Matematik B-niveau HF
28. maj 2019

Dette er minimale løsningsskitser til HF B-niveau eksamen d. 28/05/19. Af CAS kræves: Maple 2020.
NB: Dette er **ikke** en elevbesvarelse. E-mail: `matematikuniverset@hotmail.com`

Delprøve 1.

Opgave 1.

(a) Andengradsligningen $2x^2+x-10=0$, lad $a=2, b=1$ og $c=-10$, så er

$$d=b^2-4ac=1^2-4\cdot 2\cdot(-10)=1-(-80)=81=9^2,\quad d>0. \tag{1}$$

Løsningerne bestemmes.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{d}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{9^2}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm 9}{4}=\begin{cases}\frac{-1+9}{4}=2\\ \frac{-1-9}{4}=\frac{-5}{2}\end{cases} \tag{2}$$

Dermed er $x=\frac{-5}{2}\vee x=2$.

(b) Metode 1: Toppunktsformler

$$x_T=-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{-1}{4} \tag{3}$$

Metode 2: Differentialregning

$$y'=4x+1 \tag{4}$$

Løs $y'=0$ mht. x.

$$4x+1=0\Leftrightarrow 4x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}. \tag{5}$$

Toppunktets førstekoordinat er $x=-\frac{1}{4}$.

Opgave 2.

(a) $x=100$ giver længdepoint

$$y(100)=1.8\cdot(100-90)+60=1.8\cdot 10+60=78. \tag{6}$$

(b) Udregn $y(10+x)-y(x)$.

$$\begin{aligned} y(10+x)-y(x) &= 1.8\cdot(10+x-90)+60-(1.8\cdot(x-90)+60) && (7)\\ &= -84+1.8x-(1.8x-102) && (8)\\ &= -84+1.8x-1.8x+102 && (9)\\ &= 18. && (10)\end{aligned}$$

Dvs. Thomas får 18 længdepoint mere end Andreas.

Opgave 3.

(a) Bestem $f'(x)$ vha. formlen $(x^n)' = nx^{n-1}$.

$$f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3. \tag{11}$$

(b) Sæt $a(x) = x^4$ og $b(x) = \ln(x)$, så er

$$\begin{aligned} g'(x) = (a(x) \cdot b(x))' &= a'(x) \cdot b(x) + a(x) \cdot b'(x) && (12) \\ &= 4x^{4-1} \cdot \ln(x) + \frac{x^4 \cdot 1}{x} && (13) \\ &= 4x^3 \cdot \ln(x) + x^3 && (14) \\ &= x^3 \cdot (4\ln(x) + 1). && (15) \end{aligned}$$

Opgave 4.

(a) Bemærk, at "og"indgår, så der er tale om noget med multiplikationsprincippet.

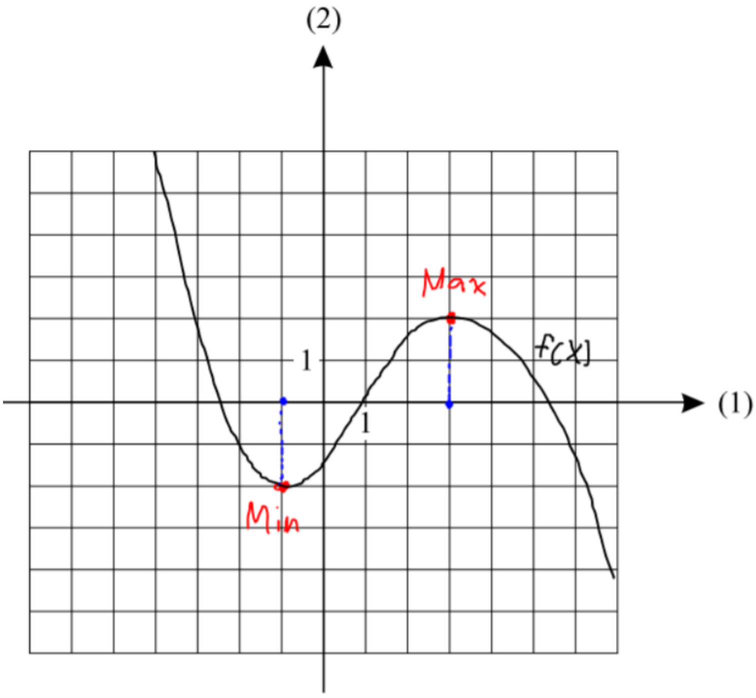
$$\frac{K(2,1) \cdot K(5,2)}{K(7,3)} = \frac{\frac{2!}{1!(2-1)!} \frac{5!}{2!(5-2)!}}{\frac{7!}{3!(7-3)!}} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} \tag{16}$$

