \phi)\big). \tag{7}$$

A teljes forgatónyomatékban pedig csak az egyik tag nem fog kiesni:

$$\vec{M}(r,t,\phi) = \int_0^l 4Cr^2 V\omega \vec{e}_y dr = \frac{4}{3} CV\omega l^3 \vec{e}_y. \tag{8}$$

Megjegyezzük, hogy tipikus, kétkarú bumerángok esetén mind az erő, mind a forgatónyomaték függeni fog az időtől is. Ez az oszcilláció az egyik oka annak, hogy a bumerángok dinamikája igen összetett lehet.

Tudjuk, hogy a bumerángnak precesszálnia kell, a körbeéréssel azonos periódusidővel:

$$\omega_p = \frac{|\vec{M}|}{|\vec{L}|} = \frac{V}{R}, \tag{9}$$

ahol $\vec{L}$ a bumeráng impulzusmomentuma.

$$\vec{L} = 4\vec{e}_x \frac{m}{4l}\omega \int_0^l r^2 dr = \vec{e}_x \omega \frac{ml^2}{3}$$

A fentiek értelmében, (9) átalakítható:

$$R = \frac{V|\vec{L}|}{|\vec{M}|} = \frac{V\omega m l^2}{4CV\omega l^3} = \frac{m}{4Cl}. \tag{10}$$

Ha ezt az eredményt behelyettesítjük (6) egyenletbe, azt kapjuk hogy:

$$4Cl\left(\frac{\omega^2 l^2}{3} + \frac{V^2}{2}\right) = 4ClV^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{\frac{2}{3}}\omega l = V. \tag{11}$$

Megjegyzés: A modellünkben feltételeztük, hogy a különböző karokra ható aerodinamikai erők függetlenek. Ez a gyakorlatban sohasem teljesül pontosan, egy adott kar által megzavart közeg a következő karra kisebb erővel hathat, emiatt a forgatónyomatékok közül nem fognak a z-irányú tagok kiesni. Ez a kezdeti enyhe dőlésszöget jelentősen befolyásolhatja. Ez az egyik jelentős tényező, amely a vizszintes síkban mozgás idealizációját érvénytelenítheti.

Következtetések

A modellünkből azt a következtetést vonhatjuk le, hogy a bumeráng által megtett pálya sugara nem függ a dobás paramétereitől. A modellünk alapján ugyanakkor a körpálya megtételéhez a dobásnak (a bumeráng sebességének és szögsebességének) megfelelő arányban kell állnia.
Ez megfelel annak a tapasztalati ténynek, hogy a pálya alakja eltérő lesz, ha a dobás például túl erős (vagyis ha V az optimumnál nagyobb).

Az általunk vizsgált egyszerű modell alapján tehát a bumeráng hatótávolsága akkor növelhető, ha:
-A bumeráng tömegét/sűrűségét növeljük.
-A karok hosszát csökkentjük.
-A felhajtóerőt, illetve párhuzamosan a közegellenállást csökkentjük.
-A környező levegő sűrűségét csökkentjük, például alacsonyabb nyomású körülmények között.

Kérdés, hogy a következtetéseink mennyire fogadhatóak el a gyakorlatban. Pontosabb numerikus számolások szerint a dobás paramétereinek megváltoztatása csak csekély mértékben befolyásolja a bumeráng hatótávolságát. Ezek a vizsgálatok természetesen nem fedhetik le az összes lehetőséget.

A gyakorlatban nehéz egy adott bumeráng optimális pályáját megvalósítani. Mindazonáltal elfogadható az az állítás, hogy a hatótávolságot (megfelelő gyakorlat/tehetség megléte esetén) a bumeráng tulajdonságai határozzák meg.
Emiatt ha a legenda szerint egy bennszülött képes volt $R = 50$ méteres sugarú pálya mentén dobni, akkor ugyanazon bumeránggal elvileg bárki más is képes lehet erre. A legtöbb közönséges bumeráng ennek a távolságnak hozzávetőlegesen a feléig dobható el.

Létezik ugyanakkor a visszatérő bumerángoknak egy speciális, kifejezetten nagy távolságokat megtevő osztálya [5]. Ezeket sűrű anyagokból alakítják ki, a lehető legcsekélyebb közegellenállással, és alacsony felhajtóerővel. A hosszú-távú bumerángok alakja manapság igen asszimetrikus, S, vagy ? alakú. A pályájuk rendkívül elnyúlt, és a megfelelő eldobása rendkívül nehéz, egyben drasztikusan különbözik az egyéb bumerángokétól, a dőlésszögnek majdnem 90 fokosnak kell lennie. Ilyen típusú bumerángokkal akár 200 méteres távolság elérése (majd visszatérés) is lehetséges. Ilyen típusok megjelenése a huszadik század eleje óta dokumentált. Hogy hasonló paraméterekkel bíró bumerángot kialakíthattak-e az ausztrál bennszülöttek (vagy más törzsi szerveződésű társadalmak), az megkérdőjelezhető, de teljesen ki nem zárható.

Hivatkozások:

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Boomerang
[2] http://boomerang.org.au/wp/articles/how-to-throw-a-boomerang/
[3] Akira Azuma, Goro Beppu, Hiroaki Ishikawa, Kunio Yasuda: Flight Dynamics of the Boomerang, Part 1: Fundamental Analysis
[4] V. Barger, M. Olsson: Classical mechanics: A modern perspective
[5] https://www.boomerangs.com/pages/throwing-long-distance-boomerangs
[6] Goro Beppu, Hiroaki Ishikawa, Akira Azuma, Kunio Yasuda: Flight Dynamics of the Boomerang, Part 2: Effects of Initial Conditions and Geometrical Configuration
[7] Manuela Battipede: Boomerang Flight Mechanics: Unsteady Effects on Motion Characteristics
[8] Minqi Fu, Xiaohe Jia, Yuxuan Zhan: The Trajectory Simulation of a Boomerang
[9] Yutaka Nishiyama: Why do boomerang come back?
[10] Ernie Esser: What Makes Boomerangs Come Back?