Matematik A

Eksamensopgaven august 2020

Denne pdf-fil indeholder løsningsforslag til eksamenssættet fra august 2020.
Med hjælpemidler: TI-Nspire.

Hentet fra Matematik Universet.

Delprøve 1 - med formelsamling

Opgave 1:

a) Det ubestemte integral bestemmes.

$$\begin{aligned}\int (3x^2+2x+6)\,dx &= 3\cdot\frac{1}{2+1}\cdot x^{2+1}+2\cdot\frac{1}{1+1}\cdot x^{1+1}+6\cdot x+k\\ &= 3\cdot\frac{1}{3}\cdot x^3+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2+6\cdot x+k\\ &= x^3+x^2+6x+k.\end{aligned}$$

Hvor $k\in\mathbb{R}$.

Opgave 2:

a) Funktionsværdien $f(1)$ beregnes.

$$f(1)=(1+2)\cdot e^{1-1}=3\cdot e^0=3\cdot 1=3.$$

Dvs. $f(1)=3$.

b) Ligningen $f(x)=0$ løses vha. nulreglen.

$$\begin{gathered}(x+2)\cdot e^{x-1}=0\\ \Updownarrow\\ x+2=0\vee e^{x-1}=0.\end{gathered}$$

Da $e^{x-1}=0$ ingen løsninger har, eftersom man vil få en logaritme med værdien 0, så følger det at denne del ingen løsninger har. Derimod har $x+2=0$ en løsning, nemlig

$$\begin{gathered}x+2=0\\ \Updownarrow\\ x+2-2=0-2\\ \Updownarrow\\ x=-2.\end{gathered}$$

Dvs. løsningen til $f(x)=0$ er $x=-2$ som blev bestemt vha. nulreglen.

Opgave 3:

a) Fra den generelle teori om svingningsfunktioner, gælder der at

$$f(x)=A\cdot\sin(\omega\cdot x+\varphi)+k.$$

Så derfor er amplituden A for $f(t)$ aflæst til at være

$$A=6.$$

b) Funktionen differentieres.

$$f'(t)=6\pi\cdot\cos(t\cdot\pi)$$

Og $f'(1)=6\pi\cdot\cos(1\cdot\pi)=6\pi\cos(\pi)=6\pi(-1)=-6\pi$.
Dvs. $f'(1)=-6\pi$.

Opgave 4:

a) Forskriften for f er angivet som

$$f(x)=2x+4$$

Med begyndelsesværdi 4 og hældningskoefficient 2. Den omvendte funktion kan bestemmes ved at løse ligningen $f\big(f^{-1}(x)\big)=x$

$$2\cdot f^{-1}(x)+4=x\iff 2\cdot f^{-1}(x)=x-4\iff f^{-1}(x)=\frac{x-4}{2}=\frac{x}{2}-\frac{4}{2}=\frac{x}{2}-2.$$

Den eneste graf der har forskriften $f^{-1}(x)=\frac{x}{2}-2$ er den grønne graf A.

Opgave 5:

a) Linjeelementet i punktet P bestemmes, her bruges formel 181 på s. 30.

$$(x_0, y_0; y_0')$$

Her er

$$y_0' = 0.1 \cdot 6 = 0.6$$

Så linjeelementet i P er beregnet til at være

$$(0,6; 0.6).$$

b) Differentialligningen er en standard type på formen $y' = k \cdot y$, og denne differentialligning har en fuldstændig løsning $y = c \cdot e^{k \cdot x}$ ifølge formelsamlingen s. 29 formel 176.

Oplysningerne fra differentialligningen indsættes i den fuldstændige løsning, så derfor er

$$f(x) = c \cdot e^{0.1 \cdot x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Konstanten c bestemmes vha. punktet P, så man kan finde forskriften for den partikulære løsning.

$$6 = c \cdot e^{0.1 \cdot 0} \iff 6 = c \cdot e^0 \iff c = 6$$

Så konstanten c er beregnet til at være 6, og dermed er den partikulære løsning bestemt til at være

$$f(x) = 6e^{0.1x}.$$

Man må også gerne skrive $f(x) = 6e^{\frac{1}{10} \cdot x}$ eller $f(x) = 6e^{\frac{x}{10}}$...

Opgave 6:

a) Intervallet for de normale udfald bestemmes ved hjælp af formelsamlingen s. 42 ved at betragte figuren. Man kan se, at intervallet er $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$.

