Matematik A, STX

22. maj 2014

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Toppunktet udregnes ved hjælp af differentialregning. Toppunkformlerne overlades som en øvelse til læseren. Først bestemmes $f'(x)$

$$f'(x) = 4x + 4$$

Så løses $f'(x) = 0$ dvs. $4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Indsættes $x = -1$ i $f(x)$ fås

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 6 = -8$$

Koordinatsættet til toppunktet er $T(-1; -8)$.

Opgave 2:

a) Trekanterne er ensvinklede så forholdet mellem $|AE|$ og $|AC|$ findes.

$$k = \frac{|AE|}{|AC|} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Længden $|DE|$ er så

$$|DE| = k \cdot |BC| = \frac{5}{2} \cdot 2 = \frac{10}{2} = 5$$

Opgave 3:

a) Lige store koefficienters metode anvendes. Substitutionsmetoden overlades til læseren.

$$x + y = 11 \quad (1)$$
$$6x + 2y = 42 \quad (2)$$

Der multipliceres med 6 i (1), så $6x + 6y = 66$. Man trækker ligningerne fra hinanden, så

$$6x - 6x + 6y - 2y = 66 - 42 \Leftrightarrow 4y = 24 \Leftrightarrow y = 6$$

Indsættes $y = 6$ i (1) så kan man finde x.

$$x + 6 = 11 \Leftrightarrow x = 5$$

Altså er løsningerne til ligningssystemet $x = 5$ og $x = 6$.

Opgave 4:

a) Ved kvadratkomplementering fås

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y - 26 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 6x + y^2 + 2y = 26 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 6x + (-3)^2 + y^2 + 2y + 1^2 = 26 + 1^2 + (-3)^2 \Leftrightarrow$$
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 36 = 6^2$$

Så centrum er $C(3; -1)$ og radius er $r = 6$.

Opgave 5:

a) Funktionen differentieres.

$$f'(x) = 3ax^2 + 10x + 2$$

Dernæst løses ligningen $f'(1) = -3$ for a, så

$$-3 = 3 \cdot a \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow -3 = 3a + 12 \Leftrightarrow -15 = 3a \Leftrightarrow a = -5$$

Opgave 6:

a) Det ubestemte integral løses. Lad $t = x^2 + 7$, så er $\frac{dt}{dx} = 2x \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{2x}$, hvor integralet så er

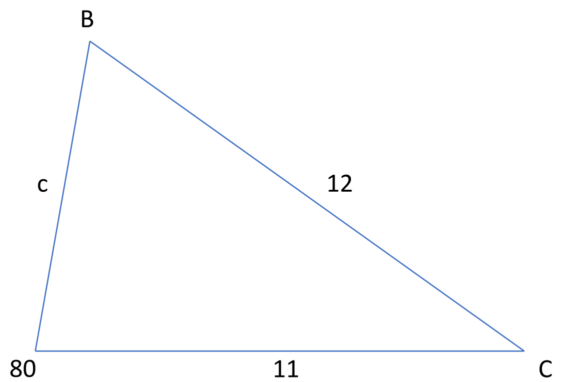
$$\int \frac{2x}{t} \cdot \frac{1}{2x} dt = \int \frac{1}{t} dt = \ln(|t|) + C = \ln(x^2 + 7) + C$$

For x^2 er altid positiv, her er $C \in \mathbb{R}$.

Løsningsforslag med hjælpemidler

Opgave 7:

a) En skitse laves.



Vinkel B bestemmes vha. sinusrelationerne.

$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} \Leftrightarrow B = \arcsin\left(\frac{b\sin(A)}{a}\right)$$

Så

$$B = \arcsin\left(\frac{11\sin(80)}{12}\right) = 64.52^o$$

Vinkel C findes via vinkelsummen.

$$C = 180^o - 80^o - 64.52^o = 35.48^o$$

b) Medianen svarer til midtpunktet af $|BC|$. Dermed kan cosinusrelationerne anvendes.

$$|BC| = \sqrt{6^2 + 11^2 - 2 \cdot 6 \cdot 11 \cdot \cos(35.48)} = 7.036$$

Som er den ønskede længde

Opgave 8: [Via Maple]

a) Tabellens oplysninger indlæses i Maple og der laves eksponentiel regression.

```
restart
with(Gym) :
E1 := [0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45] :
E2 := [359, 539, 811, 1195, 1717, 2452, 3372, 5107, 8164, 10969] :
M(t) := ExpReg(E1, E2, t) :
evalf[5](M(t))
```

$$370.37\ 1.0787^{t} \qquad (1)$$

Konstanterne a og b er hhv. 1.0787 og 370.37

b) År 2010 svarer til 47, så

$$M(47) = 370.37 \cdot 1.0787^{47} = 13009$$

Så i år 2010 var der afholdt 13009 møder. Fordoblingskonstanten er

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(1.0787)} = 9.15$$

Så hvert 9.15 år fordobles antallet af møder.

c) $M'(t) = 370.37 \cdot 1.0787^{t} \cdot \ln(1.0787)$, indsæt $t = 37$ i $M'(t)$, så

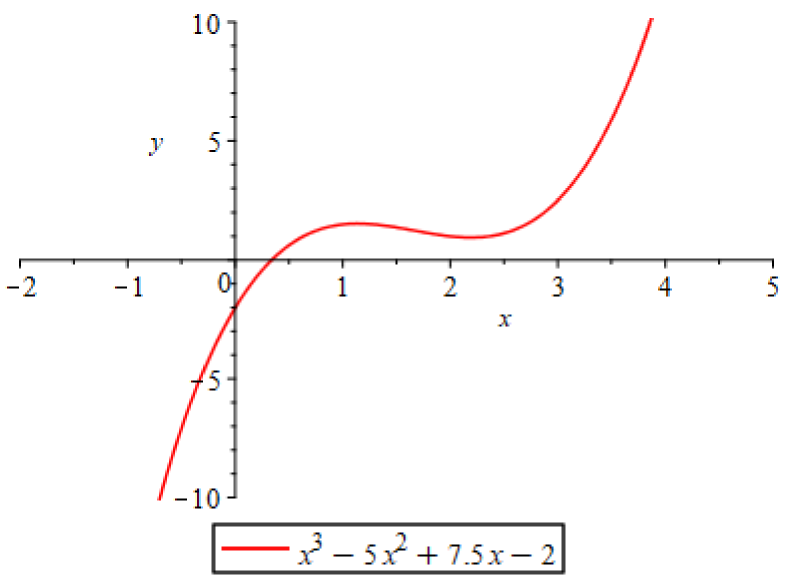
$$M'(37) = 370.37 \cdot 1.0787^{37} \cdot \ln(1.0787) = 462.787$$

Dvs. i år 2000 og frem, afholdes der hvert år 463 møder.

Opgave 9: [Via Maple]

a) I Maple defineres funktionen og grafen tegnes.

```
restart
with(Gym) :
f(x) := x^3 - 5·x^2 + 7.5·x - 2 :
plot(f(x), x=-2..5, y=-10..10, legend=f(x), color = "Red")
```



Tangenten for $f(x)$ bestemmes. Først regnes $f'(x)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 10x + 7.5$$

Indsættes $x_0 = 1$ fås

$$f(1) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 7.5 \cdot 1 - 2 = \frac{3}{2}$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 10 \cdot 1 + 7.5 = \frac{1}{2}$$

Dermed får man

$$y = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}x + 1$$

I Maple:

$$y = f'(1) \cdot (x-1) + f(1)$$

$$y = \frac{x}{2} + 1 \qquad (1)$$

b) Man løser ligningen $f(x) = x/2 + 1$, i Maple benyttes solve.

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1$$

$$x^3 - 5x^2 + \frac{15}{2}x - 2 = \frac{x}{2} + 1 \qquad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x=3], [x=1], [x=1]] \qquad (2)$$

Dernæst anvendes et integral. Bemærk, at tangenten ligger over $f(x)$, så integralet er således:

$$M = \int_1^3 \frac{1}{2}x + 1 - f(x)\,dx$$

I Maple udregnes integralet.

$$\int_1^3 \left(\frac{x}{2} + 1\right) - f(x)\,dx$$

$$\frac{4}{3} \qquad (3)$$

Opgave 10:

a) Parameterfremstillingen opstilles med A som fast punkt og $\overrightarrow{AB}$ som retningsvektor.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9-1 \\ 17-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Parameterfremstillingen for l er

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

b) Man opstiller en linje for m.