Dvs. sandsynligheden er $\frac{4}{7}$ for, at det bliver en voksen og to børn.

Forklaring: Der er to voksne i alt, og der skal vælges en ud af de to, dvs. $K(2,1)$. Der er i alt 5 børn, og der skal vælges 2 ud af de 5, det giver $K(5,2)$. Dette skal multipliceres sammen, eftersom der skal være 1 voksen og to børn. Vi ved, at "og"betyder multiplikationsprincippet og "eller"betyder additionsprincippet. Der divideres med antal mulige udfald (husk, gunstige udfald divideret med mulige udfald), dvs. i alt 7 personer, hvoraf 3 vælges til at skulle vaske op, det giver $K(7,3)$. . Derfor er regnestykket som angivet i (16)

Opgave 5.

(a) Se skitsen.



Opgave 6.

(a) Der skal redegøres for, at $C(1,3)$ er centrum og $r = 5$ er radius for følgende cirkelligning,

$$x^2 - 2x + y^2 - 6y - 15 = 0. \tag{17}$$

Metode 1: Det bemærkes, at $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ og $y^2 - 6y = (y-3)^2 - 9$. Dermed er

$$x^2 - 2x + y^2 - 6y - 15 = 0 \Leftrightarrow \tag{18}$$
$$(x-1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 - 15 = 0 \Leftrightarrow \tag{19}$$
$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25 = 5^2. \tag{20}$$

Dvs. centrum er $C(1,3)$ og $r = 5$ som ønsket.

Metode 2: Hvis ikke man direkte kunne få idéen som ovenstående, men man ved, at cirklens ligning er på formen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ kan man løse nogle små ligninger. Man ved, at

$$(x-a)^2 = x^2 {\color{red}-2ax} + a^2 \tag{21}$$

og

$$(y-b)^2 = y^2 {\color{blue}-2yb} + y^2 \tag{22}$$

ud fra anden kvadratsætning. Man sætter derfor to ligninger op på baggrund af kendskab fra

$$x^2 - 2x + y^2 - 6y - 15 = 0. \tag{23}$$

og løser for hhv. a og b. Man

$$-2ax = -2x \Leftrightarrow a = 1, \tag{24}$$

$$-2yb = -6y \Leftrightarrow b = 3. \tag{25}$$

Så er den søgte ligning

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \underbrace{a^2 + b^2 - \gamma}_{=r^2} \tag{26}$$

vi fandt jo, at $a = 1$ og $b = 3$ samt at $\gamma = -15$, så $r^2 = 1^2 + 3^2 - (-15) = 25$, og den søgte ligning er

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25 \tag{27}$$

Dvs. centrum er $C(1,3)$ og $r = 5$ som ønsket.

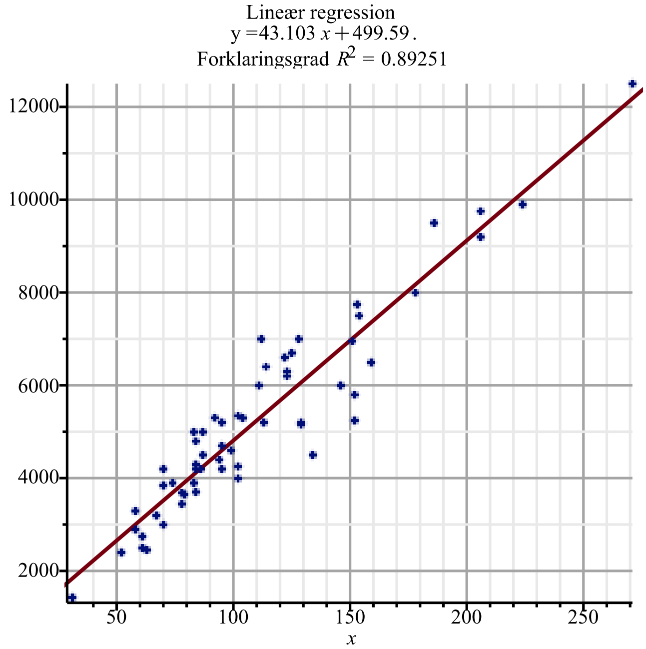
Delprøve 2.