Vi får angivet at $\mu = 500g$ og $\sigma = 8g$, så intervallet er

$$[500 - 2 \cdot 8; 500 + 2 \cdot 8] = [484; 516].$$

Med enheder:

$$[500g - 2 \cdot 8g; 500g + 2 \cdot 8g] = [484g; 516g].$$

b) Vi skal beregne sandsynligheden for, at en pakke cornflakes vejer mellem $492g$ og $508g$. Formelsamlingen åbnes og den anden figur under formel 256 på s. 42 anvendes.

Vi ser, at 492 og 508 begge er gode tal, da

$$[500 - 8; 500 + 8] = [492; 508]$$

Og i dette interval har man en sandsynlighed på 68.27% hvis man aflæser figuren. Derfor er

$$P(492 \leq X \leq 508) = 68.27\%$$

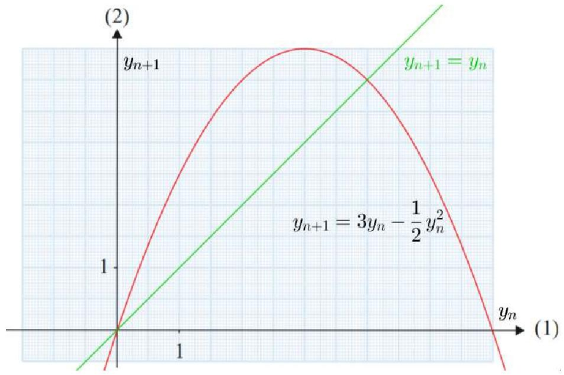
Konklusionen er, at sandsynligheden for, at en pakke cornflakes vejer mellem $492g$ og $508g$ er 68.27%.

Opgave 7: (Differensligninger).

a) Differensligningen er givet ved

$$y_{n+1} = 3y_n - \frac{1}{2}y_n^2, \qquad n = 0,1,2,...$$

Et cobwebdiagram laves og bilaget benyttes til denne opgave. Forberedelsesmaterialets teori s. 13 benyttes.



Da ingen begyndelsesbetingelser er angivet, er ovenstående det ønskede cobwebdiagram.

b) Fikspunkterne bestemmes. Det kræver løsning af ligningen

$$\tilde{y} = g(\tilde{y}).$$

Dvs.

$$\tilde{y} = 3\tilde{y} - \frac{1}{2}\tilde{y}^2.$$

Denne ligning løses.

$$\begin{aligned} &\tilde{y} = 3\tilde{y} - \frac{1}{2}\tilde{y}^2 \iff 2 \cdot \tilde{y} = 2 \cdot \left(3\tilde{y} - \frac{1}{2}\tilde{y}^2\right) \iff 2\tilde{y} = 6\tilde{y} - \tilde{y}^2 \\ &\iff 2\tilde{y} - 2\tilde{y} = 6\tilde{y} - \tilde{y}^2 - 2\tilde{y} \iff 0 = 4\tilde{y} - \tilde{y}^2 \iff \tilde{y}^2 - 4\tilde{y} = 0 \\ &\iff \tilde{y}(\tilde{y} - 4) = 0 \iff \tilde{y} = 0 \vee \tilde{y} - 4 = 0 \iff \tilde{y} = 0 \vee \tilde{y} - 4 + 4 = 0 + 4 \\ &\iff \tilde{y} = 0 \vee \tilde{y} = 4. \end{aligned}$$

Dvs. fikspunkterne til differensligningen er $\tilde{y} = 0 \vee \tilde{y} = 4$.

Nu skal vi afgøre, om hvilken af fikspunkterne der er frastødende. Anvend sætning 4 s. 16 i forberedelsesmaterialet.

$$g(\tilde{y}) = 3\tilde{y} - \frac{1}{2}\tilde{y}^2,$$

Så er

$$g'(\tilde{y}) = 3 - \tilde{y}.$$

Vi indsætter hhv. $\tilde{y} = 0$ og $\tilde{y} = 4$ ind i $g'(\tilde{y})$ og beregner den numeriske værdi.

$$|g'(0)| = |3 - 0| = 3 > 1.$$
$$|g'(4)| = |3 - 4| = |-1| = 1.$$

Dvs. $\tilde{y} = 0$ er ifølge sætningen ustabilt medens $\tilde{y} = 4$ ikke kan afgøres, da $|g'(4)| = 1$ og dermed kan vi ikke på baggrund af $g'(\tilde{y})$ sige noget præcist om opførslen af den talfølge, der er løsning til differensligningen.