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Her er $x_0 = -10$, $y_0 = 21$, $x = 1 + t \cdot 8$ og $y = 5 + t \cdot 12$ hvor x og y er fra parameterfremstillingen. Tallene a og b er retningsvektoren $\overrightarrow{AB}$. Der gælder

$$8\big(1 + 8t - (-10)\big) + 12(5 + 12t - 21) = 0 \Leftrightarrow -104 + 208t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

Indsættes denne værdi i parameterfremstillingen fra a) så er koordinatsættet til projektionen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Opgave 11: [Via Maple]

a) I Maple defineres alle punkterne og der opstilles to vektorer, således man kan foretage krydsprodukt, der vil give den normalvektor man bruger til udregning af planens ligning.

```
restart
with(Gym) :
local D
A := [24,-9, 16] :; B := [15, 20, 16] :; C := [-15, 20, 16] :; D :=
    [0, 0, 44] :; E := [0,-25, 0] :
AB := ⟨B − A⟩ :
AD := ⟨D − A⟩ :
AB × AD
```

$$\begin{bmatrix} 812 \\ 252 \\ 615 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{(1)}$$

Så er planens ligning α med fast punkt i A.

$$812 \cdot (x - 24) + 252 \cdot \big(y - (-9)\big) + 615 \cdot (z - 16) = 0 \Leftrightarrow$$
$$812x + 252y + 615z - 27060 = 0$$

b) Den stumpe vinkel udregnes via planernes normalvektorer.

$$w = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{|\overrightarrow{n_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{n_\beta}|}\right)$$

Her er

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \langle 812{,}252{,}615 \rangle, \qquad \overrightarrow{n_\beta} = \langle 0{,}7{,}5 \rangle$$

Man får

$$w = \arccos\left(\frac{812 \cdot 0 + 252 \cdot 7 + 615 \cdot 5}{\sqrt{812^2 + 252^2 + 615^2} \cdot \sqrt{0^2 + 7^2 + 5^2}}\right) = 57.583^o$$

Men da dette ikke er den stumpe vinkel, men den spidse, så fratrækkes ovenstående med 180^o.

$$v = 180^o - w = 180^o - 57.582^o = 122.418^o$$

I Maple:

$\vec{n}_\alpha := \langle 812, 252, 615 \rangle :$

$\vec{n}_\beta := \langle 0, 7, 5 \rangle :$

$evalf[5]\left(180 - vinkel\left(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta\right)\right)$

$$122.42 \qquad (3)$$

c) Distanceformlen anvendes.

$$dist(E, \beta) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

I Maple får man:

$$\frac{|0 \cdot 0 + 7 \cdot (-25) + 5 \cdot 0 + (-220)|}{\sqrt{0^2 + 7^2 + 5^2}} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 45.917$$

Her er $a = 0$, $b = 7$ og $c = 5$ samt $x_0 = 0$, $y_0 = -25$ og $z_0 = 0$.

Så afstanden fra punktet E til tagfladen BCD er 45.9cm.

Opgave 12: [Via Maple]

a) Populationen er alle danskere i Danmark, og det er den øvre tabel, som man har en forventet procentværdi ift. samlede antal familier med bil. Stikprøven er nedre tabel, som viser 1005 tilfældige familier fordelt omkring familier med bil i de fem landsregioner. Nulhypotesen: Fordelingen har ikke ændret sig i de fem regioner.

b) Man anvender GOF-test. Denne udregnes i Maple, så alle oplysningerne defineres.

$restart$

$with(Gym):$

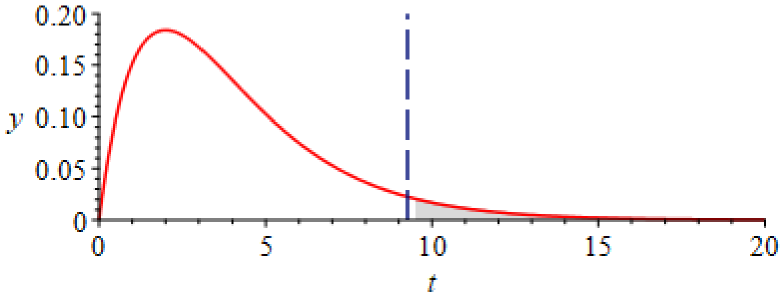
$obs := [271, 161, 250, 201, 122]:$

$forv1 := \frac{1}{100} \cdot [26, 15, 24, 24, 11]:$

$forv := 1005 \cdot forv1:$

$ChiKvadratGOFtest(obs, forv, level = 0.05)$

χ^2-teststørrelse = 9.2640
Frihedsgrader = 4
Kritisk værdi = 9.4877
p-værdi = 0.054829



Da p-værdien er 0.054829 som er større end 0.05, så accepteres nulhypotesen.

<u>Opgave 13:</u>

a) Differentialligningen kan løses i et CAS, men den er en af de simple, så den fuldstændige løsning:

$$U(x) = c\mathrm{e}^{0.1518x}$$

Man løser en ligning for c, når $U(25) = 6.25$, så

$$6.25 = c\mathrm{e}^{0.1518 \cdot 25} \Leftrightarrow c = \frac{6.25}{\mathrm{e}^{3.795}}$$

Så den partikulære løsning er

$$U(x) = \frac{6.25}{\mathrm{e}^{3.795}} \mathrm{e}^{0.1518x}$$

Så løses ligningen $U(x) = 4$.

$$\frac{6.25}{\mathrm{e}^{3.795}} \mathrm{e}^{0.1518x} = 4 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{0.1518x} = \frac{16}{25}\mathrm{e}^{3.795} \Leftrightarrow 0.1518x = \ln\left(\frac{16}{25}e^{3.795}\right) \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{16}{25}e^{3.795}\right)}{0.1518} = 22.06$$

Så hastigheden er 22.06 knob, når udledningen af CO_2 er $4g/ton/km$.

b) Først udregnes $U(17.5)$.

$$U(17.5) = \frac{6.25}{e^{3.795}} e^{0.1518 \cdot 17.5} \approx 2$$

Dermed findes forholdet mellem $U(25)$ og $U(17.5)$, så

$$\frac{U(17.5)}{U(25)} = \frac{2}{6.25} = 0.32$$

Så $0.32 = 32\%$ og påstanden viser sig at holde.

Opgave 14:

a) Omkredsen O og arealet A for området er

$$O = 2y + 3x$$

$$A = yx + \frac{x^2}{2}\sin(60)$$

Lad $x = 50$ og $y = 100$, så

$$O = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 50 = 350m$$

$$A = 100 \cdot 50 + \frac{50^2}{2}\sin(60) = 6082.53m^2$$

b) Man anvender at $O = 200$, og y isoleres.

$$200 = 2y + 3x \Leftrightarrow 2y = 200 - 3x \Leftrightarrow y = 100 - \frac{3}{2}x$$

Man indsætter i arealformlen. Bemærk, at $\sin(60) = \sqrt{3}/2$, så

$$A = yx + \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$$

Så indsættes $y = 100 - \frac{3}{2}x$, og der forkortes.

$$\begin{aligned} T(x) = A &= \left(100 - \frac{3}{2}x\right) \cdot x + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \\ &= 100x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} \\ &= 100x + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)x^2 \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)x^2 + 100x \end{aligned}$$

Dermed blev det ønskede bestemt. Bemærk, at A selvfølgelig er $T(x)$.

c) Man differentierer $T(x)$,

$$T'(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right)x + 100$$

Og løser $T'(x) = 0$.

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right)x + 100 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right)x = -100 \Leftrightarrow x = -\frac{100}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\right)} = 46.860$$

Denne værdi indsættes i $T(x)$, så

$$T(46.860) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)46.860^2 + 100 \cdot 46.860 = 2343$$

Man kan finde y nu vha. omkredsformlen fra opgave b.

$$O = 100 - \frac{3}{2} \cdot 46.86 = 29.71$$

Så $x = 46.86m$ og $y = 29.71m$ giver det største areal.

Matematik A, STX

27. maj 2014

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Udtrykket reduceres.

$$(p-q)^2+2pq-q^2$$
$$=p^2+q^2-2pq+2pq-q^2$$
$$=p^2$$

Anden kvadratsætning blev anvendt.

Opgave 2:

a) Andengradsligningen løses vha. kvadratkomplettering.

$$2x^2+x-15=0 \Leftrightarrow 2x^2+x=15 \Leftrightarrow$$
$$x^2+\frac{1}{2}x=\frac{15}{2} \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{15}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2 \Leftrightarrow$$
$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{121}{16} \Leftrightarrow x+\frac{1}{4}=\pm\sqrt{\frac{121}{16}} \Leftrightarrow$$
$$x+\frac{1}{4}=\pm\frac{11}{4} \Leftrightarrow x=\pm\frac{11}{4}-\frac{1}{4}$$

Løsningerne er

$$x=-3 \vee x=\frac{5}{2}$$

Opgave 3:

a) Først omregnes fremskrivningsfaktoren til vækstraten.

$$0.64=1+r \Leftrightarrow$$
$$r=0.64-1=-0.36=-36\%$$

Forklaring: Ved indsprøjtning af den bestemte medicin, er koncentrationen i blodet 1.5mg/mL hvorved koncentrationen aftager hver time med 36%.

