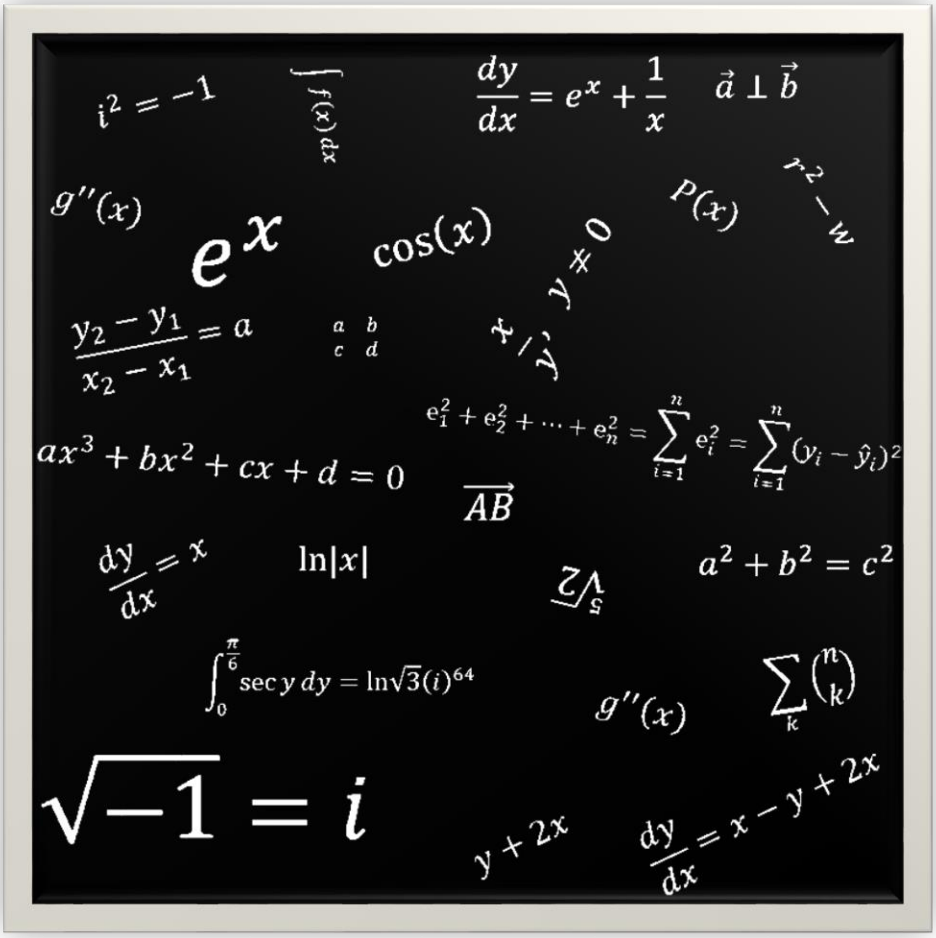
MATEMATIK

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik

December 2012



Anders Jørgensen & Mark Kddafi

2016

MATEMATIK C-NIVEAU

Vejledende eksempler på eksamensopgaver og eksamensopgaver i matematik

Dette kapitel indeholder eksempler på eksamenssæt på forskellige niveauer. Der vil blive foretaget beregninger samt illustrationer i CAS programmer herunder GeoGebra. Maple 2016 anvendes til de mere komplicerede udregninger, idet man forudsætter, at man kan anvende CAS til eksamen. Desuden løses delprøve 1 uden hjælpemidler. Følgende eksamenssæt anvendes:

- Matematik C-niveau, HF fredag d. 7 december 2012
- Matematik B-niveau, HF fredag d. 7 december 2012
- Matematik B-niveau, STX fredag d. 7 december 2012
- Matematik A-niveau, STX fredag d. 7 december 2012

For anvendelse af dokumentet, anbefales det, at man prøver at løse opgaven først, inden man anvender løsningerne.

Anders Jørgensen & Mark Kddafi
2016

Vejledende eksempler på eksamensopgaver

Matematik C, HF - december 2012

Opgave 1

a) Man anvender renteformlen,

$$K_n = K_0 \cdot (1+r)^n$$

Man indsætter sine oplysninger.

$$K_7 = 30000 \cdot \left(1 + \left(\frac{2.125}{100}\right)\right)^7 = 34757.276$$

Så efter 7 år står der 34757.276kr.

Opgave 2

a) Man har fået modellen

$$y = 0.31 \cdot d^{2.11}$$

Så er vægten

$$y = 0.31 \cdot 15^{2.11} = 93.953$$

Så med en diameter på 15cm, er vægten 93.953kg

b) Der løses en ligning.

$$0.31 \cdot d^{2.11} = 150$$

$$\Updownarrow$$

Ligningen løses for d vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$d = 18.72336$$

Med en vægt på 150kg er diameteren 18.72cm

c) Hvis træets diameter øges med 2, så har man

$$\frac{y_2 = 0.31 \cdot (2d)^{2.11}}{y = 0.31 \cdot d^{2.11}} = \frac{0.31 \cdot (2d)^{2.11}}{0.31 \cdot d^{2.11}} = \frac{0.31 \cdot d^{2.11} \cdot 2^{2.11}}{0.31 \cdot d^{2.11}} = 2^{2.11} = 4.31$$

Så når diameteren fordobles, øges vægten med ca. 4.31

Opgave 3

a) Da trekanten ABC er vilkårlig, kan cosinusrelationerne anvendes. Man skal redegøre for, at vinkel B er 49.7^o, så man regner på det.

$$\angle A = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4^2 + 7.4^2 - 5.7^2}{2 \cdot 4 \cdot 7.4}\right) = 49.725$$

Så ja. Det passer med antagelsen, at vinkel B er 49.7^o.

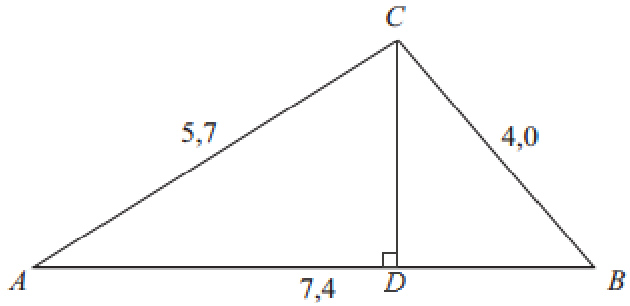
b) Arealet af trekanten bestemmes vha. ½appelsinformlen.

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(B) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7.4 \cdot \sin(49.725) = 11.291$$

Arealet er så bestemt til at være 11.291, der er ikke angivet nogen enheder.

Fortsættes næste side

c) Så hvis højden fra C skærer trekanten, så har man en retvinklet trekant.



Da man kender vinkel B i trekanten BCD, så kan man bestemme højden.

$$b = d \cdot \sin(B)$$

Så indsætter man sine værdier.

$$b = 4 \cdot \sin(49.725) = 3.0518$$

Dermed fandt man højden af det linjestykke fra C til D.

Opgave 4

a) Tallene a og b bestemmes ud fra tabellen.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{210 - 320}{2.80 - 0.30} = -44$$

Så bestemmes b

$$b = y_1 - ax_1 = 320 - (-44) \cdot 0.30 = 333.2$$

Dermed er linjen

$$y = -44x + 333.2$$

b) Tallet a fortæller, at for hver km man når over havoverfalden, stiger tiden af udmattelsen med 44 sekunder.

Man kunne også udføre regression i Maple med denne type opgaver, men da der kun er givet to støttepunkter er det nok med at benytte tallene a og b. Det er kun aktuelt for matematik B- og A-niveau læsere.