Opgave 8:

a) En forskrift er givet ved $f(x) = x^3 - 4x^2 - 12x + 1$. Vi skal vise, at $f'(-1) = -1$. Først differentieres $f(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x - 12.$$

Dernæst beregnes funktionsværdien $f'(-1)$.

$$f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 8 \cdot (-1) - 12 = 3 \cdot 1 + 8 \cdot 1 - 12 = 11 - 12 = -1.$$

Dermed passer det, at $f'(-1) = -1$.

b) Her opstilles ligningen $f'(k) = k$. Forskriften for den afledede funktion genbruges.

$$f'(k) = k \iff 3k^2 - 8k - 12 = k \iff 3k^2 - 9k - 12 = 0$$

Da både 3, 9 og 12 er deleligt med 3, så omskrives ligningen til

$$\frac{3k^2}{3} - \frac{9k}{3} - \frac{12}{3} = \frac{0}{3} \iff k^2 - 3k - 4 = 0.$$

Denne andengradsligning løses for k. Lad $a = 1$, $b = -3$ og $c = -4$ så er diskriminanten

$$\begin{aligned} d = b^2 - 4ac &= (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) \\ &= 9 + 16 \\ &= 25. \end{aligned}$$

Da $d > 0$ så medfører det, at der eksisterer to løsninger til ligningen $k^2 - 3k - 4 = 0$. Dermed er

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

Så den søgte værdi k er $k = 4$ og som opfylder ligningen $f'(k) = k$, dvs. $f'(4) = 4$.

Delprøve 2 - med formelsamling og TI-Nspire

Opgave 9:

Funktionen $\mathbf{f}(x)$ defineres. $\mathbf{f}(x):=\ln(x^2+3)$ ▸ *Udført*

a): Arealet af M bestemmes ved et integral, her er integrationsgrænserne hhv. x=−5 og x=5.

$$A_M = \int_{-5}^{5} \mathbf{f}(x)\, dx \;▸\; 21.8945$$

Dvs. arealet af M er ca. 21.89.

b): Kurvelængden L i samme interval som da arealet blev bestemt, beregnes ved formlen for kurvelængden. Denne findes i formelsamlingen s. 28 formel 171. Funktionen $\mathbf{f}(x)$ differentieres, da den afledede indgår i formlen. $\mathbf{df}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$ ▸ *Udført*. Kurvelængden er:

$$L = \int_{-5}^{5} \sqrt{1+(\mathbf{df}(x))^2}\, dx \;▸\; 11.0119$$

Dvs. kurvelængden er beregnet til at være ca. 11 i intervallet $-5 \le x \le 5$.

Opgave 10:

a): Forskriften for $f(t)$ bestemmes vha. at løse differentialligningen med begyndelsesbetingelsen.

deSolve$(y'=1-0.045\cdot y$ and $y(0)=100,x,y)$ ▸ $y=77.7778\cdot(0.955997)^x+22.2222$

Dvs. $f(t):=77.7778\cdot(0.955997)^t+22.2222$

Forskriften for $f(t)$ er blevet fundet ved løsning af differentialligningen og begyndelsesbetingelsen. Der kan sluttes, at $f(t)$ ▸ $77.7778\cdot(0.955997)^t+22.2222$.

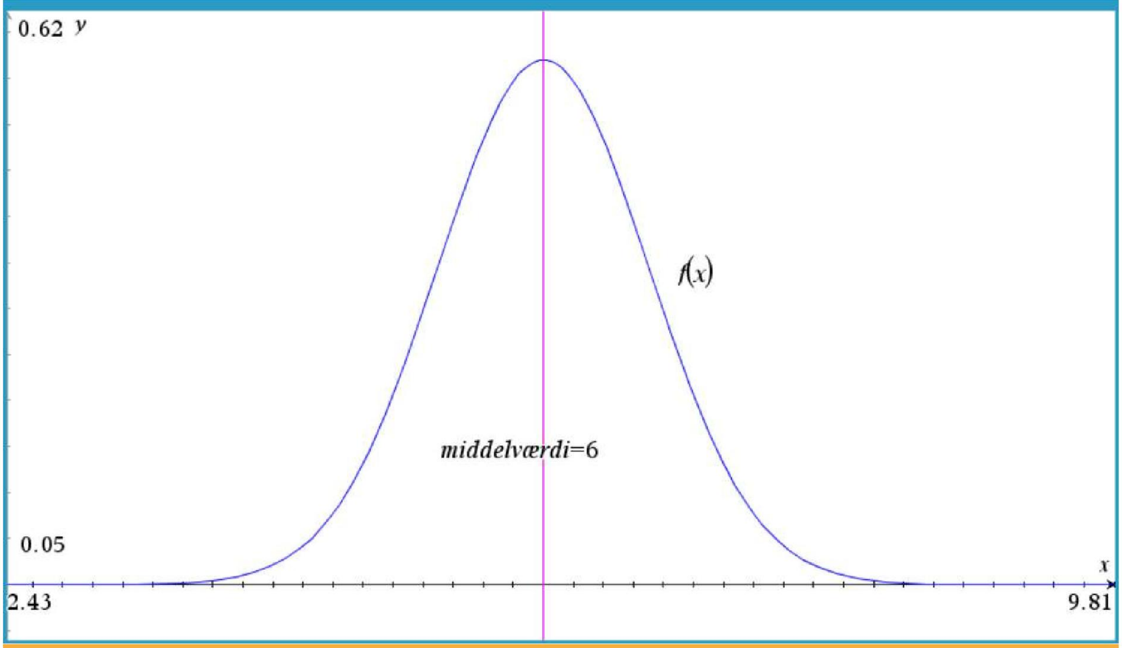
b): Væksthastigheden for suppens temperatur bestemmes ved at se på differentialligningen $y'=1-0.045\cdot y$. Her erstattes y med 50, så