Opgave 4:

a) Funktionerne $f(x)$ og $h(x)$ har begge negativt fortegn, dvs. begge funktioners tangenthældning er negativ, derimod har $g(x)$ positivt fortegn, så tangenthældningen er positiv.

Opgave 5:

a) Først findes $f'(x)$.

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 2$$

Denne sættes ind på dy/dx's plads i differentialligningen, samt $f(x)$ indsættes på y's plads.

$$\mathrm{e}^x - 2x - 2 = x^2 + \mathrm{e}^x - x^2 - 2x - 2$$
$$\Rightarrow \mathrm{e}^x - 2x - 2 = \mathrm{e}^x - 2x - 2$$

Da begge sider er identiske, så er $f(x)$ en løsning til differentialligningen.

Opgave 6:

a) Arealet af M bestemmes. Bemærk, at $f(x)$ ligger over $g(x)$.

$$M = \int_0^2 f(x) - g(x)\,dx = [F(x) - G(x)]_0^2 = F(2) - G(2) - \big(F(0) - G(0)\big)$$

Så kan der aflæses på tabellen, at

$$F(2) = 66, \qquad G(2) = -62$$
$$F(0) = 0, \qquad G(0) = 0$$

Dermed er

$$F(2) - G(2) - \big(F(0) - G(0)\big) = 66 - (-62) - (0 - 0) = 66 + 62 = 128$$

Arealet af M er 128.

Løsningsforslag med hjælpemidler

Opgave 7:

a) Når $t = 2$ har man vektorerne

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vinklen mellem vektorerne findes ved formlen

$$v = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Og dermed er

$$v = \arccos\left(\frac{7 \cdot 2 + 3 \cdot 6}{\sqrt{7^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 6^2}}\right) = 48.366^o$$

b) Hvis determinanten skal være 30, så løses ligningen

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = 30 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 7 & t \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 30 \Leftrightarrow 7 \cdot 6 - 3 \cdot t = 30 \Leftrightarrow$$
$$42 - 3t = 30 \Leftrightarrow 3t = 12 \Leftrightarrow t = 4$$

Så når $t = 4$ fås determinanten 30. Hvis man anvender numerisk tegn, og løser ligningen $|42 - 3t| = 30$ fås $t = 4 \vee t = 24$. Begge værdier vil udspænde et parallelogram med areal 30.

Opgave 8: [Via Maple]

a) Tabellens oplysninger indlæses i Maple og der laves potensregression.

```
restart
with(Gym) :
P1 := [359, 395, 432, 478, 524, 572, 620, 716] :
P2 := [3800, 4300, 4820, 5500, 6180, 6920, 7660, 9200] :
f(h) := PowReg(P1, P2, h) :
f(h)
                2.02498637749824 h^1.28131459885991          (1)
evalf[5](2.02498637749824)
                            2.0250                           (2)

evalf[5](1.28131459885991)
                            1.2813                           (3)
```

Konstanterne a og b er hhv. 1.2813 og 2.0250

b) Man indsætter $h = 668$ i $f(h)$, sådan så

$$f(668) = 2.0250 \cdot 668^{1.2813} = 8429.68$$

Så er belastningsevnen $8429.68 \cdot 10^3 mm^3$

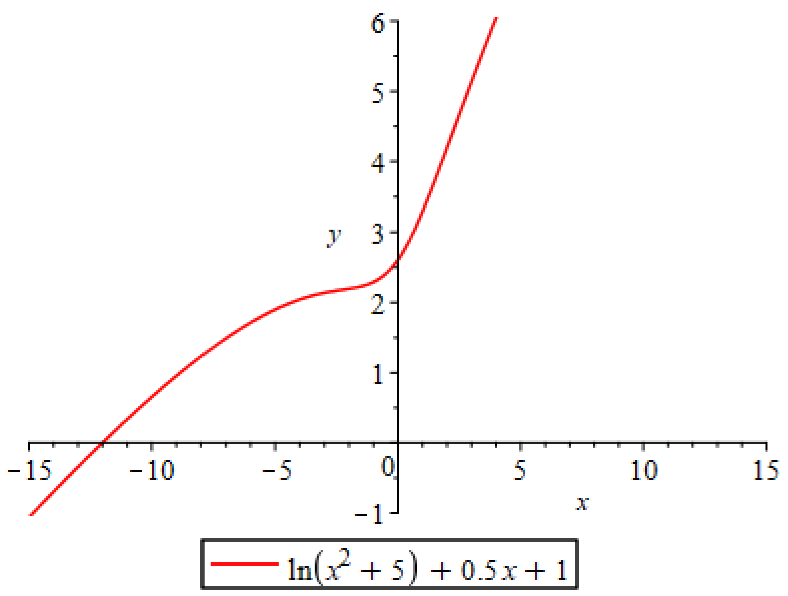
c) Når højden øges med 15%, øges belastningsevnen med

$$r_{f(h)} = \left(\left(1 + \frac{15}{100}\right)^{1.2813} - 1\right) \cdot 100\% = 19.611\%$$

Opgave 9: [Via Maple]

a) I Maple indlæses funktionen og der laves et plot for $f(x)$.

```
restart
with(Gym) :
f(x) := ln(x^2 + 5) + 0.5·x + 1 :
plot(f(x), x=-15..15, y=-1..6, color = "Red", legend = f(x))
```



Dernæst løses ligningen $f(x) = 0$.

$$fsolve(\ln(x^2 + 5) + 0.5 \cdot x + 1 = 0)$$
$$-12.01164105 \qquad (1)$$

Så i Maple fandt man skæring med førsteaksen, så koordinatsættet er

$$P(-12.01164105; 0)$$

b) Arealet af M bestemmes. Der anvendes integralregning, hvor nedre grænse er skæring med førsteaksen, og b er 0 idet $f(x)$ skærer andenaksen i $x = 0$.

$$M = \int_{-12.01164105}^{0} f(x)\,dx$$
$$M = 18.24830902 \qquad (2)$$

Som er det ønskede areal.

Opgave 10: [Via Maple]

a) En nulhypotese kunne være

H: Arten af ålene er uafhængigt af valget af opholdssteder.

I Maple kan man bestemme de forventede værdier. Alternativt kan man anvende formlen

$$forventet = \frac{lodret\ sum \cdot vandret\ sum}{sum\ total}$$

Summen af de observerende værdier er

$$lodret\ sum_{græs} = 127 + 116 = 243$$
$$lodret\ sum_{sand} = 99 + 67 = 166$$
$$lodret\ sum_{mellemting} = 264 + 161 = 425$$
$$vandret\ sum_{G.moringa} = 127 + 99 + 264 = 490$$
$$vandret\ sum_{G.vicinus} = 116 + 67 + 161 = 344$$

Så summen er $490 + 344 = 834$ (vandret) og $243 + 166 + 425 = 834$ (lodret)

$$forventet_{græs,G.moringa} = \frac{243 \cdot 490}{834}$$
$$forventet_{græs,G.vicinus} = \frac{243 \cdot 344}{834}$$
$$forventet_{sand,G.moringa} = \frac{166 \cdot 490}{834}$$
$$forventet_{sand,G.vicinus} = \frac{166 \cdot 344}{834}$$
$$forventet_{mellemting,G.moringa} = \frac{425 \cdot 490}{834}$$
$$forventet_{mellemting,G.vicinus} = \frac{425 \cdot 344}{834}$$

Tabellen opstilles.

	Græs	Sand	Mellemting
G. moringa	142.77	97.530	249.70
G. vicinus	100.23	68.470	175.30

Dette kunne også laves i Maple.