Opgave 5

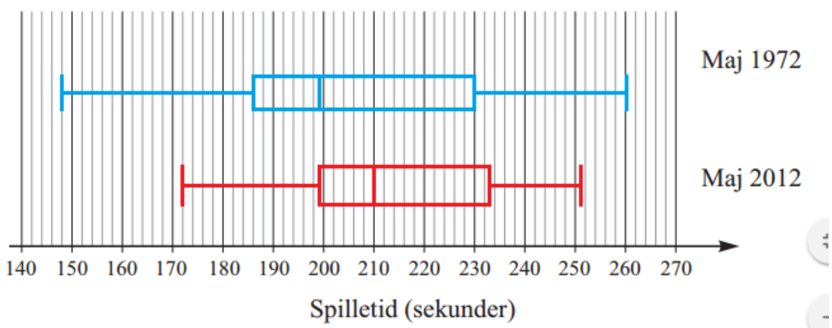
a) Kvartilsættet aflæses til:

$$\{172, 199, 210, 233, 251\}$$

b) Så regnes kvartilsættet ud fra oplysningerne.

$$148, 153, 185, 186, 192, 194, 197, 199, 199, 226, 230, 230, 237, 251, 260$$

Medianen er 199. Nedre kvartil er 186 og øvre kvartil er 230. Så har man endelige de oplysninger, der kan anvendes til at tegne et boksplot.



Fortsættes næste side

Sammenligning:
Det ses, at spilletiden i 1972 var mere bredt og det viste sig også, at man spillede generelt længere tid, end man gjorde i år 2012. I 1972 er medianen hele 199, hvor i år 2012 er det nedre kvartil, så det ses, at der i år 2012 spilles 25% eller mindre af de amerikanske sange på 199 sekunder.

Opgave 6

a) Ud fra det man kan se, kan man opstille en model over danskernes vinforbrug. Man har så

$$y = 192 \cdot 1.013^x$$

Fordi $a = 1 + r$ hvis man indsætter tallene fås $a = 1 + 0.013 = 1.013$
Derved har man modellen der gælder fra år 2010.

b) Man skal her løse en ligning. Så man har:

$$192 \cdot 1.013^x = 200 \Leftrightarrow$$
$$1.013^x = \frac{200}{192} \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{\ln\left(\frac{200}{192}\right)}{\ln(1.013)} = 3.160$$

Dvs. i år 2013 vil danskernes vinforbrug være 200mio/ltr.

Opgave 7

a) Man finder indekstallet i år 2012.

$$\frac{1074}{100} = \frac{1254}{x}$$

$$\Updownarrow$$ *Ligningen løses for x vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$x = 116.7598$$

Sådan fandt man indekstallet i år 2012.

b) Der tjekkes for, om hvilken der er steget mest. Man anvender indekstallene og udnytter fremskrivningsfaktorerne. Først for SU'en.

$$F_{2007-2012} = \frac{116.7598}{100} = 1.167598$$

Omregnes til procent.

$$(1.167598 - 1) \cdot 100\% = 16.7598\%$$

Så tjekkes der for charterrejserne.

$$F_{2007-2012} = \frac{132.3}{114.1} = 1.1595092$$

Omregnes til procent.

$$(1.1595092 - 1) \cdot 100\% = 15.95092\%$$

Dvs. at SU'en er steget mest.

Vejledende eksempler på eksamensopgaver

Matematik B, HF - december 2012

Delprøve 1

Opgave 1

a) Man anvender formlen og indsætter sine oplysninger. Så er

$$20 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot (4+6) \Leftrightarrow 20 = \frac{h}{2} \cdot 10 \Leftrightarrow 40 = 10h \Leftrightarrow h = \frac{40}{10} = 4$$

Så det må være højden.

Opgave 2

a) Forstørrelsesfaktoren findes.

$$k = \frac{|CB|}{|DE|} = \frac{4}{2} = 2$$

Så har man længden $|AC|$ og man skal finde $|AE|$.

$$|AE| = \frac{|AC|}{k} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Opgave 3

a) Den lineære model regnes.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7-5}{4-0} = \frac{1}{2}$$

Så beregnes b

$$b = y_1 - ax_1 = 5 - \frac{1}{2} \cdot 0 = 5$$

Så er modellen

$$y = \frac{1}{2}x + 5$$

Man tester så punktet.

$$y = \frac{1}{2} \cdot 30 + 5 = 20$$

Så punktet ligger IKKE på linjen.

Opgave 4

a) Ud fra de oplysninger, så kan formlen for den faktoriserede andengradsligning anvendes.

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

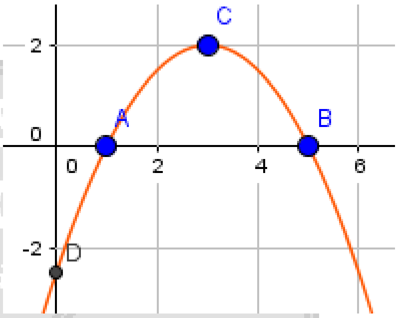
Man indsætter oplysningerne og får

$$2 = a(3-1)(3-5) \Leftrightarrow$$
$$2 = a(2)(-2) \Leftrightarrow$$
$$2 = -4a \Leftrightarrow$$
$$a = \frac{-1}{2}$$

Så kan man finde andengradsligningen

$$f(x) = \frac{-1}{2}(x-1)(x-5) \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{-6x}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2.5$$

Så tegnes grafen.



Godt nok er opgaven uden hj. men dette gør forståelse lettere og så er det i øvrigt også præcist.

Opgave 5

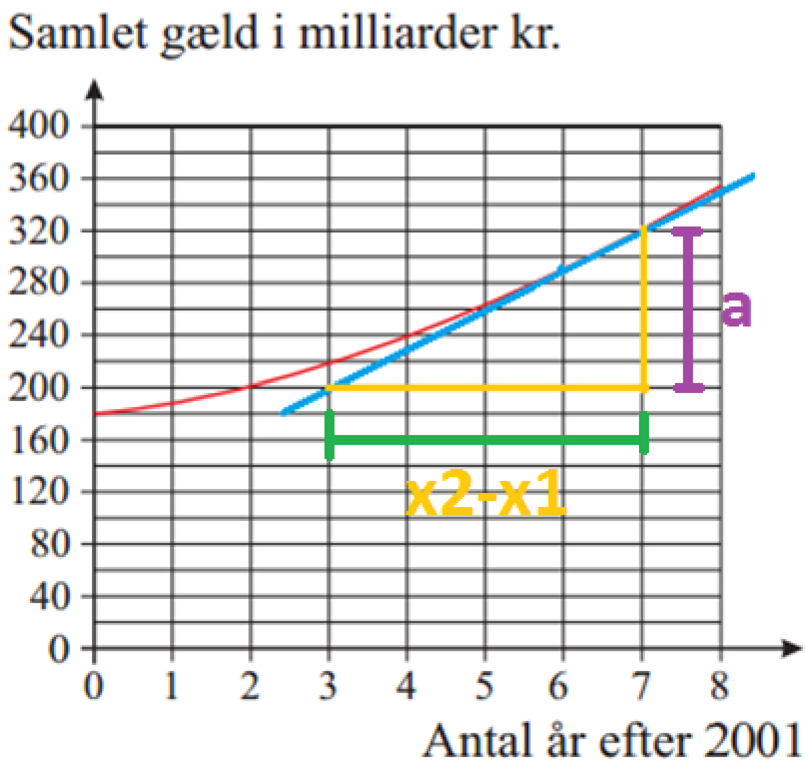
a) Ud fra de oplysninger, så kan man opstille modellen.

$$f(x) = 5.56 \cdot 1.0029^x$$

Som beskriver den voksende befolkningstilvækst.