$y'=1-0.045\cdot 50$ ▸ $y'=-1.25$, dvs. når suppens temperatur er 50^oC, aftager temperaturen af suppen med 1.25^oC/min.

Opgave 11:

a): Tæthedsfunktionen defineres. Man får angivet middelværdi 6 og spredning 0.7.

$f(x):=$normPdf$(x,6,0.7)$ ▸ *Udført*. Grafen for $f(x)$ tegnes nedenfor.



b): Integralet beregnes, dvs.

$P(5\leq X\leq 8)=\int_5^8 f(x)\,dx$ ▸ 0.921299, dvs. sandsynligheden for, at den stokastiske variabel X antager værdier mellem 5 og 8, er ca. 92.1%.

(alternativt: $P(5\leq X\leq 8)=$ normCdf$(5,8,6,0.7)$ ▸ 0.921299).

Opgave 12:

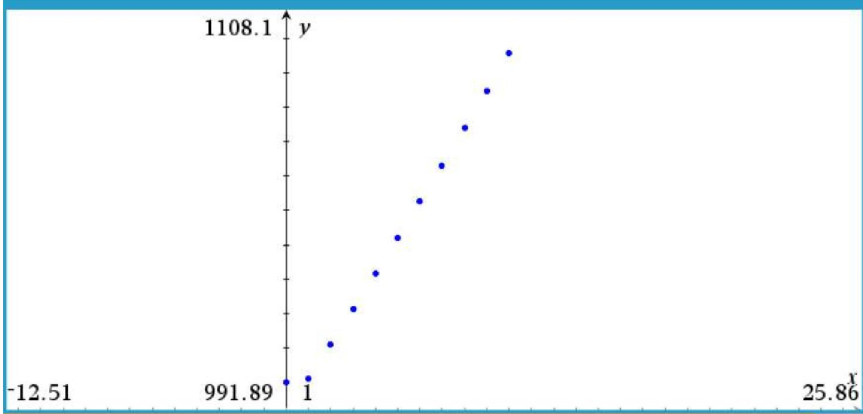
a): Et punktplot tegnes nedenfor. Først indsættes en række data i et regneark. Dernæst plottes det hele vha. faciliteterne i TI−Nspire.

For at få plot frem, indtastes begyndelsesværdierne (rød farve). Dernæst skriver man i celle B3: $=1.02 \cdot b2 - 0.01 \cdot b1$

Når det er indtastet, så trækker man cellen ned, så resten bliver udfyldt og man vil nu have mulighed for at lave punktplot. I grafvinduet åbnes punkt 3 i værktøjsmenuen og dernæst vælges "punktplot". Og nedenfor er det fremkommende plot, som ønsket.

	A n	B y_n
=		
1	0	1000
2	1	1001
3	2	1011.02
4	3	1021.23
5	4	1031.54
6	5	1041.96
7	6	1052.49
8	7	1063.12
9	8	1073.85
10	9	1084.7
11	10	1095.66
12		
13		
14		
15		

A12



b): Nu bestemmes det årstal, når landets bruttonationalprodukt overstiger 1080 mia. kr.

Da differensligninger ikke er kontinuerte funktioner, så afrundes der til det nærmeste hele tal.