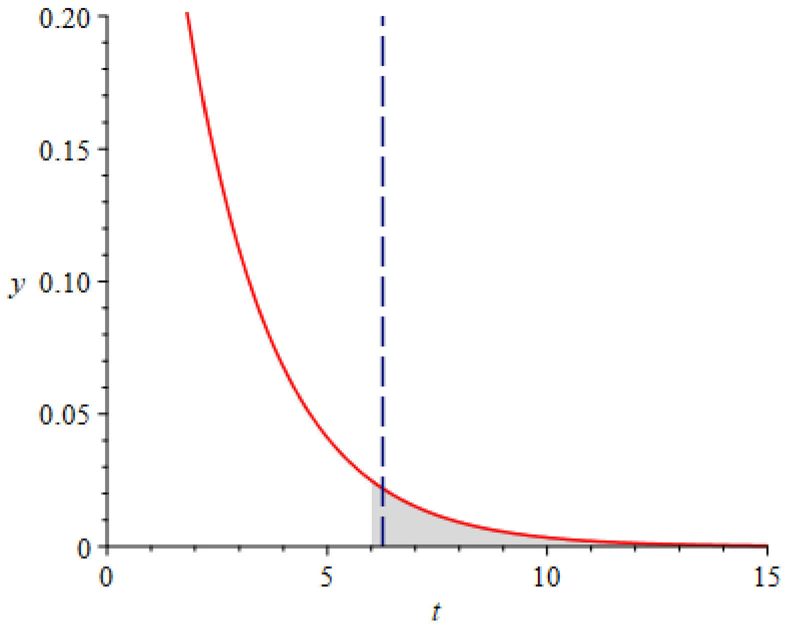
b) I Maple bestemmes det, om hypotesen H skal afvises eller accepteres. Der benyttes et 5% signifikansniveau.

```
restart
with(Gym) :
obs := ⟨⟨127, 116|99, 67|264, 161⟩⟩
```

$$obs := \begin{bmatrix} 127 & 99 & 264 \\ 116 & 67 & 161 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
ChiKvadratUtest(obs, level = 0.05)
```

χ^2-teststørrelse = 6.2621
Frihedsgrader = 2
Kritisk værdi = 5.9915
p-værdi = 0.043671



Det ses, at p-værdien er 0.043671 og der blev testet med 0.05, og da p-værdien er mindre, så afvises hypotesen.

Opgave 11: [Via Maple]

a) Sæt $x = 4$, så er længden $|AB|$

$$|AB| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17} = 4.123m$$

Vinkel v bestemmes vha. cosinusrelationerne.

$$v = \arccos\left(\frac{3^2 + 2^2 - 4.123^2}{2 \cdot 3 \cdot 2}\right) = 109.467^o$$

b) Lad igen $x = 4$, så er arealet af ABC,

$$T_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 1m^2 \cdot 4m^2 = 2m^2$$

Og arealet af ABD,

$$T_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot 3m^2 \cdot 2m^2 \cdot \sin(109.467) = 2.8285m^2$$

Så er det samlede areal

$$T = T_{ABC} + T_{ABD} = 2m^2 + 2.8285m^2 = 4.8285m^2$$

c) $T(x)$ differentieres vha. Maple

$$T(x) := \frac{x\sqrt{-x^2 + 24}}{4} + \frac{x}{2} :$$

$$T'(x)$$

$$\frac{\sqrt{-x^2 + 24}}{4} - \frac{x^2}{4\sqrt{-x^2 + 24}} + \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Og ligningen $T'(x) = 0$ løses. I Maple foretages løsningen.

$$T'(x) = 0$$

$$\frac{\sqrt{-x^2 + 24}}{4} - \frac{x^2}{4\sqrt{-x^2 + 24}} + \frac{1}{2} = 0 \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}} \qquad [[x = \sqrt{15}], [x = -\sqrt{15}]] \qquad (3)$$

Den negative løsning afvises. Dermed må $x = \sqrt{15} = 3.873m$ være den værdi, der gør arealet er størst i sandkassen. Dette eftervises her:

$$T''(\mathrm{sqrt}(15)) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} -1.5062$$

$-15062 < 0$, lokalt maksimum.

Opgave 12: [Via Maple]

a) Alle punkterne defineres i Maple og der laves et krydsprodukt mellem to vektorer $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$, hvorfor denne er normalvektor til planens ligning, som også bestemmes.

```
restart
with(Gym) :
local D
A := [33, 0, 15] :; B := [33, 35, 15] :; C := [22, 35, 18] :; D :=
    [22, 0, 18] :
```
$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle :$

$\overrightarrow{AC} := \langle C - A \rangle :$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\begin{bmatrix} 105 \\ 0 \\ 385 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

$105 \cdot (x - 33) + 0 \cdot (y - 0) + 385 \cdot (z - 15) = 0$

$$105\,x - 9240 + 385\,z = 0 \qquad (2)$$

b) Den stumpe vinkel udregnes via planernes normalvektorer.

$$w = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{n_\alpha} \cdot \overrightarrow{n_\beta}}{|\overrightarrow{n_\alpha}| \cdot |\overrightarrow{n_\beta}|}\right)$$

Her er

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \langle 105{,}0{,}385 \rangle, \qquad \overrightarrow{n_\beta} = \langle -210{,}0{,}770 \rangle$$

Man får

$$w = \arccos\left(\frac{105 \cdot (-210) + 0 \cdot 0 + 385 \cdot 770}{\sqrt{105^2 + 0^2 + 385^2} \cdot \sqrt{(-210)^2 + 0^2 + 770^2}}\right) = 30.510^o$$

Men da dette ikke er den stumpe vinkel, men den spidse, så fratrækkes ovenstående med 180^o.

$$v = 180^o - w = 180^o - 30.510^o = 149.49^o$$

I Maple:

$\overrightarrow{n_\alpha} := \langle 105, 0, 385 \rangle :$

$\overrightarrow{n_\beta} := \langle -210, 0, 770 \rangle :$

$evalf[5]\left(180 - vinkel\left(\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta}\right)\right)$

$$149.49 \qquad (1)$$

c) Der er tale om et parallelogram, hvis og kun hvis $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ samt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, så

$\overrightarrow{AD} := \langle D - A \rangle$

$$\overrightarrow{AD} := \begin{bmatrix} -11 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$\overrightarrow{BC} := \langle C - B \rangle$

$$\overrightarrow{BC} := \begin{bmatrix} -11 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$\overrightarrow{AB}$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 35 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$\overrightarrow{DC} := \langle C - D \rangle$

$$\overrightarrow{DC} := \begin{bmatrix} 0 \\ 35 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Hvilket viser sig at være sandt.

$T = len(\overrightarrow{n_\alpha})$

$$T = 35\sqrt{130} \quad (1)$$

$evalf[5](\%)$

$$T = 399.07 \quad (2)$$

Så arealet af tagfladen er $399.07dm^2$

Opgave 13:

a) Tangenten til $f(x)$ bestemmes.

$$f'(x) = 6\cos(2x + 0.7)$$

Så udregnes $f(3)$ og $f'(3)$

$$f(3) = 3\sin(2 \cdot 3 + 0.7) + 1 = 2.2145$$
$$f'(3) = 6\cos(2 \cdot 3 + 0.7) = 5.4863$$

Så er

$$y = 5.4863 \cdot (x - 3) + 2.2145 = 5.4863x - 14.2444$$

b) Da $\sin(x)$ har maksimum for $y = 1$ og minimum for $y = -1$, så er maksimum og minimum for $f(x)$ bestemt ved

$$maksimum = 3 \cdot 1 + 1 = 3 + 1 = 4$$
$$minimum = 3 \cdot (-1) + 1 = -3 + 1 = -2$$

Perioden for den trigonometriske funktion er

$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

Opgave 14: [Via Maple]

a) Differentialligningen løses vha. Maple, når $a = 0.07$

```
restart
with(Gym) :
dsolve({y'(t) = 0.07·(20 + 5·t − y(t)), y(0) = 20}, y(t))
```

$$y(t) = 5\,t - \frac{360}{7} + \frac{500\,e^{-\frac{7\,t}{100}}}{7} \qquad (1)$$

Temperaturen udregnes ved indsættelse af $t = 16$, så

$$y(t) := 5\,t - \frac{360}{7} + \frac{500\,e^{-\frac{7\,t}{100}}}{7}:$$

$$y(16) \xrightarrow{\text{at 5 digits}} 51.877$$

Så efter 16 minutter er temperaturen 51.877^oC.

b) Differentialligningen løses uden $a = 0.07$.