Opgave 6

a) Ved aflæsning fås at $f(6) = 290$.
Ved aflæsning af $f'(6)$ fås



Så kan man bestemme hældningskoefficienten.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{320 - 200}{7 - 3} = \frac{120}{4} = 30$$

Så hermed er $f'(6) = 30$

Delprøve 2

Opgave 7

a) Diagonalen $|BD|$ bestemmes vha. Pythagoras.

$$|BC|^2 + |CD|^2 = |BD|^2$$

Så er

$$120^2 + 160^2 = |BD|^2 \Leftrightarrow |BD| = \sqrt{40000} = 200$$

b) Så bestemmes arealet af firkanten.

$$T = T_{BCD} + T_{ABD} = \left(\frac{1}{2} \cdot h \cdot g\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin(B)\right)$$

Talværdierne indsættes

$$T = \left(\frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 160\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 140 \cdot \sin(47.9)\right) = 19987.661$$

Dermed blev arealet bestemt.

c) Man anvender arealformlen, som oldtidens egyptere brugte.

$$A = \frac{|AD| + |BC|}{2} \cdot \frac{|AB| + |CD|}{2}$$

Det forudsættes at man så finder $|AD|$. Man anvender cosinusrelationerne.

$$|AD| = \sqrt{200^2 + 140^2 - 2 \cdot 200 \cdot 140 \cdot \cos(47.9)} = 148.5129938365529011$$

Så bestemmes arealet.

$$A = \frac{148.5129938365529011 + 120}{2} \cdot \frac{140 + 200}{2} = 22823.604$$

Arealets difference er så

$$22823.604 - 19987.661 = 2835.943$$

Så den passer ikke helt så godt.

Opgave 8

a) $with(Gym):$

Man definerer oplysningerne

$L1 := [0, 1, 2, 3, 4, 5] :; L2 := [574, 554, 527, 505, 476, 453] :$

Man anvender lineære regression.

$f(x) := LinReg(L1, L2, x) :$

$f(x)$

$$-24.6000000000001\, x + 576.333333333334$$

Så har man bestemt en lineære model der beskriver det fald af øl, som danskerne drikker.

b) For hvert år der går, falder mængden af liter øl med 24.60mio.

c) $f(10)$

$$330.333333333333$$

Danskernes forbrug af øl vil i år 2015 være 330mio liter.

Opgave 9

a) Lad funktionen f være givet.

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$$

Så integreres funktionen

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \int 2x^3 + 6x^2 - 4\,dx = \frac{x^4}{2} + 2x^3 - 4x + k$$

Så har man punktet så løses en ligning.

$$10 = \frac{2^4}{2} + 2 \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 + k \Leftrightarrow$$
$$10 = 8 + 16 - 8 + k \Leftrightarrow$$
$$k = -6$$

Så er stamfunktionen

$$F(x) = \frac{x^4}{2} + 2x^3 - 4x - 6$$

Opgave 10

a) Lad funktionen være givet

$$f(x) = \frac{139}{2} \cdot x^{\frac{19}{25}}$$

Så indsætter man 30 på x

$$f(30) = \frac{139}{2} \cdot 30^{\frac{19}{25}} = 921.715$$

Så er hvilstofskiftet $921.715 kcal/døgn$.

b) Man anvender formlen for at finde r_y.

$$r_y = ((1 + r_x)^a - 1) \cdot 100\%$$

Så indsættes værdierne.

$$r_y = \left((2)^{\frac{19}{25}} - 1\right) \cdot 100\% = 69.349\%$$

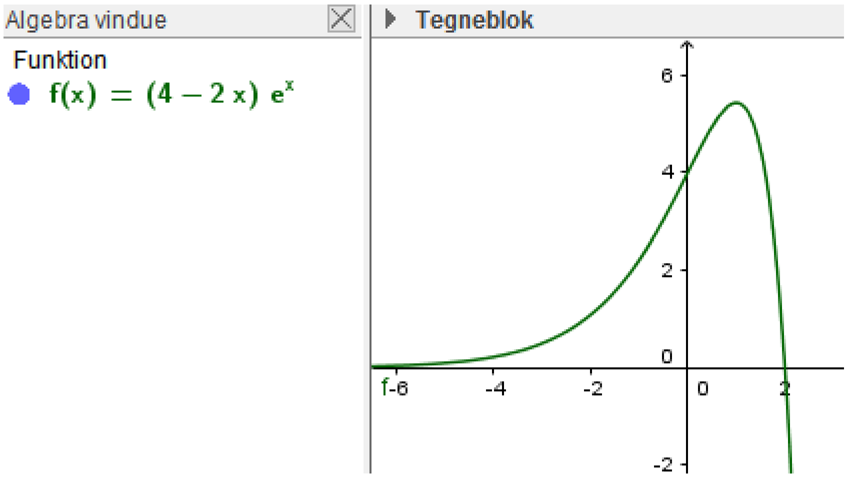
Derved er stofskiftet 69.349% større hos en hanbavian.

Opgave 11

a) Funktionen er givet ved

$$f(x) = (4 - 2x) \cdot \mathrm{e}^x$$

Grafen tegnes.



Så har man en ligning. Hvis førsteaksen skal findes, så er $f(x) = 0$. Derved er ligningen

$$(4 - 2x) \cdot \mathrm{e}^x = 0 \Leftrightarrow (4 - 2x) = 0 \Leftrightarrow -2x = -4 \Leftrightarrow x = 2$$

(Hvilket også kunne aflæses på grafen). Men så har man da den algebraiske metode.

b) Så anvendes integralregning. Man har så

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 (4 - 2x) \cdot \mathrm{e}^x\,dx = [-2\mathrm{e}^x(x - 3)]_0^2$$
$$= -2\mathrm{e}^2(2 - 3) - \left(-2\mathrm{e}^0(0 - 3)\right) = 8.778$$

Dermed er arealet 8.778.

c) Funktionen differentieres og der løses en ligning mht. 0.

$$f'(x) = 0$$

Så er

$$f'(x) = (4\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x) - 2x\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x$$

Hermed har man den afledede af f. Der løses en ligning.

$$2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x = 0 \Leftrightarrow \frac{2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = \frac{0}{\mathrm{e}^x} \Leftrightarrow 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

Dermed har man nulpunktet for f'.
Da man har $f'(x) = 0$, hvor $x = 1$ har man altså den rod, der giver det maksimale for f, så dette testes.

$$f(1) = (4 - 2 \cdot 1) \cdot \mathrm{e}^1 = 2\mathrm{e} \approx 5.43656366$$

Og derved den maksimale f-værdi.

Opgave 12

a) $with(Gym):$
Funktionen defineres.
$h(t) := 200 - 6.0 \cdot t + 27.5 \cdot \left(e^{-1.6 \cdot t} - 1\right):$
Her er h højden (meter) og t er tiden målt i sekunder.
Man indsætter 2 på $h(t)$ og får

$h(2)$

$$161.6209606$$

Så efter 2 sekunder er personen 161.62 meter over jordens overflade.

b) Der løses en ligning mht. t. Så man har
$h(t) = 0$

$$172.5 - 6.0\,t + 27.5\,e^{-1.6\,t} = 0$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 28.75000000]]$$

Så efter 28.75 sekunder er personen landet på jorden. (man må håbe, at personen landede blødt...)

c) Når noget med *hastighed* indgår, har man
$h'(t)$

$$-6.0 - 44.00\,e^{-1.6\,t}$$

Så indsættes 2 i t og man får
$h'(2)$

$$-7.793536975$$

Dvs. man faldhastigheden er 7.79 m/s

Vejledende eksempler på eksamensopgaver

Matematik B, STX - december 2012

Delprøve 1

Opgave 1

a) Ved aflæsning af begge trekanter, ses det, at forstørrelsesfaktoren kan bestemmes ved

$$k = \frac{|DF|}{|AC|} = \frac{30}{6} = 5$$

Hermed kan man bestemme $|BC|$ vha. Pythagoras.

$$|BC|^2 + 6^2 = 10^2 \Leftrightarrow |BC| = \sqrt{100-36} = \sqrt{64} = 8$$

Hermed kendes alle længder i den lille trekant. De store kan med besvær findes ved Pythagoras, men for nemhedens skyld, anvendes forstørrelsesfaktoren.

$$|DE| = |AB| \cdot k = 10 \cdot 5 = 50$$
$$|EF| = |BC| \cdot k = 8 \cdot 5 = 40$$

Hermed har man alle længder.