Se næste side. Løsninger er lavet i Maple 2020.

Pdf-fil eksporteret til LaTeX.
Matematik B delprøve 2, 28. maj 2019.

Vi forventer folk har opgavesættet ved hånden.

Opgave 7:
restart; *with*(*Gym*) :
L1 := [123, 84, 123, 112, 206, 152, 114, 122, 125, 154, 52, 58, 99, 84, 186, 92, 86, 70, 95, 111, 104, 70, 113, 87, 83, 102, 84, 94, 31, 129, 102, 95, 67, 84, 70, 95, 83, 87, 63, 58, 61, 78, 78, 102, 128, 61, 79, 74, 129, 152, 178, 159, 151, 206, 153, 271, 224, 134, 146] :
L2 := [6195, 4295, 6295, 7000, 9750, 5245, 6400, 6600, 6700, 7500, 2398, 2895, 4595, 4795, 9495, 5300, 4195, 2995, 5195, 5995, 5295, 4195, 5195, 4995, 4995, 4249, 4195, 4395, 1425, 5149, 5345, 4195, 3195, 3699, 3845, 4698, 3898, 4495, 2450, 3295, 2495, 3685, 3445, 3995, 6995, 2745, 3650, 3895, 5195, 5795, 7995, 6495, 6950, 9200, 7745, 12500, 9895, 4495, 5995] :
(a) Der foretages lineær regression og dette giver automatisk et punktplot...
LinReg(*L1*, *L2*)



Forskriften for f bestemmes og defineres ud fra ovenstående plot.
$f(x) := 43.103 \cdot x + 499.59$:

(b) Residualspredningen bestemmes vha. en kommando.
residualspredning(*L1*, *L2*, *LinReg*)

$$695.331412644415 \quad (1)$$

Opgave 8: Funktionen defineres.
restart : *with*(*Gym*) :
$f(x) := 3\,x - \exp(x) + 5$:
(a) Ligningen $f'(x) = 0$ løses mht. *x*.
solve($f'(x) = 0$)

$$\ln(3) \tag{2}$$

evalf[5](%)

$$1.0986 \tag{3}$$

(b) Monotoniforholdene for $f(x)$ bestemmes. Resultatet fra a) anvendes her. Der gælder at $1 < \ln(3) < 2$, dermed laves der fortegnsvariation, hvor $x = 1$ og $x = 3$ vælges.
$f'(1.)$

