Pdf-fil eksporteret til LaTeX.
Matematik A delprøve 1 og 2, vejledende opgavesæt 2.

Vi forventer folk har opgavesættet ved hånden.

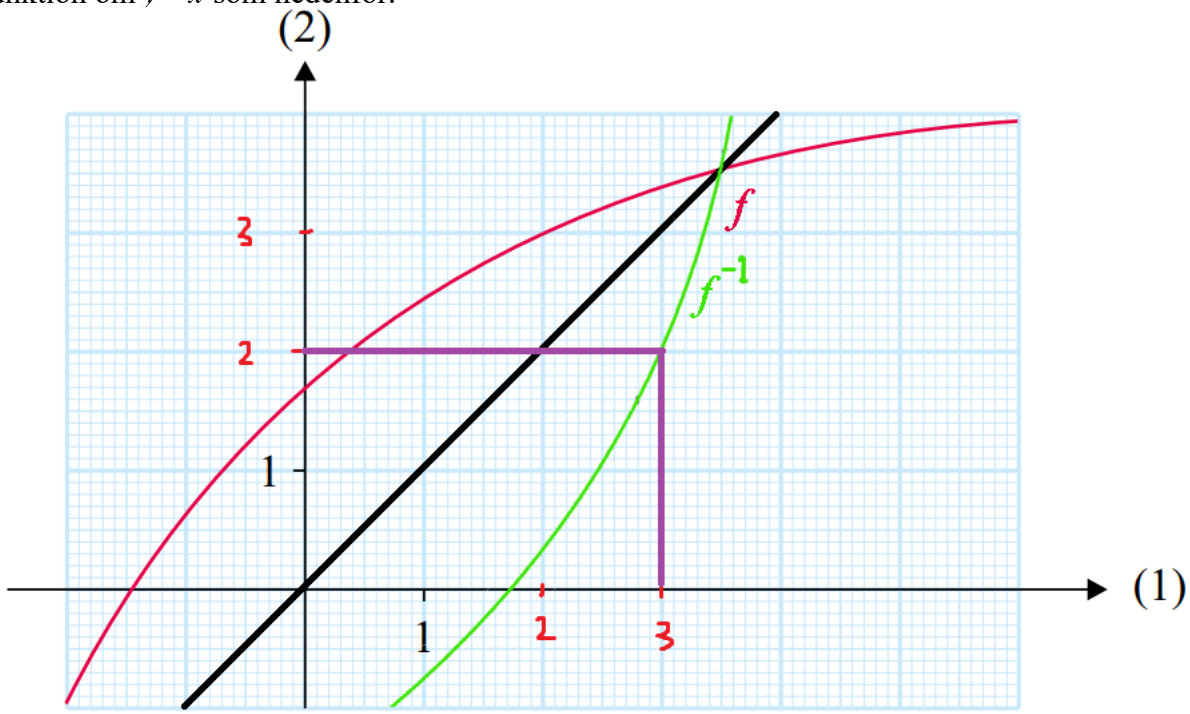
Delprøve 1

Opgave 1:
(a) Integralet bestemmes.

$$\int_1^2 \left(8x^3 + 6x^2\right)\,\mathrm{d}x = \left[2x^4 + 2x^3\right]_1^2 = 2\cdot 2^4 + 2\cdot 2^3 - \left(2\cdot 1^4 + 2\cdot 1^3\right) = 48 - 4 = 44$$

Opgave 2:
(a) Der gælder $f^{-1}(f(x)) = x$, så derfor er $f^{-1}(3) = 2$.

Man kan se, at $y = 3$ vil give $x = 2$, hvorfor at $f^{-1}(3) = 2$. Ellers kan man også tegne en spejlvendt funktion om $y = x$ som nedenfor.



Opgave 3:

(a) $f(x)=4\cdot\exp\left(x^2+2\cdot x-3\right)=4\cdot\exp((x+3)\cdot(x-1))$
Så er
$f(1)=4\cdot\exp((1+3)\cdot(1-1))=4\cdot\exp(0)=4\cdot 1=4$