```
restart
with(Gym) :
dsolve({y'(t) = a·(20 + 5·t − y(t)), y(0) = 20}, y(t))
```

$$y(t) = 5\,t + 20 - \frac{5}{a} + \frac{5\,e^{-a\,t}}{a} \qquad (1)$$

$$y(t) := 5\,t + 20 - \frac{5}{a} + \frac{5\,e^{-a\,t}}{a}:$$

For at finde den faktiske værdi af a, løses ligningen $y(16) = 50$, så

$$y(16) = 50$$

$$100 - \frac{5}{a} + \frac{5\,e^{-16\,a}}{a} = 50 \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{\text{solve}}$$

$$0.06419813173 \qquad (3)$$

Matematik A, STX

14. august 2014

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

a) Andengradsligningen løses. Anvend diskriminanten.

$$d = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 4 + 60 = 64 = 8^2$$

Dernæst bestemmes rødderne.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{8^2}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 8}{2} = \begin{cases} \dfrac{-2+8}{2} = 3 \\ \dfrac{-2-8}{2} = -5 \end{cases}$$

Dermed er løsningerne $x = -5 \vee x = 3$.

Opgave 2:

a) Tallet -2.5 fortæller, at for hver gang prisen øges med 1kr, falder antallet af solgte is med 2.5 (eller når prisen stiger med 2kr, falder antallet af solgte is med 5 stykker). Hvis der ikke skal sælges nogen is, svarer det til at løse $f(x) = 0$, så

$$-2.5x + 125 = 0 \Leftrightarrow 2.5x = 125 \Leftrightarrow 5x = 250 \Leftrightarrow x = \frac{250}{5} = \frac{5 \cdot 50}{5} = 50$$

Dvs. prisen skal være 50kr før der ikke bliver solgt nogen is.

Opgave 3:

a) Forholdet mellem trekanterne bestemmes.

$$k = \frac{|DF|}{|AC|} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Længden af $|BC|$ bestemmes vha. Pythagoras.

$$|BC| = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

Længden af $|DE|$ bestemmes vha. forholdet og længden $|AB|$

$$|DE| = k \cdot |AB| = \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{15}{2} = 7.5$$

Opgave 4:

a) Der foretages kvadratkomplettering

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 + 6y = 3 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 4x + (-2)^2 + y^2 + 6y + 3^2 = 3 + (-2)^2 + 3^2 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16 = 4^2$$

Dermed er $C(2, -3)$ og $r = 4$.

Opgave 5:

a) Funktionen f differentieres vha. produktreglen.

$$f'(x) = x \cdot \mathrm{e}^x + 1 \cdot \mathrm{e}^x = x \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$$

Denne indsættes på dy/dx og f indsættes på y, hvor der gælder

$$x \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = x \cdot \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$$

Dermed kan man se, at f løser differentialligningen.

Opgave 6:

a) Det bestemte integral beregnes.

$$\int_2^3 \frac{3x^2}{x^3 - 7} dx$$

Lad $t = x^3 - 7$. De nye begrænsninger regnes. Nedre: $t = 2^3 - 7 = 1$ og øvre: $t = 3^3 - 7 = 27 - 7 = 20$. Differentieres t fås

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2 \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{3x^2}$$

Så omskrives integralet.

$$\int_2^3 \frac{3x^2}{x^3 - 7} dx = \int_1^{20} \frac{3x^2}{t} \frac{1}{3x^2} dt = \int_1^{20} \frac{1}{t} dt = [\ln(x)]_1^{20} = \ln(20) - \ln(1)$$
$$= \ln(20)$$

Så er dette svaret.

Løsningsforslag med hjælpemidler

Opgave 7:

a) Vinklen mellem vektorerne findes ved formlen

$$v = \arccos\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Og dermed er

$$v = \arccos\left(\frac{-1 \cdot 2 + 3 \cdot 5}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 5^2}}\right) = 40.236^o$$

b) Koordinatsættet til projektionen bestemmes.

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} = \frac{-1 \cdot 2 + 3 \cdot 5}{\sqrt{2^2 + 5^2}^2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{13}{29} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{26}{29} \\ \frac{65}{29} \end{pmatrix}$$

Som er koordinatsættet.

Opgave 8: [Via Maple]

a) Tabellens oplysninger indlæses i Maple og der laves potensregression.

```
restart
with(Gym) :
E1 := [0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5] :
E2 := [20.5, 21.0, 21.4, 22.0, 22.3, 23.0, 23.5] :
d(h) := ExpReg(E1, E2, h) :
evalf[5](d(h))
                    20.038 1.0463^h                    (1)
```

Konstanterne a og b er hhv. 1.0463 og 20.038

b) Man indsætter $h = 6$ i $d(h)$, sådan så

$$d(668) = 20.038 \cdot 1.0463^6 = 26.29$$

Så når vejrballonen er i 6km's højde, er diameteren 26.29m

c) Tallet a er fremskrivningsfaktoren og omdannes til vækstraten.

$$a = 1 + r \Leftrightarrow r = a - 1$$

Så

$$r = 1.0463 - 1 = 0.0463 = 4.63\%$$

Det betyder, at for hver gang vejrballonen øges 1km, stiger diameteren med 4.63%. Dernæst benyttes formlen

$$r_y = a^{\Delta h} - 1$$

Så

$$\frac{50}{100} = 1.0463^{\Delta h} - 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} = 1.0463^{\Delta h} \Leftrightarrow \Delta h = \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\ln(1.0463)} = 8.96$$

Det betyder, at vejrballonen skal øges med 8.96km før diameteren er øget med 50%.

Opgave 9:

a) Først bestemmes $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2, \qquad x > 0$$

Man indsætter $x_0 = 2$ i $f(x)$ og $f'(x)$

$$f(2) = \ln(2) - 2 \cdot 2 + 5 = \ln(2) + 1$$

$$f'(2) = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

Så tangentligningen er

$$y = -\frac{3}{2}(x - 2) + \ln(2) + 1 = -\frac{3}{2}x + 4 + \ln(2) \approx -1.5x + 4.6932$$

b) Ligningen $f'(x) = 0$ løses.

$$\frac{1}{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Der foretages fortegnsvariation. Der vælges $1/4$ og 1, så

$$f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\frac{1}{4}} - 2 = 2$$

$$f'(1) = \frac{1}{1} - 2 = -1$$

Monotoniskemaet er, for $x > 0$.

x	0		1/2	
$f'(x)$	Undefined	$+$	0	$-$
$f(x)$	Undefined	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$

Dermed er funktionen

- Voksende i intervallet $]0; 1/2]$
- Aftagende i intervallet $[1/2; \infty[$

Alternativt finder man $f''(x)$, så

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad x > 0$$

Man indsætter løsningen fra $f'(x) = 0$.

$$f''\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{\frac{1}{4}} = -4$$

Da $-4 < 0$ har man maksimum i $x = 1/2$.

Opgave 10:

a) Først findes radius for kuglen, så kuglens ligning samt C og P anvendes.

$$(1-1)^2 + (0-2)^2 + \big(5-(-1)\big)^2 = r^2 \Leftrightarrow$$
$$r^2 = 40 \Leftrightarrow r = \sqrt{40}$$

Dermed er ligningen l for kuglen

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 40$$

b) Dist-formlen anvendes.

$$dist(l, \alpha) = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) - 40|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 6^2}} = \frac{44}{\sqrt{37}} = 7.2335$$

Da $44/\sqrt{37} > \sqrt{40}$ betyder det, at α ikke er tangentplan til kuglen.

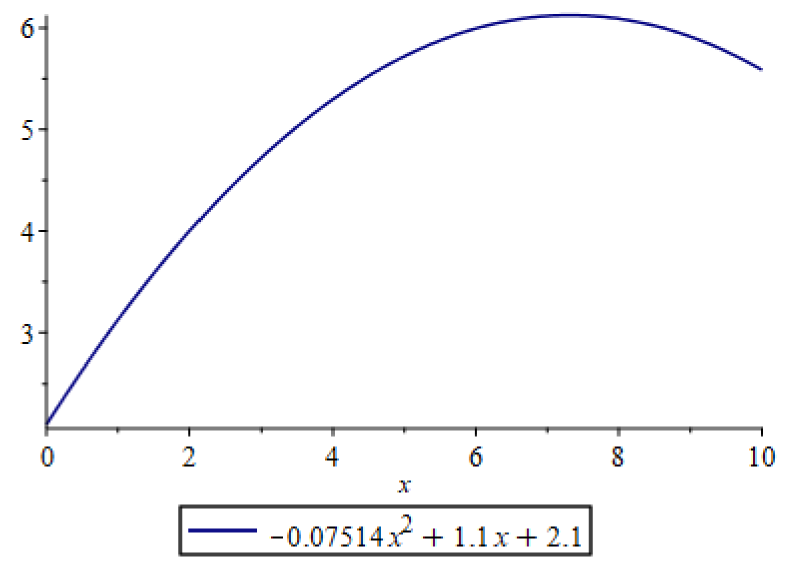
Opgave 11: [Via Maple]

a) Når $a = 1.1$ defineres funktionen i Maple, og grafen ser ud således:

restart
with(Gym) :
$f(x) := -0.034 \cdot (1 + 1.1^2) \cdot x^2 + 1.1 \cdot x + 2.1$

$$f := x \mapsto -0.07514x^2 + 1.1x + 2.1 \quad (1)$$

plot(f(x), x = 0 ..10, legend = f(x), color = "Navy")



NB: I Maple skrives der ikke y, men $f(x)$.

b) Der løses en ligning for a, når $x = 10$ og $y = 3.05$, dette foretages i Maple.

$3.05 = -0.034 \cdot (1 + a^2) \cdot 10^2 + a \cdot 10 + 2.1$

$$3.05 = -3.400a^2 - 1.300 + 10a \quad (2)$$

$\xrightarrow{\text{solve for a}}$

$$[[a = 2.410385018], [a = 0.5307914524]] \quad (3)$$

Dermed skal $a = 2.41$ eller $a = 0.53$

Opgave 12: [Via Maple]

a) Hypotesen opstilles.

H: Terningen er ærlig.

Der er blevet kastet 1000 gange, så sandsynligheden for at man får en side er

$$\frac{1000}{6} = 166.667$$

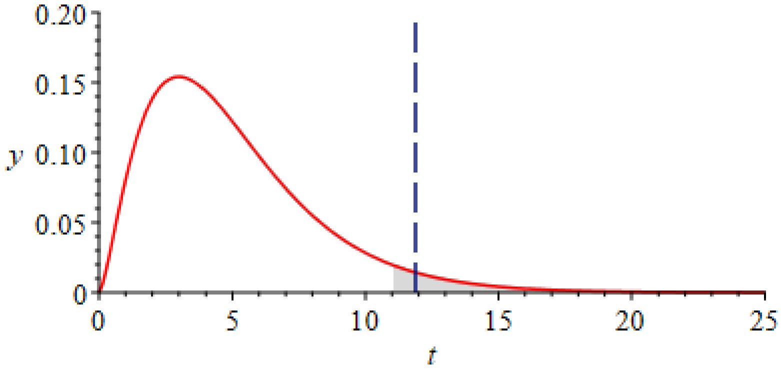
Dermed er tabellen

Antal øjne	1	2	3	4	5	6
Hyppighed	172	168	150	188	185	137
Forventet	166.667	166.667	166.667	166.667	166.667	166.667

b) I Maple indlæses oplysningerne og der testes med et 5% signifikansniveau.