$$0.281718172 \tag{4}$$

$f'(3.)$

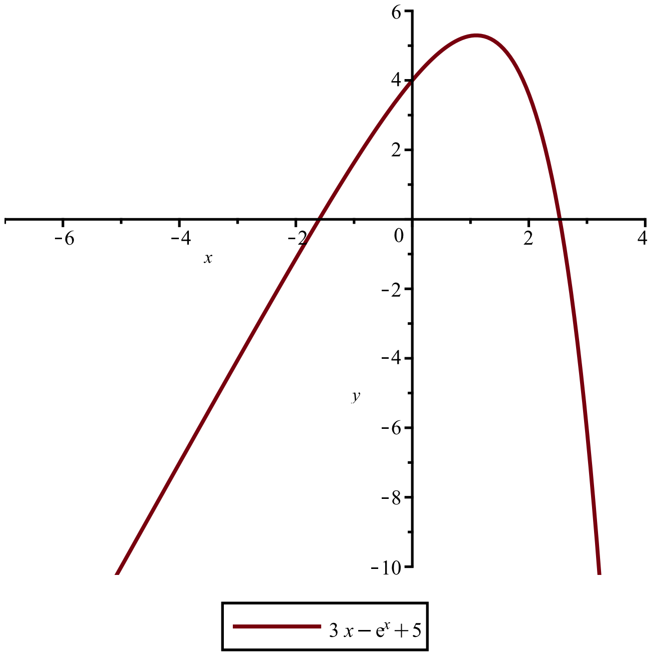
$$-17.08553692 \tag{5}$$

Monotoniskema

x		$\ln(3)$	
$f'(x)$	$+$	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$

Dvs. $x = \ln(3)$ giver et maksimum for f. Deremd er funktionen:
- Voksende i intervallet $]-\infty; \ln(3)]$
- Aftagende i intervallet $[\ln(3); \infty[$.

Visualiseringen giver:
plot($f(x)$, $x = -7..4$, $y = -10..6$, *legend* = $f(x)$)



Opgave 9 metode 1:

(a) Cirklens ligning er givet ved $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
Da linjen $l\, a \cdot c=-1$, hvor $a=2$. Man har derfor
$solve(2\cdot c=-1)$

$$-\frac{1}{2} \tag{6}$$

Dvs. $y=-\frac{1}{2}\cdot x+d$. Tallet d findes vha. P, og da $P(0,4)$ følger det, at $d=4$ fordi $x=0$. Dermed er den vinkelrette linje til l,

$m: y=-\frac{1}{2}\cdot x+4$.

Ligningen m har skæring med førsteaksen i centrum C. Følgende ligning løses.

$solve\left(-\frac{1}{2}\cdot x+4=0\right)$

$$8 \tag{7}$$

Dvs. $x=8$ er førstekoordinaten til C.

Opgave 9 metode 2, normalligningen:

(a) Cirklens ligning er givet ved $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
Da linjen l er tangent til cirklen, løber normalligningen n igennem C. Normalligningen er vinkelret på tangentligningen i det angivende punkt, så man har tangentligningen:

$l: y=2\cdot(x-0)+4=2\,x+4$

derfor er normalligningen

$n: y=\frac{1}{-2}\cdot(x-0)+4=-\frac{1}{2}\cdot x+4$.

Normalligningen har skæring med førsteaksen i centrum C. Følgende ligning løses.

$solve\left(-\frac{1}{2}\cdot x+4=0\right)$

$$8 \tag{8}$$

Dvs. $x=8$ er førstekoordinaten til C.
Læs evt. mere her: https://mathinsight.org/tangent_normal_lines_refresher

Opgave 9 metode 3, vektorregning:

(a) Cirklens ligning er givet ved $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.

Linjen l kan omskrives til $2\,x-y+4=0$, så er normalvektoren til l lig med $\overrightarrow{n_1}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$.

Tager man udgangspunkt fra P, kan man finde tværvektoren til $\overrightarrow{n_1}$ og opstille en ret linje m. Ved skæringspunktet af førsteaksen og m fås førstekoordinaten til C. Det vides, at andenkoordiaten er 0. Man har

$\overrightarrow{n_2}=hat\left(\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right)$

$$\vec{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Dvs. linjen er $x + 2y + c = 0$, men da den skal løbe igennem P og C, løses et ligningssystem
$solve(\{0 + 2 \cdot 4 + c = 0, x + 2 \cdot 0 + c = 0\})$

$$\{c = -8, x = 8\} \tag{10}$$

Dvs. $x = 8$ er førstekoordinaten til C.