Regnearket fra forrige side indhentes her og kan ses til højre. Modellen har ikke noget specifikt begyndelsesår.

Af regnearket kan man se forskellige værdier af "y_n", og specielt ved n=8 og n=9 har man y_n værdier hhv. 1073.85 og 1084.7, og spørgsmålet beder om hvornår landets bruttonationalprodukt overstiger 1080 mia. kr.

Det vil det − ifølge regnearket − gøre 9 år efter man begyndte at måle landets bruttonationalprodukt.

(Man kan bestemme en lukket formel og beregne direkte og få et helt tal, som vil give n=9, men jeg har ikke kunne gøre det i TI−Nspire, men kun i Maple.)

	A n	B y_n
=		
1	0	1000
2	1	1001
3	2	1011.02
4	3	1021.23
5	4	1031.54
6	5	1041.96
7	6	1052.49
8	7	1063.12
9	8	1073.85
10	9	1084.7
11	10	1095.66
12		
13		

Opgave 13:

Funktionen af to variable x og y defineres. $f(x,y):=-0.1\cdot x^2-0.1\cdot y^2+5$ ▸ *Udført*

a): Funktionsværdien $f(3,4)$ bestemmes. $z=f(3,4)$ ▸ $z=2.5$, dvs. ved x=3 og y=4 er z=2.5.

b): Gradienten bestemmes. Først bestemmes de partielle afledede funktioner.

$\mathbf{dxf}(x,y):=\frac{d}{dx}(f(x,y))$ ▸ *Udført* og $\mathbf{dyf}(x,y):=\frac{d}{dy}(f(x,y))$ ▸ *Udført*, så er gradienten i x=3 og y=4 lig med

$\nabla f(3,4)=\begin{bmatrix}\mathbf{dxf}(3,4)\\ \mathbf{dyf}(3,4)\end{bmatrix}$ ▸ $\begin{bmatrix}-0.6\\ -0.8\end{bmatrix}$

Gradientvektoren fortæller os, at ved P(3,4) er grafen for $f(x,y)$ stejlest i retning mod $\begin{bmatrix}-0.6\\ -0.8\end{bmatrix}$. I denne retning er hældningen $\sqrt{(-0.6)^2+(-0.8)^2}$ ▸ 1., hvilket svarer til at bakken er mest stejl ved $\begin{bmatrix}-0.6\\ -0.8\end{bmatrix}$ og hældningen ved dette punkt er 1.

c): Funktionen sættes lig 2.5, så $f(x,y)=2.5$ ▸ $-0.1\cdot x^2-0.1\cdot y^2+5=2.5$.

$\frac{-1}{0.1}\cdot(f(x,y)-5)=\frac{-1}{0.1}\cdot(2.5-5)$ ▸ $x^2+y^2=25$.

Så det er klart, at $f(x,y)=2.5$ netop former en cirkel med radius lig 5 (fordi $\sqrt{25}=5$).

Da radius er 5, og da $f(x,y)=2.5$ er en cirkel, så benyttes formlen for omkredsen af en cirkel til at beregne, hvor langt vandrerne går. $O=2\cdot\pi\cdot 5$ ▸ 31.4159, så det ser ud til at vandrerne går ca. 31.42km rundt om det cirkelformede bjerg i 2.5km højde.

Opgave 14:

a): Vektorfunktionen er givet, som vi kalder for $\mathbf{s}(t)$. Koordinatfunktionerne er $\mathbf{x}(t):=0+5\cdot\cos(t)$ ▸ *Udført* $\mathbf{y}(t):=2+5\cdot\sin(t)$ ▸ *Udført*.

Afstanden beregnes ved at regne koordinatvis

$\mathbf{d}=\sqrt{(\mathbf{x}(t)--12)^2+(\mathbf{y}(t)-0)^2}$ ▸ $\sqrt{120\cdot\cos(t)+20\cdot\sin(t)+173}$

Så $\mathbf{d}(t):=\sqrt{120\cdot\cos(t)+20\cdot\sin(t)+173}\,|0\le t\le 2\cdot\pi$ ▸ *Udført*.

b): Den korteste afstand kan findes ved en kommando.

$\mathrm{fMin}(\mathbf{d}(t),t)$ ▸ $t=\tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)+\pi$

Koordinatsættet er

$Q=\left\{\mathbf{x}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)+\pi\right),\mathbf{y}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\right)+\pi\right)\right\}$ ▸ $\{-4.93197,1.17801\}$

Dvs. koordinatsættet er Q=(-4.93197,1.17801).