Opgave 2

a) Toppunktet for $P(x)$ bestemmes. Lad polynomiet være givet.

$$P(x) = 3x^2 - 6x + 7$$

Funktionen differentieres og sættes lig 0.

$$6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Her indsættes x i $P(x)$, så har man

$$P(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 7 = 4$$

Så koordinatsættet til toppunktet for funktionen $P(x)$ er

$$\{x = 1, y = 4\}$$

Opgave 3

a) Ud fra oplysningerne opstilles der en lineære model. Modellen er som givet

$$L(v) = -0.2 \cdot v + 1.5$$

Her aftager mængden i vasen med 0.2ltr vand. I starten var mængden 1.5ltr.

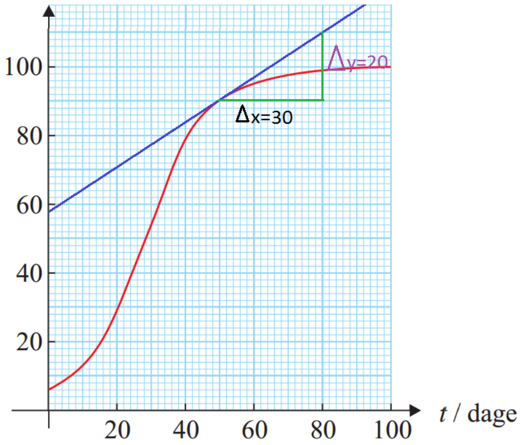
Opgave 4

a) Udtrykket

$$\frac{p \cdot h}{4} = 4M \Leftrightarrow 16M = p \cdot h \Leftrightarrow h = \frac{16M}{p}$$

Opgave 5

a) Der er blevet tegnet grafisk:



Men man kan også regne det analytisk

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{110 - 90}{80 - 50} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

Så efter 50 dage, er væksthastigheden $\frac{2}{3}$.

Opgave 6

To funktioner er givet. Hvis f skal være stamfunktion til g, kan man vælge at integrere g eller differentiere f. Der anvendes det sidste nævnte.

$$f'(x) = 7x^{2.5} + 2x + 0$$

Altså er f stamfunktion til g.

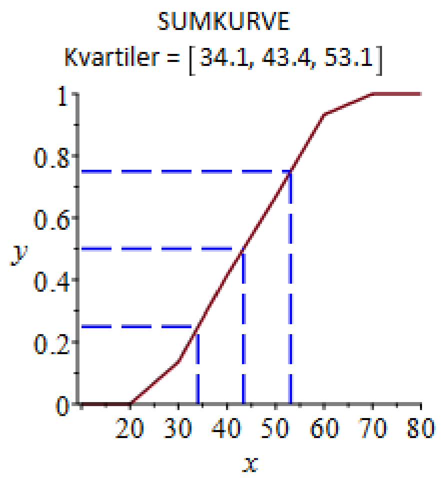
Delprøve 2

Opgave 7

Man kan benytte sig af Maple til statistiske opgaver.

a) $obs := \begin{bmatrix} 20..30 & 13.6 \\ 30..40 & 27.9 \\ 40..50 & 25.3 \\ 50..60 & 26.5 \\ 60..70 & 6.7 \end{bmatrix}:$

Med Maple kan man anvende følgende kommando
plotSumkurve(*obs*)



Hermed blev kvartilsættet automatisk bestemt.

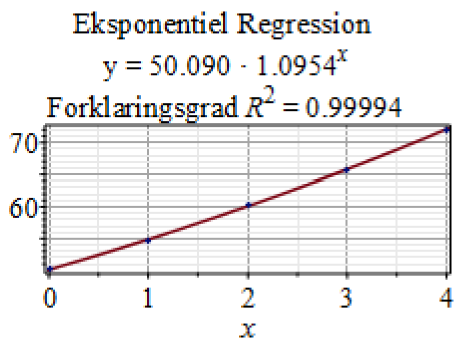
Opgave 8

Opgaven viser en række oplysninger omkring danskernes gæld til det offentlige.

a) I Maple anvendes eksponentiel regression.

$L1 := [0, 1, 2, 3, 4]:; L2 := [50.1, 54.8, 60.2, 65.8, 72.1]:$

ExpReg(*L1*, *L2*)



Hermed fik man bestemt tallene *a* og *b* samt forskriften

$f(x) := 50.090 \cdot 1.0954^x:$

Fortsættes næste side

b) Fordoblingstiden betyder, at man anvender fordoblingskonstanten.

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} = \frac{\ln(2)}{\ln(1.0954)} = 7.60$$

Så efter omtrent 7-8 år, vil danskernes gæld være fordoblet.

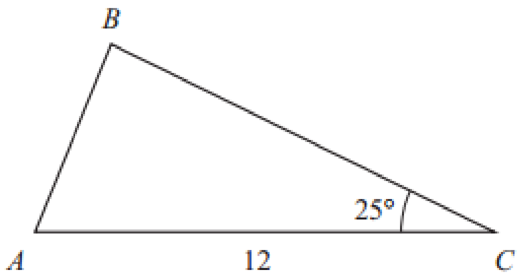
c) Der skal løses en ligning.

$$120 = 50.090 \cdot 1.0954^x \Leftrightarrow$$
$$\frac{120}{50.090} = 1.0954^x \Leftrightarrow$$
$$\ln\left(\frac{120}{50.090}\right) = x \cdot \ln(1.0954) \Leftrightarrow$$
$$x = \frac{\ln\left(\frac{120}{50.090}\right)}{\ln(1.0954)} = 9.588$$

Så ca. i år 2016 vil gælden være 120 mia. kr.

Opgave 9

Der er givet en geometri-opgave, og figuren er angivet nedenfor:



a) Hvis $|BC| = 10$, altså kan man bestemme $|AB|$ med cosinusrelationerne

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos(C)}$$

Værdierne indsættes

$$|AB| = \sqrt{12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \cos(25^o)} = 5.146$$

Arealet bestemmes

$$T = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot \sin(C)$$

Værdierne indsættes

$$T = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \cdot \sin(25^o) = 25.357$$

Som er arealet af trekanten med sidelængden $|BC| = 10$.

Fortsættes næste side

b) Da arealet er 15, kan man anvende arealformlen til bestemmelse af $|BC|$.

$$T = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| \cdot \sin(C)$$

Værdierne indsættes

$$15 = \frac{1}{2} \cdot R \cdot 12 \cdot \sin(25)$$

$$\Updownarrow$$

Ligningen løses for |BC| vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$|BC| = 5.915504$$

Da man har $|BC|$ vil man være i stand til at finde den sidste længde hvorefter man kan anvendes cosinusrelationerne til vinkel B.

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2 - 2 \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \cos(C)}$$

Værdierne indsættes

$$|AB| = \sqrt{12^2 + 5.915504^2 - 2 \cdot 12 \cdot 5.915504 \cdot \cos(25^o)} = 7.093$$

Så kan man benytte sig af cosinusrelationerne

$$cosB = \left(\frac{|BC|^2 + |AB|^2 - |AC|^2}{2 \cdot |BC| \cdot |AB|}\right)$$

Så har man

$$\angle B = \cos^{-1}\left(\frac{5.915504^2 + 7.093^2 - 12^2}{2 \cdot 5.915504 \cdot 7.093}\right) = 134.383^o$$

Som er vinkel B.