(b) Først regnes $f'(x)$ vha. kædereglen. Sæt $a(x)=4\cdot\exp(x)$ og $b(x)=x^2+2\cdot x-3$, så er $a'(x)=4\exp(x)$ og $b'(x)=2x+2$.
$f'(x)=a'(b(x))\cdot b'(x)=4\exp\left(x^2+2\cdot x-3\right)\cdot(2\cdot x+2)$.
Dernæst løses $f'(x)=0$ vha. nulreglen. Da $4\exp\left(x^2+2\cdot x-3\right)$ altid er positiv, så har den ikke skæring med førsteaksen, hvorfor $4\exp\left(x^2+2\cdot x-3\right)$ ingen løsninger har. Dermed er ligningen blevet til $2x+2=0 \Leftrightarrow 2x=-2 \Leftrightarrow x=-1$. Dvs. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Dernæst laves der fortegnsvariation. Der vælges $x=-2$ og $x=0$.
$f'(-2)=4\exp\left(x^2+2\cdot x-3\right)\cdot(2\cdot x+2)=4\exp\left((-2)^2+2\cdot(-2)-3\right)\cdot(2\cdot(-2)+2)=-8\exp(-3)$
<0
$f'(0)=4\exp\left(x^2+2\cdot x-3\right)\cdot(2\cdot x+2)=4\exp\left(0^2+2\cdot 0-3\right)\cdot(2\cdot 0+2)=8\exp(-3)>0$

Dvs. $f(x)$ er aftagende i intervallet $]-\infty;-1]$ og voksende i intervallet $[-1;\infty[$.

Opgave 4:

(a) $f(x)=2\cdot\exp(x)-x^2-2\cdot x$ så er $f'(x)=2\cdot\exp(x)-2x-2$, og ved indsættelse af f og f' i differentialligningen fås

$y'=x^2+y-2$ giver
$2\cdot\exp(x)-2x-2=x^2+2\cdot\exp(x)-x^2-2\cdot x-2 \Leftrightarrow 2\cdot\exp(x)-2x-2=2\cdot\exp(x)-2\cdot x-2$
Her er det tydeligt at se, at f er en løsning til differentialligningen.

Opgave 5:

(a) Grafen for normalfordelingen med $\mu=52$ og $\sigma=3$ er C.
Grafen for B er en normalfordeling med $\mu=57$ og $\sigma=3$.
Grafen for A er en normalfordeling med $\mu=52$ men med en helt anden spredning, som er lavere end $\sigma=3$.

Det kan man også afgøre ved at se på hvor stort et område der dækkes. Ser man på 95% af området der dækkes, skal der gælde $\mu-2\cdot\sigma$ og $\mu+2\cdot\sigma$. Dermed er
$52-2\cdot 3=46$ og $52+2\cdot 3=58$. Man vi have for meget areal indenfor intervallet, hvis man ser på A. Derimod passer det bedst med C.

Opgave 6:

(a) Matricen

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det antages, at $det(M) \neq 0$. Determinanten bestemmes. $det(M) = 4 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow M$ har en invertibel matrix.

Her regnes M^{-1} vha. formlen i formelsamlingen.

$$M^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) Ligningssystemet er givet ved

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Dette kan skrives som

$4 \cdot x + 3 \cdot y = 8$ (A)

$x + y = 10$ (B)

Isoleres y i (B) fås $y = 10 - x$ og indsættes dette i (A) fås

$4 \cdot x + 3 \cdot (10 - x) = 8 \Leftrightarrow x + 30 = 8 \Leftrightarrow x = -22$

Indsættes $x = -22$ i formlen $y = 10 - x$ fås

$y = 10 - (-22) = 32$

Dvs. $x = -22 \wedge y = 32$.

Opgave 7:
(a)

$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} t^3 - t \\ \frac{1}{2}t^2 - t \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, så er

$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 - 1 \\ t - 1 \end{bmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ og med $t = 0$ fås

$\vec{v}(0) = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0^2 - 1 \\ 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b)

Linjen l: $y - x = 2 \Leftrightarrow y = x - 2$ har en normalvektor $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ og hvis hastighedsvektoren er parallel med l, så kræver det
$\vec{v}(t) \cdot \vec{n} = 0$, dvs.

$$\begin{bmatrix} 3t^2 - 1 \\ t - 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$3\,\overline{t}^2 - \overline{t} = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$\left[\left[t = \frac{1}{3}\right], [t = 0]\right] \qquad \textbf{(2)}$$

Dvs. $t = 0$ (se a)) og $t = \frac{1}{3}$ er de to tidspunkter.

Opgave 8:
(a)
Teksten aflæses.
$S(t)$: antal skarvkolonier
t : tiden målt i år.
$S'(t)$: Væksthastigheden
Forskellen mellem 67 og antallet af skarvkolonier til tidspunktet t er $(67 - S(t))$.
$k = 0.0029$ er proportionalitetskonstanten.