```
restart
with(Gym) :
obs := [172, 168, 150, 188, 185, 137] :
forv := [166.667, 166.667, 166.667, 166.667, 166.667, 166.667] :
ChiKvadratGOFtest(obs, forv, level = 0.05)
```

χ^2-teststørrelse = 11.876
Frihedsgrader = 5
Kritisk værdi = 11.070
p-værdi = 0.036527



Da p-værdien er 0.036527 og dermed mindre end de 0.05 der blev testet med, afvises hypotesen. Terningen er ikke ærlig.

Opgave 13: [Via Maple]

a) Arealet af M bestemmes vha. integralregning. Nedre grænse er 0 og øvre grænse er 20, man har

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^{20} (-0.00105x^3 + 0.0467x^2 - 0.452x + 4.78)\,dx \\
&= [-0.0002625x^4 + 0.01556666667x^3 - 0.226x^2 + 4.78x]_0^1 \\
&= -0.0002625 \cdot 20^4 + 0.01556666667 \cdot 20^3 - 0.226 \cdot 20^2 + 4.78 \cdot 20 \\
&= 87.733
\end{aligned}$$

Dvs. arealet af glasset med en højde på 20, er 87.733. Dette kunne nemt gøres i Maple.

$$M = \int_0^{20} \left(-0.00105\,x^3 + 0.0467\,x^2 - 0.452\,x + 4.78\right) dx$$

$$M = 87.73333333 \qquad \mathbf{(1)}$$

b) Rumfanget af vasen bestemmes i Maple.

$$V = \mathrm{Pi} \cdot \int_0^{20} \left(-0.00105\,x^3 + 0.0467\,x^2 - 0.452\,x + 4.78\right)^2 dx$$

$$V = 1246.203623 \qquad \mathbf{(1)}$$

Dvs. rumfanget for denne vase er $1246.2cm^3$.

Opgave 14: [Via Maple]

a) Differentialligningen løses vha. Maple.

restart
with(*Gym*) :
dsolve($\{N'(t) = a \cdot N(t) \cdot (90 - N(t)), N(0) = 3\}, N(t)$)

$$N(t) = \frac{90}{1 + 29\,e^{-90\,a\,t}} \qquad \mathbf{(1)}$$

$$43 = \frac{90}{1 + 29\,e^{-90\,a \cdot 11}} \xrightarrow{\text{solve}} 0.003311462974$$

$$N(t) := \frac{90}{1 + 29\,e^{-90 \cdot 0.003311462974 \cdot t}}$$

$$N := t \mapsto \frac{90}{1 + 29\,e^{-0.2980316677\,t}} \qquad \mathbf{(2)}$$

Ovenstående viser differentialligningen der løses vha. dsolve med $N(0) = 3$ og dernæst anvendes $N(11) = 43$ til at bestemme den ukendte a, så man endelig kan få den ønskede forskrift.

b) Den øvre grænse findes ved at udnytte, at grafen for $N(t)$ er asymptote med $y = 90$, så dermed er den øvre grænse 90. Dette kan også udregnes vha. limit i Maple.

$$\lim_{t \to \text{infinity}} \left(\frac{90}{1 + 29\,\mathrm{e}^{-0.2980316677\,t}} \right)$$

$$90. \qquad (3)$$

Så når $t \to \infty$ er $N(t) = 90$.

Væksthastigheden er størst, når $c = 29$, $a = 0.003311462974$ og $M = 90$,

$$t = \frac{\ln(c)}{a \cdot M} = \frac{\ln(29)}{0.003311462974 \cdot 90} = 11.3$$

Dvs. væksthastigheden er størst i løbet af år 2007. Dette kan vises vha. Maple.

$$N(t) = \frac{90}{2}$$

$$\frac{90}{1 + 29\,\mathrm{e}^{-0.2980316677\,t}} = 45 \qquad (3)$$

$$\xrightarrow{\text{solve}}$$

$$11.29844978 \qquad (4)$$

Opgave 15: [Via Maple]

a) Vinkel A bestemmes.

$$A = \arccos\left(\frac{6^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 6 \cdot 7}\right) = 44.415^o$$

b) Arealet af ADE findes vha. ½ appelsinformlen.

$$T(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (6 - y) \cdot \sin(A)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(6 - \frac{-7x^2 + 60x - 252}{10x - 84}\right) \cdot \sin(44.415)$$

Løses ligningen $T(x) = 0$ i Maple, så

restart
with(*Gym*) :
$$T(x) := \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(6 - \frac{-7x^2 + 60x - 252}{10x - 84}\right) \cdot Sin(44.415) :$$
solve($T'(x) = 0$)

$$4.257146384, 11.44587185, -3.103018237 \qquad (1)$$

$T''(4.257146384)$

$$-1.510231360 \qquad (2)$$

$-1.510231360 < 0$ dvs. maksimum.

Så $x = 4.257$ giver det største areal.

Matematik A, STX

5. december 2014

Løsningsforslag uden hjælpemidler

Opgave 1:

b) Andengradsligningen løses.

$$x^2 + 5x - 14 = 0$$

Hvilke to tal sum er 5 men produkt er -14? Det er 7 og -2, da:

$$7 + (-2) = 5$$
$$7 \cdot (-2) = -14$$

Ligningen kan skrives om: $x^2 + 5x - 14 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+7) = 0$. Så løsningerne er:

$$x = -7 \vee x = 2$$

Opgave 2:

a) Man har fået angivet vækstraten og begyndelsesværdien. Man bestemmer fremskrivningsfaktoren.

$$a = 1 + r$$

Der gælder, at $r = -1.3\%$, så

$$a = 1 + \frac{-1.3}{100} = 0.987$$

Dermed er forskriften

$$A(t) = 6 \cdot 0.987^t$$

Hvor $A(t)$ beskriver arealet af havis i et bestemt oceanområde, målt i km^2, til tidspunktet t, målt i år efter år 2008.

Opgave 3:

a) Endepunktet for pigen vinkelret med stolpen udgør en længde på 4m, så det er passende at anvende Pythagoras.

$$a = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$$

Så højden ved endepunktet for pigen er $h = 6.3 - 3 = 3.3$, så hun er 3.3m over jorden.

Opgave 4:

a) Stamfunktionen til f benævnes med F, så

$$F(x) = \int \left(\frac{1}{x} + 6x^2\right) dx = \ln(x) + 2x^3 + k, \qquad x > 0$$

Ved anvendelse af punktet P, så kan man finde k

$$8 = \ln(1) + 2 \cdot 1^3 + k \Leftrightarrow 8 = 0 + 2 + k \Leftrightarrow k = 6$$

Så forskriften for den stamfunktion F, der gennemløber P er

$$F(x) = \ln(x) + 2x^3 + 6, \qquad x > 0$$

Opgave 5:

a) Man kender $x_0 = 2$ og $f(x_0) = 3$, man kan finde $f'(x_0)$ ved at indsætte $P(2;3)$ i differentialligningen.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2^2 + 1}{3 - 1} = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2}$$

Så tangenten i punktet $P(2;3)$ er

$$y = \frac{5}{2}(x - 2) + 3 = \frac{5}{2}x - 2$$

Som er den ønskede tangentligning.

Opgave 6:

a) Da $f(x)$ er et tredjegradspolynomium, så kan $f'(x)$ have et maksimum. Man kan løse denne opgave vha. toppunktsformlerne for $f'(x)$ eller differentialregning. Førstnævnte overlades til læseren.

$$f'(x) = -3x^2 + 12x + 1$$

Så er

$$f''(x) = -6x + 12$$

Ligningen $f''(x) = 0$ løses.

$$-6x + 12 = 0 \Leftrightarrow 6x = 12 \Leftrightarrow x = 2$$

Så når $x = 2$ er $f'(x)$ maksimal. Dette er sandt, da a-værdien i $f'(x)$ er mindre end 0.

Løsningsforslag med hjælpemidler

Opgave 7:

a) Man aflæser kvartilsættet ud fra tallene. Kvartilerne er angivet med farve nedenfor.

6,7,7,7,7,8,8,9,10,11,11,15,15,18,19,19,21,21,22,22,25,29,30,31,32

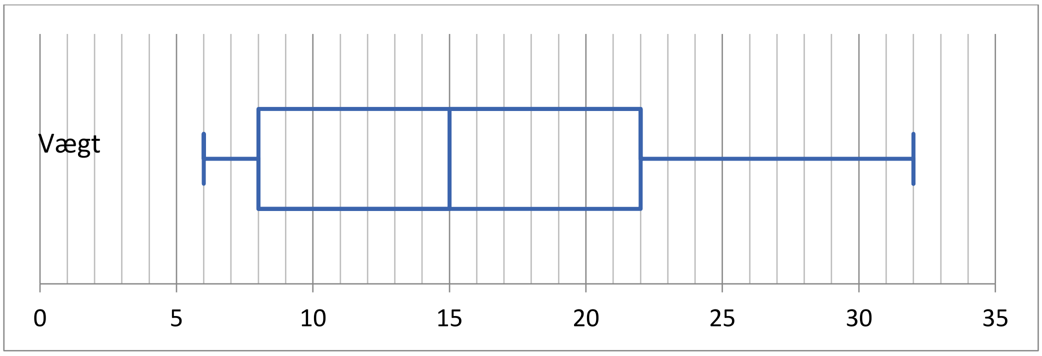
Så man har:

$$Nedre = \frac{8+8}{2} = 8$$
$$Median = 15$$
$$Øvre = \frac{22+22}{2} = 22$$

Det udvidede kvartilsæt er:

$$\{6, 8, 15, 22, 32\}$$

I Excel laves et boksplot, som indsættes i Word:



Opgave 8:

a) Den nemmeste vej er at indsætte oplysningerne i cirklens ligning.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Så der gælder:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 25 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x + y^2 + 2y - 23 = 0$$

Man kan gå den anden vej ved at foretage kvadratkomplementering af ligningen, som er angivet.

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y - 23 = 0 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x + y^2 + 2y = 23 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x + 1^2 + y^2 + 2y + 1^2 = 23 + 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 25 \Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5^2$$

Så man kan se, at det passer med oplysningerne fra beskrivelsen af opgaven.

b) Man isolerer x i ligningen l.

$$x - 7y + 17 = 0 \Leftrightarrow x = 7y - 17$$

Som indsættes i ligningen for cirklen.

$$\begin{aligned}
&(7y - 17)^2 - 2 \cdot (7y - 17) + y^2 + 2y - 23 = 0 \Leftrightarrow \\
&50y^2 - 250y + 300 = 0 \Leftrightarrow \\
&y^2 - 5y + 6 = 0 \Leftrightarrow \\
&(y - 3)(y - 2) = 0
\end{aligned}$$

Det giver y-koordinaterne $y = 3$ og $y = 2$. Man finder x-koordinaterne ved at indsætte ovenstående i ligningen for linjen l eller cirklen. Det er nok nemmest at vælge for linjen l.

$$x = 7 \cdot 2 - 17 = -3$$
$$x = 7 \cdot 3 - 17 = 4$$

Dermed er skæringspunkterne

$$P(-3; 2), \qquad Q(4; 3)$$

Opgave 9: [Via Maple]

a) I Maple indlæses tabellens oplysninger og der laves potensregression.