Opgave 10

a) Det ses, at der er oplysninger nok til at beregne tallene a og b.

$$a = \frac{\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{15}{5}\right)}{\ln\left(\frac{2}{1}\right)} = 1.584962$$

$$b = \frac{y_1}{x_1^a} = \frac{5}{1^{1.584962}} = 5$$

Altså er funktionen

$$y = 5 \cdot x^{1.584962}$$

Der indsættes 8 i x.

$$y = 5 \cdot 8^{1.584962} = 135$$

Opgave 11

a) Modellen er givet ved

$$O = m^{0.425} \cdot h^{0.725} \cdot 0.007184$$

Man har så $m = 67$, $h = 150$ så er

$$O = 67^{0.425} \cdot 150^{0.725} \cdot 0.007184 = 1.622$$

Så er personens overfladeareal $1.622m^2$

b) Så har man en ligning

$$2.16 = 92^{0.425} \cdot h^{0.725} \cdot 0.007184$$

$$\Updownarrow$$

Ligningen løses for h vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$h = 184.8697$$

Således fandt man højden til $184.8697cm$

Opgave 12

Volumen for en klods er

$$V = l \cdot b \cdot h$$

a) En cylinder er poppet ud og derved er volumen af en cylinder

$$V = h \cdot \pi \cdot d$$

Her er diameteren i cylinderen 6, svarende til radius, som er 3^2. Her isoleres h.

$$V = h \cdot \pi \cdot 9$$

Altså har man volumen

$$V = V_{klods} - V_{cylinder} = lbh - 9\pi h = h(lb - 9\pi)$$

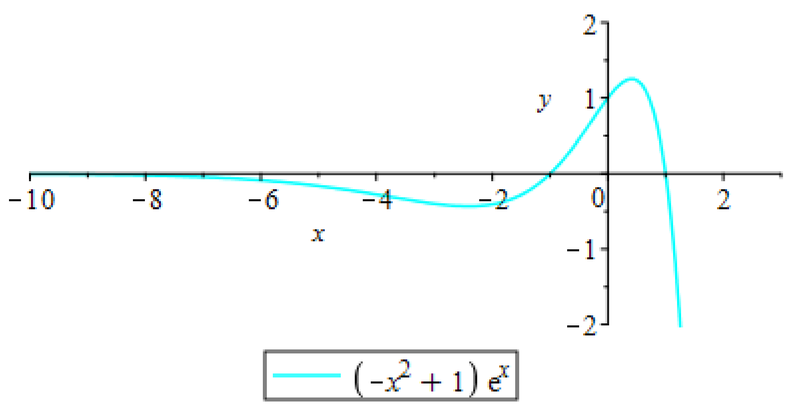
Opgave 13

a) Opgaven løses i Maple 2016.

Funktionen defineres og tegnes.

$f(x) := (1 - x^2) \cdot e^x :$

$plot([f(x)], x = -10 .. 3, y = -2 .. 2, legend = [f(x)], color = ["Cyan"])$



Så har man punktet $P(1, f(1))$ og dermed er tangentligningen så

$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$

$$y = -2\,e\,(x - 1)$$

Dermed har man tangentligningen for f.

b) Monotoniforholdene bestemmes.

$evalf[5](f'(x) = 0)$

$$-2.\,x\,e^{x} + \left(-1.\,x^{2} + 1.\right) e^{x} = 0.$$

$$\xrightarrow{\text{solve for x}}$$

$$[[x = 0.4142135624], [x = -2.414213562]]$$

Så tjekkes der mht. den dobbelte afledede om f er voksenede eller aftagende.

$evalf[5](f''(0.4142135624))$

$$-4.2799$$

Her er $-4.2799 < 0$, dvs. lokal maksimum.

$evalf[5](f''(-2.414213562))$

$$0.25295$$

Her er $0.25295 > 0$, dvs. lokal minimum.

Hermed er f aftagende i intervallet $]-\infty;-2.414213562]$ og voksende i intervallet $[-2.414213562;\, 0.4142135624]$. Endelig er f aftagende i intervallet $[0.4142135624;\infty[$.

c) Integralet angiver altså arealet af første og anden kvadrant afgrænset af funktionen $f(x)$ i intervallet $[-1,1]$. Dermed er arealet bestemt til

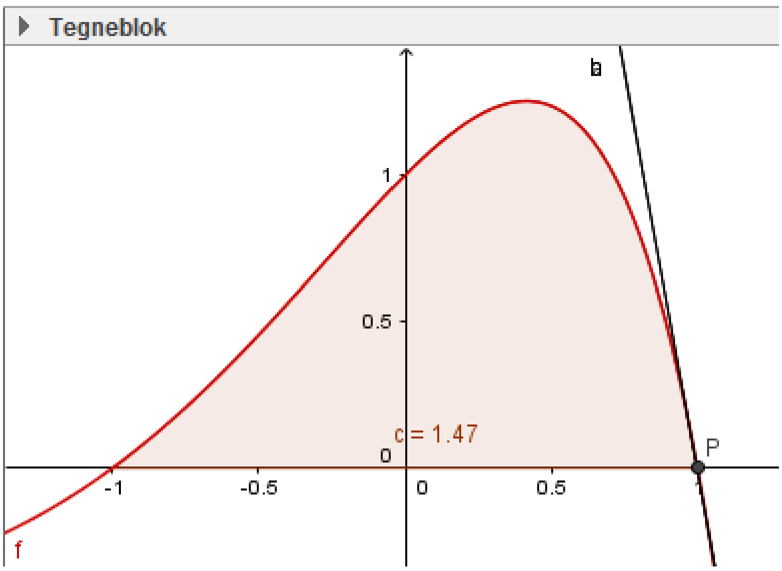
Man anvender integralet.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$4\,e^{-1}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$1.4715$$



Opgave 14

a) H_0 = *Der er uafhængighed mellem støjniveauet og boligkvarter A og B.*

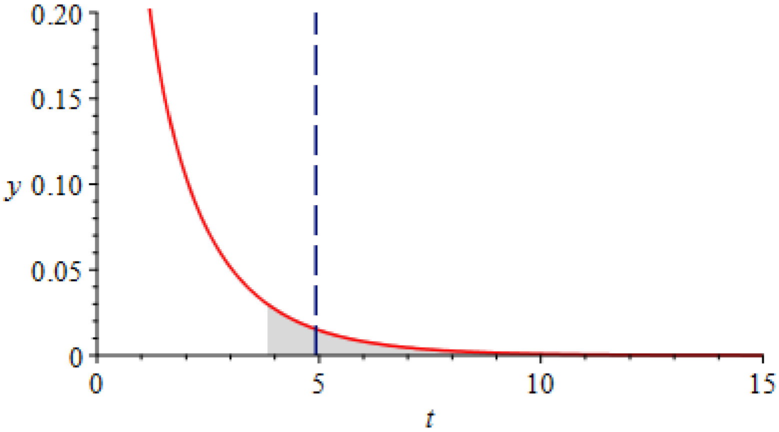
Oplysningerne defineres.

$$obs := \begin{bmatrix} 62 & 71 \\ 140 & 99 \end{bmatrix}:$$

Man anvender kommandoen for χ^2-test

ChiKvadratUtest(*obs*, *level* = 0.05)

χ^2-teststørrelse = 4.9263
Frihedsgrader = 1
Kritisk værdi = 3.8415
p-værdi = 0.026451



Her er $p = 2.6\,\%$ og signifikansniveauet er 5 %, må nulhypotesen kasseres

Der er altså signifikans forskel på, om man bor i boligkvarter A eller B.