En differentialligning der opfylder teksten:
$S'(t) = 0.0029 \cdot S(t) \cdot (67 - S(t))$

$$\mathrm{D}(S)(t) = 0.0029\, S(t)\, (67 - S(t)) \qquad \textbf{(3)}$$

Opgave 9:
(a)
Den røde graf A er et polynomium med højeste potens $n = 4$.
Graf B og C er mulige afledede funktioner til A.

Når den afledede graf er voksende, men under første aksen, så er den oprindelige funktion aftagende. Når den afledede graf vokser og krydser førsteaksen, så vokser den oprindelige funktion også. Den funktion der følger det mønster skrevet ovenfor er grafen for B.

Dvs. $F(x)$ er grafen for A og $f(x)$ er grafen for B.

Opgave 10:
(a) Man anvender binomialformlen. (se evt. formelsamlingen).

$$P(X=x) = \frac{n!}{x! \cdot (n - x!)} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

Og med $x = 2$, $n = 4$ og $p = \frac{1}{3}$ fås

$$P(X=2) = \frac{4!}{2! \cdot (4-2!)} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{4-2} = 6 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{81}$$

NB: Brøken kan forkortes.

$$P(X=2) = \frac{\frac{24}{3}}{\frac{81}{3}} = \frac{8}{27}.$$

Opgave 11:
(a)
Man ser, at $\angle BAD$ og $\angle CAD$, $\angle ADC$ og $\angle CAD$ er komplementære. Der gælder, at $\angle ACD = \angle BAD$. Trekanterne er ensvinklede. Så har man

$$\frac{2}{5-x} = \frac{x}{2}.$$

Omskrives til

$$x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Løses fås

$$x = 1 \vee x = 4.$$

Delprøve 2

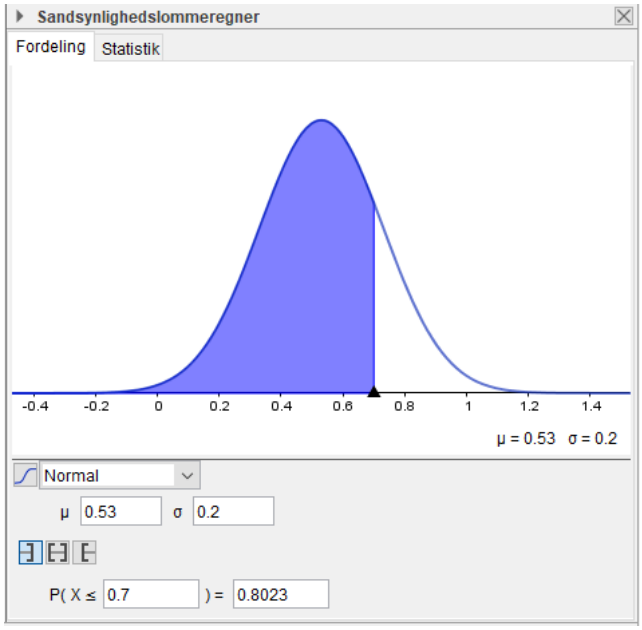
Opgave 12:
restart :; *with*(*Gym*) :
(a) Når der er tale om exceptionel udfald så gælder $\mu \pm 3 \cdot \sigma$, så
$0.53 + 3 \cdot 0.20 < 1 < 0.53 - 3 \cdot 0.20$

false **(4)**

Så der er ikke tale om et exceptionelt udfald.
(b) Man kan bruge Maple.
normalcdf(0.53, 0.2, 0.7)

0.802337456877308 **(5)**

Eller GeoGebra.



Man kan også regne ved formel

$$f(x) := \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} :$$

$\sigma := 0.2$:; $\mu := 0.53$:

$P(X < 0.7) = \int_{-\infty}^{0.7} f(x)\, dx$

$$P(X < 0.7) = 0.8023374570 \quad \textbf{(6)}$$

Så der er ca. 80% sandsynlighed.

Opgave 13:

restart :; *with*(*Gym*) :

(a)

$f(x) := 25 \cdot x^4 - \frac{2}{x}$:

$\int f(x)\, dx + k$

$$-2\ln(x) + 5x^5 + k \quad \textbf{(7)}$$

Punktet indsættes.

$-2\ln(1) + 5 \cdot 1^5 + k = 8 \xrightarrow{\text{solve for k}} [[k = 3]]$

Dvs.