```
restart
with(Gym) :
P1 := [288, 298, 308, 318, 328, 338, 348, 358, 368] :
P2 := [340, 346, 352, 357, 363, 369, 374, 379, 385] :
v(T) := PowReg(P1, P2, T) :
v(T)
                19.6249553592375 T^0.503669739190326          (1)
```

Dermed blev tallene a og b fundet til:

$$a \approx 0.50367$$
$$b \approx 19.62496$$

b) Når temperaturen T er 250, så er $v(250)$:

```
v(250)
                      316.649273752712                        (2)
```

Dvs. lydens hastighed er $316.64927 m/s$.

c) Når temperaturen vokser med 5%, så skal der findes den procentvise ændring af hastigheden.

$$r_{v(T)} = ((1 + r_T)^a - 1) \cdot 100\%$$

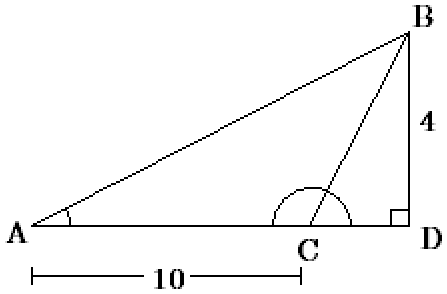
Man har

$$r_{v(T)} = ((1 + 5/100)^{0.50367} - 1) \cdot 100\% = 2.48786\%$$

Så når temperaturen øges med 5%, så øges hastigheden i gassen med 2.48786%

Opgave 10:

a) Skitsen er lavet i MS Paint:



Arealet af trekanten er

$$T = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$$

b) Længden $|AB|$ udregnes vha. arealformlen for en vilkårlig trekant idet arealet kendes.

$$20 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot AB \cdot \sin(20) \Leftrightarrow 40 = 10 \cdot AB \cdot \sin(20) \Leftrightarrow$$
$$4 = AB \cdot \sin(20) \Leftrightarrow AB = \frac{4}{\sin(20)} = 11.695$$

Vinkel C_{stump} bestemmes. Man finder $|BC|$ først.

$$|BC| = \sqrt{10^2 + 11.695^2 - 2 \cdot 10 \cdot 11.695 \cdot \cos(20)} = 4.12$$

Sinusrelationerne benyttes.

$$\frac{\sin(20)}{4.12} = \frac{\sin(C)}{11.695} \Leftrightarrow \sin(20) \cdot 11.695 = 4.12 \cdot \sin(C) \Leftrightarrow$$
$$\sin(C) = \frac{\sin(20) \cdot 11.695}{4.12} \Leftrightarrow C = \arcsin\left(\frac{\sin(20) \cdot 11.695}{4.12}\right) = 76.13^o$$

Dette var vinkel C_{spids}, vinkel C_{stump} findes ved

$$C_{stump} = 180^o - C_{spids} = 180^o - 76.13^o = 103.87^o$$

Opgave 11: [Via Maple]

a) Man differentierer funktionen vha. produktreglen. Lad $a(x) = x^2 + 2x - 2$ og $b(x) = \mathrm{e}^{-x}$, så er $a'(x) = 2x + 2$ og $b'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, så

$$f'(x) = a(x) \cdot b'(x) + a'(x) \cdot b(x)$$
$$= (x^2 + 2x - 2) \cdot (-\mathrm{e}^{-x}) + (2x + 2) \cdot \mathrm{e}^{-x}$$

I Maple:

$restart$
$with(Gym):$
$f(x) := (x^2 + 2x - 2) \cdot \exp(-x)$

$$f := x \mapsto (x^2 + 2x - 2)\,\mathrm{e}^{-x} \quad \textbf{(1)}$$

$f'(x) = 0$

$$(2x + 2)\,\mathrm{e}^{-x} - (x^2 + 2x - 2)\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \textbf{(2)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = 2], [x = -2]] \quad \textbf{(3)}$$

Så laves der fortegnsvariation. Man vælger -3, 0 og 3. I Maple udregnes værdierne:

$f'(-3)$

$$-5\,\mathrm{e}^{3} \quad \textbf{(4)}$$

$f'(0)$

$$4 \quad \textbf{(5)}$$

$f'(3)$

$$-5\,\mathrm{e}^{-3} \quad \textbf{(6)}$$

Der er et "Minus-Plus-Minus" tilfælde. Monotoniskemaet laves.

x		-2		2	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\rightarrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$

Dermed kan man slutte, at

- $f(x)$ er aftagende i intervallet $]-\infty; -2]$ og $[2; \infty[$
- $f(x)$ er voksende i intervallet $[-2; 2]$

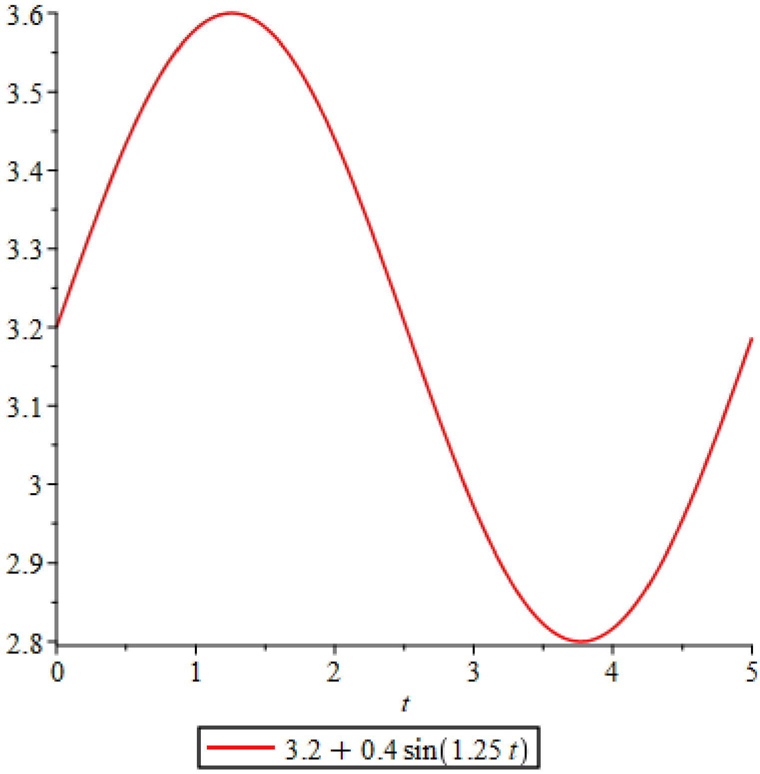
Opgave 12:

a) Tegningen laves i Maple.

restart
with(*Gym*) :
$f(t) := 3.2 + 0.4 \cdot \sin(1.25 \cdot t)$

$$f := t \mapsto 3.2 + 0.4 \sin(1.25\, t) \quad \textbf{(1)}$$

plot($f(t)$, $t = 0 ..5$, *legend* = $f(t)$, *color* = "Red")



Man løser $f'(t) = 0$ i det samme interval og anvender den dobbelte afledede til at afgøre, om hvor $f(t)$ har maksimum.

intervalsolve($f'(t) = 0$, $t = 0 ..5$)

$$[1.256637061, 3.769911184] \quad \textbf{(2)}$$

$f''(1.256637061)$

$$-0.62500 \quad \textbf{(3)}$$

$f''(3.769911184)$

$$0.62500 \quad \textbf{(4)}$$

Da $f''(1.256637061) = -0.62500$ så der maksimum,
Da $f''(3.769911184) = 0.62500$ så er der minimum, det betyder at

$$t = 1.256637061$$

Er maksimal.

b) I Maple løses ligningen $f(t) = 3.5$

$f(t) := 3.2 + 0.4 \cdot \sin(1.25 \cdot t)$

$$f := t \mapsto 3.2 + 0.4 \sin(1.25\, t) \quad \textbf{(1)}$$

$intervalsolve(f(t) = 3.5, t = 0..5)$

$$[0.6784496632, 1.834824460] \quad \textbf{(2)}$$