Vejledende eksempler på eksamensopgaver

Matematik A, STX - december 2012

Delprøve 1

Opgave 1

Hvis vektor $\vec{a}$ og $\vec{b}$ skal være || gælder det, at man anvender determinanten.

$$\det(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ t & 8 \end{vmatrix} = 3 \cdot 8 - t \cdot 2$$

Så har man en ligning

$$24 - 2t = 0 \Leftrightarrow -2t = -24 \Leftrightarrow t = 12$$

Altså skal t være 12 for at man får vektorerne til at være parallelle.

Opgave 2

Parablen er givet. Bestemmelse af skæring med førsteaksen, forudsættes det, at $f(x) = 0$, altså har man

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

Den løses mht. diskriminanten.

$$d = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 4, \qquad d > 0$$

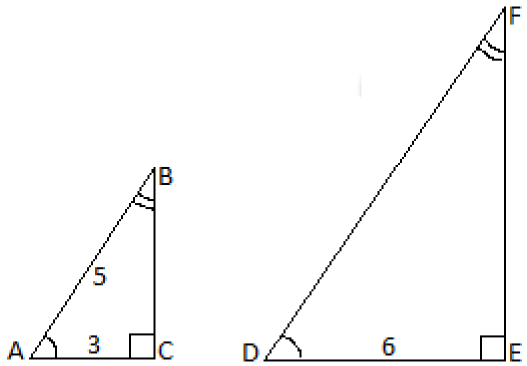
Så har man

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a} = \frac{10 \pm 2}{2} = \begin{matrix} 6 \\ 4 \end{matrix}$$

Så man har rødderne $x = 4 \vee x = 6$

Opgave 3

For nemhedens skyld tegnes figuren i forsvarlig stand.



Længden af $|BC|$ bestemmes ved hjælp af $Pythagoras$.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Her er $|BC| = a, |AC| = b\ og\ |AB| = c.$

$$a^2 + 3^2 = 5^2 \Leftrightarrow a = \sqrt{25 - 9} = 4$$

Dermed har man længden $|BC| = 4$. Så bestemmes $|DF|$. Man kan anvende forstørrelsesfaktoren.

$$k = \frac{|DE|}{|AC|} = \frac{6}{3} = 2$$

Så $|DF| = |AB| \cdot k$ har man $|DF| = 5 \cdot 2 = 10$

Opgave 4

Funktionen f integreres, så man kan finde stamfunktionen til f, nemlig F.

$$f(x) = 3x^2 + 6x$$

Man anvender integralet.

$$\int 3x^2 + 6x\, dx = x^3 + 3x^2 + k$$

Så har man punktet $P = (1,2)$

$$2 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + k \Leftrightarrow k = -2$$

Altså er stamfunktionen

$$F(x) = x^3 + 3x^2 - 2$$

Opgave 5

Differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x}, \qquad x > 0$$

Desuden går grafen igennem $P = (2,7)$. For bestemmelse af tangenten kan man allerede indsætte punktet P, og for at finde den afledede til tangenten kan man indsætte punktet P i differentialligningen. Altså er

$$y = f'(x_0)(x-2) + 7$$

Punktet indsættes i differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7-1}{2} = 3$$

Altså er

$$y = 3 \cdot (x-2) + 7 \Leftrightarrow y = 3x + 1$$

Som er tangenten til grafen for f.

Opgave 6

Funktionen f er givet.

$$f(x) = \ln(x) - x + 3, \qquad x > 0$$

Monotoniforhold fås ved differentiering af f. Så sætter man $f'(x) = 0$

$$0 = \frac{1}{x} - 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$$

Man kan bestemme monotoniforhold ved den dobbelte afledede.

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Så indsættes punktet fra den afledede i den dobbelte afledede

$$f''(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$$

Altså er $-1 < 0$, hvilket betyder, at f har global maks. i $x = 1$. Så er

f voksende i intervallet $[0; 1]$ og aftagende i intervallet $[1; \infty[$

Delprøve 2

Opgave 7

Der er givet to punkter, hhv. centrum og et punkt.

$$C = (-1{,}4), \qquad P = (2{,}8)$$

a) Ligningen for cirklen er af typen

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Altså indsættes centrum i hhv. a og b samt punktet i x og y, så har man radius.

$$(2+1)^2 + (8-4)^2 = 5^2$$

Så kan man indsætte centrum i cirklens ligning samt kende radius. Altså har man

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 5^2$$

Som er cirklens ligning, hvorpå radius er 5^2. Her er P på cirklen.

b) Det ses, at parameterfremstillingen er givet.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad t \in R$$

Skæringspunktet mellem cirklen og parameterfremstillingen findes først ved indsættelse af parameterfremstillingen i cirklens ligning, altså har man

$$\big((-3+t)+1\big)^2 + \big((15+7t)-4\big)^2 = 5^2$$

$$\Updownarrow$$

Ligningen løses for t vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$t = -2 \quad \vee \quad t = -1$$

Så har man sine t −værdier. Disse indsættes i parameterfremstillingen og heraf fås koordinatsættet.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{matrix} -5 \\ 1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{matrix} -4 \\ 8 \end{matrix}$$

Altså er koordinatsættene til skæringerne med cirklen

$$\{x = -5, y = 1\}, \qquad \{x = -4, y = 8\}$$

Opgave 8

Der er givet en masse oplysninger omkring mænd- og kvinders systoliske blodtryk

a) Først finder man kvartilsættet for mændene:

$$119, 119, 120, 120, 120, 121, 121, 122, 122, 123, 123, 123, 127, 127, 127, 128, 129, 129, 129, 129$$

Af de tyve oplysninger, finder man medianen. Den er markeret med rød:

$$119, 119, 120, 120, 120, 121, 121, 122, 122, 123, 123, 123, 127, 127, 127, 128, 129, 129, 129, 129$$

Da det ikke er et eksakt tal, udregnes medianen ved midtpunktet af tallene, altså

$$m = \frac{123 + 123}{2} = 123$$

Nedre og øvre kvartil udregnes, de er markeret med hhv grøn og blå farve.

$$119, 119, 120, 120, 120, 121, 121, 122, 122, 123, 123, 123, 127, 127, 127, 128, 129, 129, 129, 129$$

De regnes på præcis samme måde som medianen

$$K_{nedre} = \frac{120 + 121}{2} = 120.5$$

$$K_{nedre} = \frac{127 + 128}{2} = 127.5$$

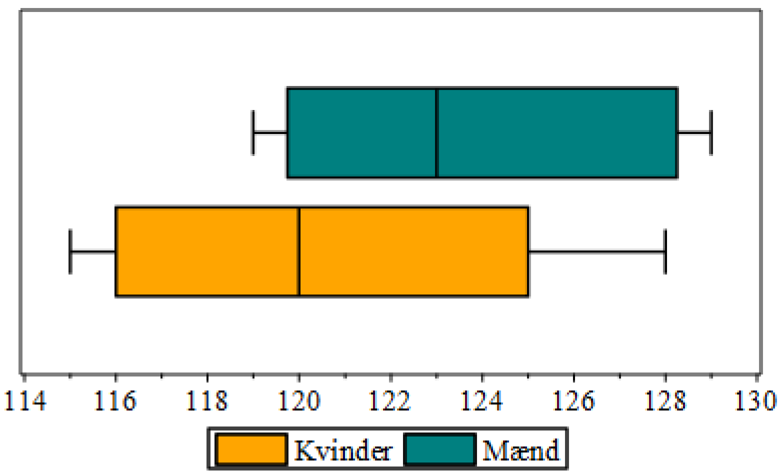
Så har man kvartilsættet

$$Start = 119$$
$$Nedre = 120.5$$
$$Median = 123$$
$$Øvre = 127.5$$
$$Slut = 129$$

Boksplottene tegnes i Maple 2016.

```
obskvinder := [115, 117, 120, 122, 128] :
obsmænd := [119, 120.5, 123, 127.5, 129] :

boksplot(obskvinder, obsmænd)
```



Fortsættes næste side

b) Det ses overordnet, at kvinderne har et systolisk lavere blodtryk end mændene. 25% eller mere af kvinderne har et blodtryk der er lavere end det laveste, som man har registreret hos mændene. Det ses desuden, at medianen for kvinderne ligger ved 50%, hvoraf mændene har 25% af tilfældene med et højt blodtryk. Det ses desuden, at der er et enkelt tilfælde hvor en kvinde har haft et blodtryk, hvoraf mændene ligger på øvre kvartil, dvs. 75% med et blodtryk på 128 eller mere.