$F(x) := -2\ln(x) + 5x^5 + 3$

$$F := x \mapsto -2\ln(x) + 5x^5 + 3 \quad \textbf{(8)}$$

Opgave 14:

restart :; *with*(*Gym*) :; *with*(*LinearAlgebra*) :

(a)

$\left\langle \left\langle 1, \frac{1}{2} \middle| 3, 0 \right\rangle \right\rangle^6 . \langle 0, 10 \rangle$

$$\begin{bmatrix} \frac{825}{2} \\ \frac{465}{4} \end{bmatrix} \quad \textbf{(9)}$$

evalf[5](%)

$$\begin{bmatrix} 412.50 \\ 116.25 \end{bmatrix} \quad \textbf{(10)}$$

Dvs. efter 6 år vil der være 413 unge dyr og 116 gamle dyr i populationen.

(b)

$M := \left\langle \left\langle 1, \frac{1}{2} \middle| 3, 0 \right\rangle \right\rangle$

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{(11)}$$

Eigenvalues(*M*)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

$evalf[5](\%)$

$$\begin{bmatrix} 1.8229 \\ -0.82290 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Forklaring: Populationen af dyrene vokser med $\lambda_1 = 1.8229$ ved hver fremskrivning n, dvs. populationen vokser med ca. 1.82 pr. år

Opgave 15:

$restart :; with(Gym) :$

$\vec{r}(t) := \begin{bmatrix} t^2 \\ t^5 - t \end{bmatrix} :$

(a)

$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$

$$\begin{bmatrix} t_1^2 \\ t_1^5 - t_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_2^2 \\ t_2^5 - t_2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$solve\left(\left\{t_1^2 = t_2^2, t_1^5 - t_1 = t_2^5 - t_2\right\}\right)$

$$\{t_1 = t_2, t_2 = t_2\}, \{t_1 = -1, t_2 = 1\}, \{t_1 = 1, t_2 = -1\}, \left\{t_1 = -RootOf\left(_Z^2 + 1\right), t_2 = RootOf\left(_Z^2 + 1\right)\right\} \tag{15}$$

$evalf[5](\%)$

$$\{t_1 = t_2, t_2 = t_2\}, \{t_1 = -1., t_2 = 1.\}, \{t_1 = 1., t_2 = -1.\}, \{t_1 = -\mathrm{I}, t_2 = \mathrm{I}\} \tag{16}$$

Dvs. $t_1 = -1$ og $t_2 = 1$. (NB: $t_1 = 1$ og $t_2 = 1$ giver også Q).

(b)

Bestem først $\hat{\vec{r}}(t)$ og lav prikprodukt med indholdet i integralet angivet i sættet.

$$M = \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} \left(2\,t \cdot \left(-t^5 + t\right) + \left(5\,t^4 - 1\right) \cdot t^2\right) \mathrm{d}t$$

$$M = \frac{16}{21} \tag{17}$$

$evalf[5](\%)$

$$M = 0.76190 \tag{18}$$

Opgave 16:

$restart :; with(Gym) :$

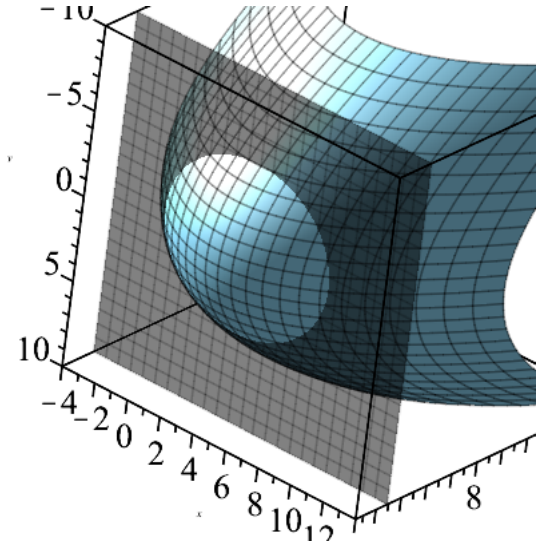
$f(x, y) := 0.1 \cdot x^2 - 0.8 \cdot x + 0.1 \cdot y^2 :$

(a)

$g(x, y) := 0.9$ (vi indlæser niveaukurven som $g(x, y)$ idet $f(x, y)$ er brugt. Det gør vi kun i forbindelse med plottet, sådan så læseren har en idé om, hvad det er for noget.)

$$g := (x, y) \mapsto 0.9 \quad \textbf{(19)}$$

$plot3d([f(x, y), g(x, y)], x = -4..14, y = -10..10, color = ["SkyBlue", "Black"], transparency = [0, 0.5])$



(b)

$p := eval\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \{x=0, y=0\}\right)$

$$p := -0.8 \tag{20}$$

$q := eval\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y), \{x=0, y=0\}\right)$

$$q := 0. \tag{21}$$

$z = 0 + p \cdot (x - 0) + q \cdot (y - 0)$

$$z = -0.8\, x \tag{22}$$

Dvs. z er tangentplanen α. Benyt formelsamlingen.