Opgave 10:
$restart : with(Gym) :$
(a) Her bestemmes $P(X=8)$ vha. gym-pakken.
$P(X=8) = binpdf\left(20, \frac{18}{37}, 8\right)$

$$P(X=8) = 0.1328788621 \tag{11}$$

Dvs. sandsynligheden er 13.3%

(uden gympakken)
$P(X=8) = \binom{20}{8} \cdot \left(\frac{18}{37.}\right)^8 \cdot \left(1 - \frac{18}{37}\right)^{20-8}$

$$P(X=8) = 0.1328788621 \tag{12}$$

(b) Da $n = 20$ må halvdelen af spillene være 10, dvs. 10 spil. Da der søges efter "mere" end halvdelen af spillene, så benyttes $P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10)$. Man får,
$P(X > 10) = 1 - bincdf\left(20, \frac{18}{37}, 10\right)$

$$P(10 < X) = 0.3650262352 \tag{13}$$

Dvs. sandsynligheden er 36.5%

Man kan i sagens natur også udregne $P(X \geq 11)$, som så stadig er mere end 10 spil. Udregningen bliver da,
$P(X \geq 11) = 1 - bincdf\left(20, \frac{18}{37}, 11 - 1\right)$

$$P(11 \leq X) = 0.3650262352 \tag{14}$$

Dvs. sandsynligheden er 36.5%

(uden gympakken)
$P(X > 10) = 1 - \sum_{i=0}^{10} \left(\binom{20}{i} \cdot \left(\frac{18}{37.}\right)^i \cdot \left(1 - \frac{18}{37}\right)^{20-i}\right)$

$$P(10 < X) = 0.3650262351 \tag{15}$$

eller
$P(X > 10) = \sum_{i=10+1}^{20} \left(\binom{20}{i} \cdot \left(\frac{18}{37.}\right)^i \cdot \left(1 - \frac{18}{37}\right)^{20-i}\right)$

$$P(10 < X) = 0.3650262353 \tag{16}$$

eller

 matematikuniverset@hotmail.com

$$P(X \geq 11) = 1 - \sum_{i=0}^{11-1} \left(\binom{20}{i} \cdot \left(\frac{18}{37.} \right)^{i} \cdot \left(1 - \frac{18}{37} \right)^{20-i} \right)$$

$$P(11 \leq X) = 0.3650262351 \tag{17}$$

eller

$$P(X \geq 11) = \sum_{i=11}^{20} \left(\binom{20}{i} \cdot \left(\frac{18}{37.} \right)^{i} \cdot \left(1 - \frac{18}{37} \right)^{20-i} \right)$$

$$P(11 \leq X) = 0.3650262353 \tag{18}$$

Opgave 11: Funktionen defineres.

$f(x) := 95 \cdot (1 - \exp(-0.16 \cdot x))$:

(a) Længden af en torsk bestemmes, når den er 5 år gammel, dvs.

$f(5)$

$$52.31374841 \tag{19}$$

Den har længden 52.3cm.

(b) Her bestemmes $f'(5)$.

$f'(5)$

$$6.829800254 \tag{20}$$

Når fisken er 5 år gammel, øges dens længde hvert år med 6.8cm.

(c) Udregn grænseværdien for $f(x)$ til at svare på spørgsmålet, eller tegn grafen.

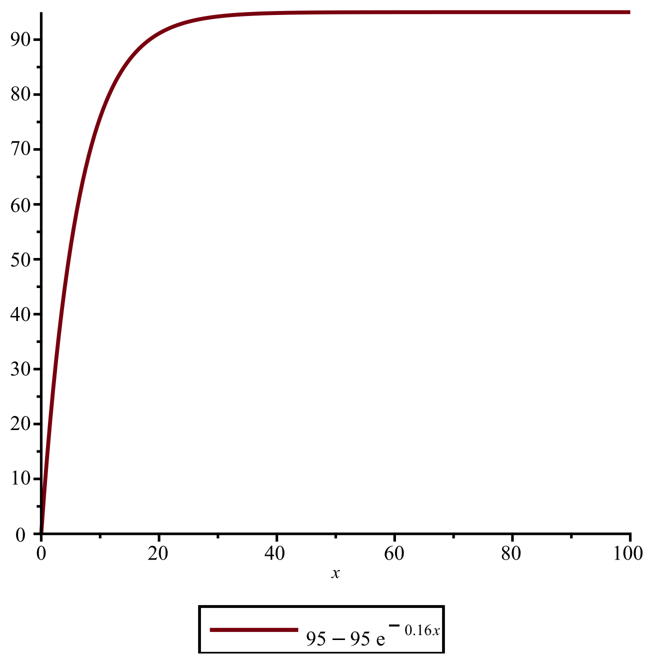
$\lim_{x \to \infty} (f(x))$

$$95. \tag{21}$$

Så den øvre grænse vil være 95cm for en torsk der fanges i Østersøen ifølge modellen. Man vil ikke kunne finde en der er større ifølge modellen.