Opgave 9

Der er givet en tabel med informationer omkring vægt og hvilstofskifte for dyr.

a) Der udføres potensregression i Maple, således tallene a og b bestemmes.

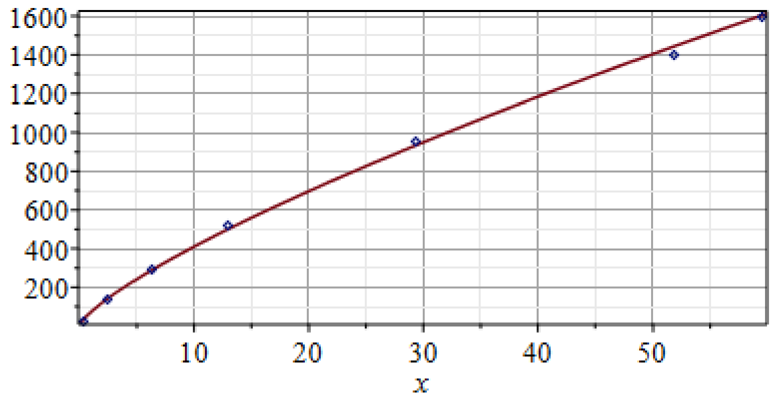
$Vægt := [0.3, 2.4, 6.4, 13, 29.3, 51.8, 59.6]$:; $Hvilestofskifte := [28, 135, 293, 520, 956, 1394, 1591]$:

$PowReg(Vægt, Hvilestofskifte)$

Potens Regression

$y = 70.512 \cdot x^{0.76463}$

Forklaringsgrad $R^2 = 0.99971$



Altså er tallene $a = 0.76463$ og $b = 70.512$ bestemt samt forskriften

$f(x) := 70.512 \cdot x^{0.76463}$:

b) I funktionsforskriften indsættes 20, så man har

$$f(20) = 70.512 \cdot 20^{0.75463} = 676.175$$

Så hvilestofskiftet ændres med $676 kcal/døgn$ for et dyr på $20kg$.

c) Her har man $r_x = 15\%$ og r_y som den ubekendte. Altså anvendes formlen

$$F_y = F_x^a$$

Værdierne indsættes

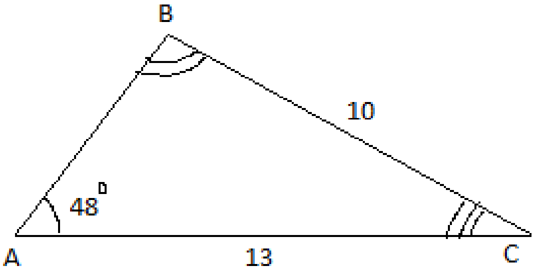
$$r_y = \left(\left(1 + \left(\frac{15}{100}\right)\right)^{0.75463} - 1\right) \cdot 100\% = 11.123\%$$

Så ved en vægtforøgelse på 15% har man et hvilestofskifte på 11.123%

Opgave 10

Der er givet oplysninger over en trekant.

a) Først tegnes trekanten så man kan se hvor galt det går.



Længden $|AB|$ bestemmes, men først skal vinkel B findes vha. sinusrelationerne.

$$\frac{\sin(A)}{|BC|}=\frac{\sin(B)}{|AC|}$$

Værdierne indsættes.

$$\frac{\sin(48^o)}{10}=\frac{\sin(B)}{13}$$

$$\Updownarrow$$

Ligningen løses for <B vha. CAS-værktøjet WordMat.

$$\angle B=75.036^o$$

Her får man af vide, at vinkel B skal være stump, altså er vinkel B

$$\angle B_{stump}=180^o-75.036^o=104.964^o$$

Da man kender vinkel B, kan vinkel C findes.

$$\angle C=180^o-\angle A-\angle B=180^o-48^o-104.964^o=27.036^o$$

Altså anvendes cosinusrelationerne til $|AB|$

$$|AB|=\sqrt{|AC|^2+|BC|^2-2\cdot|AC|\cdot|BC|\cdot\cos(C)}$$

Værdierne indsættes.

$$|AB|=\sqrt{13^2+10^2-2\cdot 13\cdot 10\cdot\cos(27.036^o)}=6.116$$

Som er den ønskede længde.

b) Her får man oplyst et punkt D, så skal man bestemme længden af $|DC|$, når arealet af ΔBCD er 9 altså har man

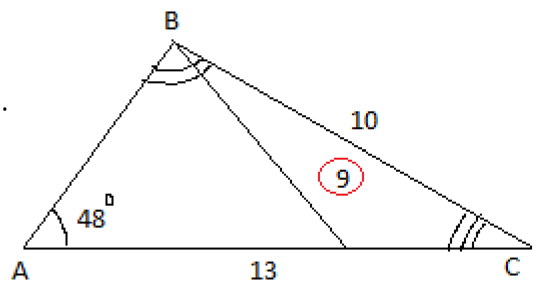
$$T=\frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|DC|\cdot\sin(C)$$

Så indsættes oplysningerne

$$9=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot q\cdot\sin(27.036)\Leftrightarrow 9=5q\cdot\sin(27.036)\Leftrightarrow\frac{9}{\sin(27.036)}=5q\Leftrightarrow$$

$$q=\frac{9}{\sin(27.036)\cdot 5}=3.96$$

Som er arealet af trekanten ΔBCD
Der ses en tegning over '$|DC|$'
Størrelsesforholdene er ikke korrekte.



Opgave 11

En model for den årlige globale CO_2 -udledning er givet ved

$$P(t) = 60.297 \cdot 10^9 \cdot 1.031^t$$

I Maple 2016 defineres funktionen samt fortolkning.

a) $P(t) := 60.297 \cdot 10^9 \cdot 1.031^t$:

Det ses, at der er tale om en eksponentielfunktion (voksende).
Konstanten $b = 60.297 \cdot 10^9$ er begyndelsespunktet for observationen til modellen. (år 1950) og konstanten $a = 1.031$ er den procentvise ændring, dvs. fremskrivninsfaktor. Tallet omregnes til procent og heraf ses det, at det årlige CO_2 udslip forventes stigende med ca. 3.1% om året efter 1950.

b) Her er der givet en ny model. Den defineres i Maple 2016.
$P(t) := 60.297 \cdot 10^9 \cdot 1.031^t$:; $N(t) := 6.72 \cdot 10^7 \cdot t + 2.594 \cdot 10^9$:
Lad den nye funktion være givet ved
$S(t) := \dfrac{P(t)}{N(t)}$: Modellen beskriver den gennemsnitlige udledninng af CO_2 pr. person.
Her indsættes 62, dvs. 2012 hvoraf 1950 er begyndelsesåret.
$S(62)$

$$59.20529637$$

Så i år 2012 udledes der ca. 59.2 $tons\ CO_2$. pr. person.

Opgave 12

I Maple 2016 løses opgaven.
Alle punkter defineres.
local O : Grunden til local er at Maple har beskyttet O og D.
local D :
$O := \langle 0, 0, 0\rangle$:; $A := \langle 7, 3, 0\rangle$:; $B := \langle 1, 1, 6\rangle$:; $C := \langle -5, 13, 0\rangle$:; $D := \langle 1, 8, 0\rangle$:; $E := \langle 4, 2, 3\rangle$:; $F := \langle -1, 5, 4\rangle$:
Alle punkter defineret.

a) Ligningen for planen α har punkterne *ODE*. Der opstilles to vektorer for efter at anvende krydsprodukt.