Alternativt,

$tangentplan(f(x, y), [x, y, z] = [0, 0, f(0, 0)])$

$$z = -0.8\, x \tag{23}$$

(c)

$0.1 \cdot x^2 - 0.8 \cdot x + 0.1 \cdot y^2 = 0.9$

$$0.1\, x^2 - 0.8\, x + 0.1\, y^2 = 0.9 \tag{24}$$

$\xrightarrow{\text{solve for y}}$

$$\left[\left[y = \sqrt{-x^2 + 8.\, x + 9.}\right], \left[y = -1.\, \sqrt{-x^2 + 8.\, x + 9.}\right]\right] \tag{25}$$

$\sqrt{-x^2 + 8.\, x + 9.} = 0$

$$\sqrt{-x^2 + 8.\, x + 9.} = 0 \tag{26}$$

$\xrightarrow{\text{solve for x}}$

$$[[x = -1.], [x = 9.]] \tag{27}$$

$x = -1$ og $x = 9$ har en numerisk afstand på:

$d = 9 + |-1|$

$$d = 10 \tag{28}$$

Og radius er $r = 5$.

Opgave 17:

$restart :; with(Gym) :$

(a)

Forskriften for h bestemmes vha. dsolve.

$dsolve\left(\left\{h'(t) = -15 \cdot (h(t))^{-\frac{3}{2}}, h(0) = 30\right\}, h(t)\right)$

$$h(t) = \frac{\left(28800\sqrt{30} - 1200\, t\right)^{2/5}}{4} \tag{29}$$

$h(t) := \frac{\left(28800\sqrt{30} - 1200\, t\right)^{2/5}}{4} :$

Som er den ønskede forskrift.

(b)

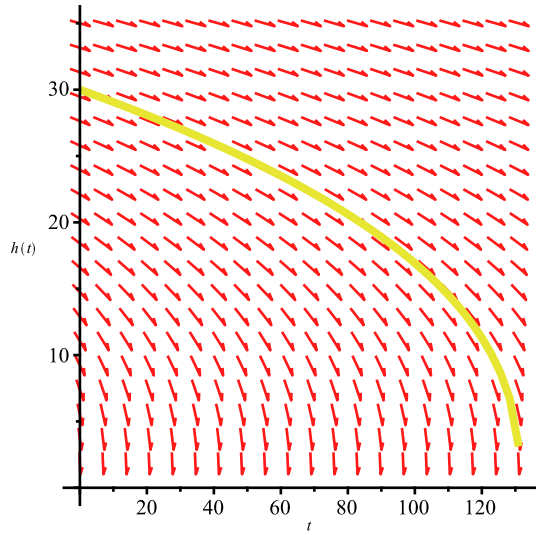
restart

with(*DEtools*) :

$ODE := h'(t) = -15 \cdot (h(t))^{-\frac{3}{2}}$:

$ivp := [h(0) = 30]$:

DEplot(*ODE*, $h(t)$, $t = 0..131$, $h = 0..35$, *ivp*)



(c)

$$h(t) := \frac{\left(28800\sqrt{30} - 1200\,t\right)^{2/5}}{4}$$

$$h := t \mapsto \frac{\left(28800\sqrt{30} - 1200\,t\right)^{2/5}}{4} \quad \textbf{(30)}$$

$h(t) = 0$

$$\frac{\left(28800\sqrt{30} - 1200\,t\right)^{2/5}}{4} = 0 \quad \textbf{(31)}$$

$\xrightarrow{\text{solve for t}}$

$$[[t = 24\sqrt{30}]] \quad \textbf{(32)}$$

evalf[5](%)

$$[[t = 131.45]] \quad \textbf{(33)}$$

Efter 131.45 sekunder er beholderen tom, hvilket kan ses af linjeelementerne og den angivende IVP.

Opgave 18:

restart :; *with*(*Gym*) :

(a)

Anvend formelsamlingen.