Så efter 0.678 og 1.835 sekunder efter påbegyndelsen af vejrtrækningen er der 3.5 liter luft i lungerne.

c) I Maple skriver man

$f(t) := 3.2 + 0.4 \cdot \sin(1.25 \cdot t)$

$$f := t \mapsto 3.2 + 0.4 \sin(1.25\, t) \quad \textbf{(1)}$$

$f'(2)$

$$-0.4005718078 \quad \textbf{(2)}$$

Så efter 2 sekunder, aftager luftindholdet med 0.4 liter pr. sekund.

Opgave 13: [Via Maple]

a) Hypotesen opstilles.

H: Aktivitetsniveauet er uafhængigt om man ryger, festryger eller ikke ryger.

I Maple laves en statistisk undersøgelse om H accepteres eller forkastes.

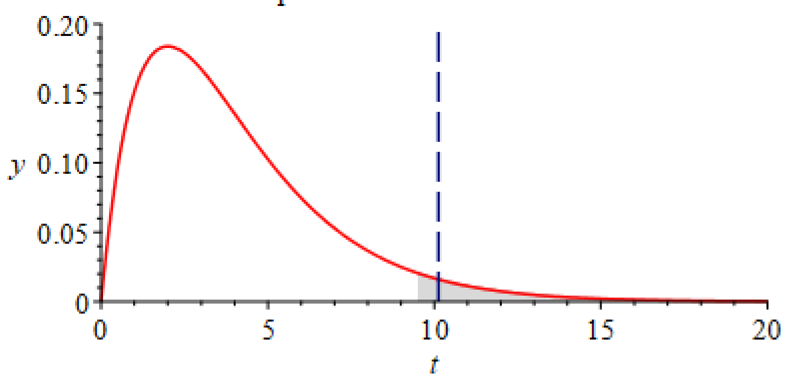
restart

with(Gym) :

$$observerende := \begin{bmatrix} 71 & 45 & 101 \\ 67 & 61 & 115 \\ 98 & 50 & 93 \end{bmatrix} :$$

ChiKvadratUtest(observerende, level = 0.05)

χ^2-teststørrelse = 10.128
Frihedsgrader = 4
Kritisk værdi = 9.4877
p-værdi = 0.038324



Da p-værdien er mindre end de 5%, der blev testet med, så forkastes H.

Opgave 14: [Via Maple]

a) I Maple bestemmes rumfanget af huset.

restart
with(Gym) :

$$f(x) := \sqrt{25 - \left(\frac{5 \cdot x}{2.1}\right)^2}$$

$$f := x \mapsto \sqrt{25 - 5.668934240\, x^2} \quad \textbf{(1)}$$

$$V = \text{Pi} \cdot \int_{-2.1}^{2.1} (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

$$V = 219.9114858 \quad \textbf{(2)}$$

Ifølge Maple er husets rumfang $220m^3$.

b) Overfladearealet bestemmes i Maple.

$$f(x) := \sqrt{25 - \left(\frac{5 \cdot x}{2.1}\right)^2}$$

$$f := x \mapsto \sqrt{25 - 5.668934240\, x^2} \quad \textbf{(1)}$$

$$\text{O} = 2 \cdot \text{Pi} \cdot \int_{-2.1}^{2.1} \left(f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}\right) \mathrm{d}x$$

$$\text{O} = 203.2844482 \quad \textbf{(2)}$$

Så overfladearealet er $203.3m^2$.

Opgave 15:

a) Man indsætter $h = 4$ i differentialligningen.

$$\frac{dh}{dt} = 0.16 \cdot 4 = 0.64$$

Græshøjden vokser med $0.64cm$ pr. døgn efter sidste græsslåning.

b) Differentialligningen løses.

$$h(t) = c\mathrm{e}^{0.16t}$$

Konstanten c bestemmes.

$$3 = c \cdot \mathrm{e}^{0.16 \cdot 0} \Leftrightarrow c = 3$$

Dermed er den partikulære løsning

$$h(t) = 3\mathrm{e}^{0.16t}$$

Man løser ligningen $h(t) = 8$ og finder t.

$$3\mathrm{e}^{0.16t} = 8 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{0.16t} = \frac{8}{3} \Leftrightarrow \ln(\mathrm{e}^{0.16t}) = \ln\left(\frac{8}{3}\right) \Leftrightarrow 0.16t = \ln\left(\frac{8}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{8}{3}\right)}{0.16} = 6.13$$

Der går ca. 6 dage mellem de to græsslåninger.

Opgave 16: [Via Maple]

a) Arealet af trekanten ABC bestemmes, når $t = 4$.

restart
with(Gym) :
$A := [3, 0, 0] :; B := [0, 5, 0] :; C := [0, 0, 4] :$
$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle$

$$\overrightarrow{AB} := \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$\overrightarrow{AC} := \langle C - A \rangle$

$$\overrightarrow{AC} := \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\begin{bmatrix} 20 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20^2 + 12^2 + 15^2} \xrightarrow{\text{at 5 digits}} T = 13.866$

Så ifølge Maple er arealet $T = 13.866$ af trekanten ABC.

b) I Maple sættes retningsvektoren l lig med normalvektoren for planen α som udspænder trekanten ABC. Dermed løses der et ligningssystem, sådan så man får de talværdier der gør, at retningsvektoren er lig med normalvektoren idet normalvektoren er vinkelret på planen. Normalvektoren for ABC opstilles.

restart
with(Gym) :
$A := [3, 0, 0] :; B := [0, 5, 0] :; C := [0, 0, t] :$
$\overrightarrow{AB} := \langle B - A \rangle :$
$\overrightarrow{AC} := \langle C - A \rangle :$
$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\begin{bmatrix} 5\,t \\ 3\,t \\ 15 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Dermed kan man nu sætte vektorerne lig hinanden. Man får

$$\begin{pmatrix} 5t \\ 3t \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10s \\ 6s \\ 15s \end{pmatrix}$$

Man løser to ligninger med to ubekendte, så

$$5t = 10s, \qquad 3t = 6s, \qquad 15 = 15s$$

Løses sidste ligning fås $s = 1$ og indsættes denne i de to andre ligninger, har man

$$5t = 10 \Leftrightarrow t = 2$$

Så værdien $t = 2$ gør, at planen er vinkelret på linjen l.