$\overrightarrow{OD} := D - O$:
$\overrightarrow{OE} := E - O$:

Altså anvendes krydsprodukt.

$\overrightarrow{OD} \times \overrightarrow{OE}$

$$\begin{bmatrix} 24 \\ -3 \\ -30 \end{bmatrix}$$

Hermed har man sine *a*, *b* og *c* værdier til planens ligning. Punktet *E* vælges. Altså har man

$\alpha := 24(x-4) - 3(y-2) - 30(z-3) = 0$

$$24x - 3y - 30z = 0$$

Dermed blev planen α fundet.

b) Afstanden fra punk til plan anvendes formlen 'dist'. Altså man har

$$dist(F, \alpha) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Hermed indsættes værdierne

$$dist(F, \alpha) = \frac{|24 \cdot (-1) + (-3) \cdot 5 + (-30) \cdot 4 + 0|}{\sqrt{24^2 + (-3)^2 + (-30)^2}} = 4.126$$

Som er afstanden fra punktet F til planen α.

Fortsættes næste side

c) Vinkel mellem planer er det samme som vinklen mellem deres normalvektorer.

$$\overrightarrow{n_\alpha} = (24, -3, -30), \qquad \overrightarrow{n_\beta} = (5,6,7)$$

Så har man

$$\overrightarrow{n_\alpha} . \overrightarrow{n_\beta} = \begin{matrix} 24 \cdot 5 \\ -3 \cdot 6 \\ -30 \cdot 7 \end{matrix} = \begin{matrix} 120 \\ -18 \\ -210 \end{matrix}$$

Altså er vinklen mellem vektorerne

$$\angle V_{stump} = \cos^{-1}\left(\frac{120 - 18 - 210}{\sqrt{24^2 + (-3)^2 + (-30)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 6^2 + 7^2}}\right)$$
$$= \cos^{-1}\left(\frac{-108}{\sqrt{1485} \cdot \sqrt{110}}\right) = \cos^{-1}(-0.267217062849074)$$
$$= 105.498^o$$

Hermed blev den stumpe vinkel bestemt. Man kunne også gøre det i Maple 2016.

Lad normalvektorerne være defineret.

$\overrightarrow{n}_\alpha := \langle 24, -3, -30 \rangle :; \overrightarrow{n}_\beta := \langle 5, 6, 7 \rangle :$

$$V = invCos\left(\frac{\overrightarrow{n}_\alpha . \overrightarrow{n}_\beta}{len\left(\overrightarrow{n}_\alpha\right) \cdot len\left(\overrightarrow{n}_\beta\right)}\right)$$

$$V = 105.4987328$$

Hermed blev vinklen (stumpe) fundet.

Opgave 13

Der er givet et andengradspolynomium.

$$f(x) = 0.1x^2 + 1$$

a) Tangenten til f i punktet $P = (5, f(5))$ findes.
Først differentieres funktionen og der indsættes $P = 5$.

$$f(5) = 0.1 \cdot 5^2 + 1 = 3.5$$
$$f'(5) = 0.2 \cdot 5 = 1$$

Så har man

$$y = 1(x - 5) + 3.5 \Leftrightarrow y = x - 1.5$$

Fortsættes næste side

b) For at finde førstekoordinaten til tangenten, har man $x - 1.5 = 0 \Leftrightarrow x = 1.5$
Hermed kan man bestemme volumen, når $f(x)$ samt tangenten drejes 360^o om førsteaksen. Tangenten omdøbes til $g(x)$. Altså har man

Volumen bestemmes. Her er

$f(x) := 0.1x^2 + 1 :; g(x) := x - 1.5 :$

$$V = \mathrm{pi} \cdot \int_0^5 f(x)^2 \, dx - \mathrm{pi} \cdot \int_{1.5}^5 g(x)^2 \, dx$$

$$V = 5.29166666\,\pi$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}}$$

$$16.6243$$

Så volumen af skålen er

$$V = 16.62$$

Opgave 14

a) Differentialligningen løses vha. dsolve.

$$v'(t) - \frac{1}{15-t} \cdot v(t) = \frac{300}{15-t} - 9.81, \; v(0) = 0$$

$$D(v)(t) - \frac{v(t)}{15-t} = \frac{300}{15-t} - 9.81, \; v(0) = 0$$

$$\xrightarrow{\text{solve DE}}$$

$$v(t) = \frac{-\frac{3057}{20}\,t - \frac{981}{200}\,t^2}{-15+t}$$

Altså er forskriften

$$v(t) := \frac{-\frac{3057}{20}\,t - \frac{981}{200}\,t^2}{-15+t} :$$

Fortsættes næste side

Hermed indsættes 1000 lig med $v(t)$

$v(t) = 1000$

$$\frac{-\frac{3057}{20}t - \frac{981}{200}t^2}{-15+t} = 1000$$

$$\xrightarrow{\text{solve for t}} \left[\left[t = -\frac{115285}{981} - \frac{5}{981}\sqrt{649345249}\right], \left[t = -\frac{115285}{981} + \frac{5}{981}\sqrt{649345249}\right]\right]$$

$$-\frac{115285}{981} + \frac{5}{981}\sqrt{649345249}$$

$$-\frac{115285}{981} + \frac{5}{981}\sqrt{649345249}$$

$$\xrightarrow{\text{at 5 digits}} \quad 12.36$$

Så raketten når en hastighed på 1000m/s efter 12.36 sekunder

Opgave 15

a) Der er givet en masse informationer omkring kilen. Det ses, at der kan dannes to retvinklede trekanter i 'kassen'. Volumen for kassen er

$$V = l \cdot b \cdot h$$

Her er $V = x \cdot x \cdot h$. Man har endvidere oplysningen

$$200 = h \cdot x^2 \Leftrightarrow h = \frac{200}{x^2}$$

Trekanten der dannes kan opstilles sådan

$$x^2 + h^2 = hyp^2 \Leftrightarrow hyp = \sqrt{h^2 + x^2}$$

Overfladearealet består af 5 flader, altså er

$$O(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot h \cdot x\right) + x \cdot x + x \cdot h \cdot \sqrt{h^2 + x^2}$$

Desuden er

$$h = \frac{200}{x^2}$$

Altså er

$$O(x) = x + x^2 + x \cdot \left(\frac{200}{x^2}\right) \cdot \sqrt{\left(\frac{200}{x^2}\right)^2 + x^2} \Leftrightarrow$$

$$O(x) = x^2 + \frac{400}{x} + x \cdot \sqrt{\frac{40000}{x^4} + x^2}$$

Fortsættes næste side

b) For at overfladearealet bliver mindst muligt, anvendes da differentialregning.

Funktionen defineres.

$$O(x) := x^2 + \frac{400}{x} + x \cdot \sqrt{\frac{40000}{x^4} + x^2} :$$

$$O'(x) = 0$$

$$2x - \frac{400}{x^2} + \sqrt{\frac{40000}{x^4} + x^2} + \frac{1}{2} \frac{x\left(-\frac{160000}{x^5} + 2x\right)}{\sqrt{\frac{40000}{x^4} + x^2}} = 0$$

$$\xrightarrow{\text{solve}} \quad 5.520395682$$

Fordi $0 < x < 10$.

Der tjekkes for den dobbelte afledede. Heri indsættes roden for den afledede.

$$O''(5.520395682)$$

$$13.25510190$$

Her er 13.25510190>0, dvs. 5.520395682 er den minimale x-værdi.

Løsningerne er hentet på følgende side:

www.matematikhfsvar.page.tl

Vejledende eksempler på eksamensopgaver