$V_{kegle} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V_{cylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

I denne opgave:

$V_{kegle} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot 2\, r \overset{\text{simplify}}{=} V_{kegle} = \frac{2\,\pi\, r^3}{3}$

$V_{cylinder} = \pi \cdot r^2 \cdot s \overset{\text{simplify}}{=} V_{cylinder} = \pi\, r^2\, s$

Samlet

$40 = \frac{2\,\pi\, r^3}{3} + \pi\, r^2\, s$

$$40 = \pi\, r^2\, s + \frac{2}{3}\, \pi\, r^3 \tag{34}$$

$\xrightarrow{\text{solve for s}}$

$$\left[\left[s = -\frac{2\left(\pi\, r^3 - 60\right)}{3\,\pi\, r^2}\right]\right] \tag{35}$$

Så højden s er

$s(r) = -\frac{2\left(\pi\, r^3 - 60\right)}{3\,\pi\, r^2}$

$$s(r) = -\frac{2\,\pi\, r^3 - 120}{3\,\pi\, r^2} \tag{36}$$

(b)

Krum overflade cylinder

$O_{cylinder} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

$$O_{cylinder} = 2\,\pi\, r\, h \tag{37}$$

Krum overflade kegle

$O_{kegle} = \mathrm{Pi} \cdot r \cdot \sqrt{h^2 + r^2}$

$$O_{kegle} = \pi\, r\, \sqrt{h^2 + r^2} \tag{38}$$

I denne opgave:

Krum overflade cylinder

$O_{cylinder} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot s$

$$O_{cylinder} = 2\,\pi\, r\, s \tag{39}$$

Krum overflade kegle

$O_{kegle} = \mathrm{Pi} \cdot r \cdot \sqrt{(2\, r)^2 + r^2}$

$$O_{kegle} = \pi\, r\, \sqrt{5}\, \sqrt{r^2} \tag{40}$$

Samlet:

$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot s + \mathrm{Pi} \cdot r \cdot \sqrt{(2\, r)^2 + r^2}$

$$O = 2\,\pi\, r\, s + \pi\, r\, \sqrt{5}\, \sqrt{r^2} \tag{41}$$

$O = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \left(-\frac{2\left(\pi\, r^3 - 60\right)}{3\,\pi\, r^2}\right) + \mathrm{Pi} \cdot r \cdot \sqrt{(2\, r)^2 + r^2}$

$$O = -\frac{2\left(2\pi r^3 - 120\right)}{3r} + \pi r\sqrt{5}\sqrt{r^2} \tag{42}$$

$O = -\frac{4\pi r^2}{3} + \frac{80}{r} + \pi r\sqrt{5}\cdot r$

$$O = -\frac{4\pi r^2}{3} + \frac{80}{r} + \pi r^2\sqrt{5} \tag{43}$$

Som stemmer med opgavesættet.

(c)

local O

```
Warning, A new binding for the name `O` has been created. The
global instance of this name is still accessible using the :-
prefix, :-`O`.  See ?protect for details.
```

$O(r) := -\frac{4\pi r^2}{3} + \frac{80}{r} + \pi r\sqrt{5}\cdot r$

$$O := r \mapsto -\frac{4\pi r^2}{3} + \frac{80}{r} + \pi r^2\sqrt{5} \tag{44}$$

$O'(r) = 0$

$$-\frac{8\pi r}{3} - \frac{80}{r^2} + 2\pi r\sqrt{5} = 0 \tag{45}$$

$\xrightarrow{\text{solve for r}}$

$$\left[\left[r = \frac{2\left(\left(37845\sqrt{5} + 50460\right)\pi^2\right)^{1/3}}{29\pi}\right], \left[r = -\frac{\left(\left(37845\sqrt{5} + 50460\right)\pi^2\right)^{1/3}}{29\pi} + \frac{I\sqrt{3}\left(\left(37845\sqrt{5} + 50460\right)\pi^2\right)^{1/3}}{29\pi}\right], \left[r = -\frac{\left(\left(37845\sqrt{5} + 50460\right)\pi^2\right)^{1/3}}{29\pi} - \frac{I\sqrt{3}\left(\left(37845\sqrt{5} + 50460\right)\pi^2\right)^{1/3}}{29\pi}\right]\right] \tag{46}$$

$evalf[5](\%)$

$$[[r = 2.4161], [r = -1.2080 + 2.0924\,I], [r = -1.2080 - 2.0924\,I]] \tag{47}$$

$is(O''(2.4161) > 0)$

$$true \tag{48}$$

Dvs. $r = 2.42$ dm giver det mindste overfladeareal.