Grafisk:

$plot(f(x), x = 0..100, legend = f(x))$



Opgave 12:
(a) Konfidensintervallet bestemmes.

$$\left[\frac{4}{100.} - 1.96\cdot\sqrt{\frac{\frac{4}{100.}\cdot\left(1-\frac{4}{100}\right)}{1296}}, \frac{4}{100.} + 1.96\cdot\sqrt{\frac{\frac{4}{100.}\cdot\left(1-\frac{4}{100}\right)}{1296}}\right]$$

$$[0.02933111134, 0.05066888866] \quad \textbf{(22)}$$

OBS: nogle bruger 2 i stedet for 1.96...

(b) Da 2% = 0.02 er undenfor intervallet, så afvises påstanden om at der skulle være flere rødhåret i Irland
end resten af Europa

Opgave 13:
restart : *with*(*Gym*) :

$f_1(x) := 1.5\cdot x^2 + 6\cdot x$:

(a) Den ønskede forskrift skal være glat i O(0, 0), derfor må den være tangent til $f_1(x)$.

Dermed er

$f_2(x) := f_1{}'(0)\cdot(x-0) + f_1(0)$:

Så

$f_2(x)$

$$6.\,x \quad \textbf{(23)}$$

(b) Løs ligningen $f_2(x) = 12$. Man får

$solve\left(f_2(x) = 12\right)$

$$2. \quad \textbf{(24)}$$

Forskriften for gaffelfunktionen f er lig med

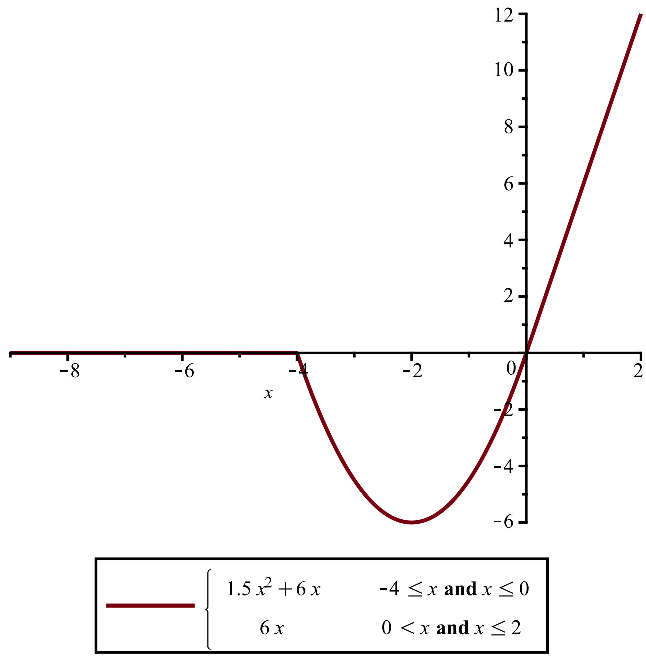
$$f(x) := \begin{cases} 1.5\cdot x^2 + 6\cdot x & -4 \le x \le 0 \\ 6\cdot x & 0 < x \le 2 \end{cases} :$$

$f(x)$

$$\begin{cases} 1.5\,x^2 + 6\,x & -4 \le x \le 0 \\ 6\,x & 0 < x \le 2 \end{cases} \quad \textbf{(25)}$$

(c) En tegning af f.

plot($f(x)$, x=−9 ..2, *legend*=$f(x)$)


12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-6
-4
-2
2
x
$\begin{cases} 1.5\,x^2 + 6\,x & -4 \le x \textbf{ and } x \le 0 \\ 6\,x & 0 < x \textbf{ and } x \le 2 \end{cases}$